

DERIVATE PARZIALI, DIREZIONALI, DIFFERENZIALE, GRADIENTEPrerequisiti: AM2-14 fino alla lezione 6RECAP TEORIA $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = f_{x_i}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h e_i) - f(x_0)}{h} \quad \text{Deriv. PARZIALE}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h v) - f(x_0)}{h} \quad \text{con } v \in \mathbb{R}^d, v \neq 0 \quad \text{Deriv. direc.}$$

$$\nabla f(x_0) = (f_{x_1}(x_0), \dots, f_{x_d}(x_0)) \quad \text{Gradiente}$$

 f differenziabile in x_0 se esiste $\alpha \in \mathbb{R}^d$ t.c.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \langle \alpha, h \rangle + o(|h|) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

A posteriori $\alpha = \nabla f(x_0)$ e

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$$

formula per deriv. direzionali

Come calcolo derivate parziali / direzionali?

- Usando la definizione (se si può, si evita)
- Usando le regole di derivazione come ad Analisi 1
- Per le derivate direzionali, quando f è diff. si usa la formula

Come dimostro che f è differenziabile in x_0 ?

- Usando la definizione (se si può, si evita)
- Teo. diff. totale (se le deriv. parziali sono continue, allora tutto ok)

Calcolo di derivate parziali

faccio finta che y sia costante

$$\bullet f(x, y) = x^3 + y^7$$

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 0 = 3x^2$$

$$f_y(x, y) = 7y^6$$

$$f_{xx}(x, y) = 6x$$

$$f_{yx}(x, y) = (7y^6)_x = 0$$

$$f_{xy}(x, y) = (3x^2)_y = 0$$

$$f_{yy}(x, y) = 42y^5$$

$$\text{Notazione: } f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$f_{xxy} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$$

[Teoria: le derivate parziali miste, se sono continue, non dipendono dall'ordine in cui si eseguono le derivate (teo. inversione dell'ordine di derivazione)]

$$\bullet f(x, y) = x^3 \cdot y^7$$

$$f_x(x, y) = 3x^2 \cdot y^7$$

$$f_y(x, y) = x^3 \cdot 7y^6$$

$$f_{xx}(x, y) = 6xy^7$$

$$f_{yx}(x, y) = 7y^6 \cdot 3x^2 = 21x^2y^6$$

$$f_{xy}(x, y) = 3x^2 \cdot 7y^6 = 21x^2y^6$$

$$f_{yy}(x, y) = 42x^3y^5$$

$$\bullet f(x, y) = y e^{x^2y}$$

$$f_x(x, y) = y \cdot 2xy e^{x^2y} = 2xy^2 e^{x^2y}$$

$$f_y(x, y) = e^{x^2y} + y \cdot e^{x^2y} \cdot x^2 = e^{x^2y} (1 + x^2y)$$

$$\bullet f(x, y) = \frac{x}{x+y}$$

$$f_x(x, y) = \frac{x+y - 1 \cdot x}{(x+y)^2} = \frac{y}{(x+y)^2}$$

$$f_y(x, y) = \frac{0 \cdot (x+y) - 1 \cdot x}{(x+y)^2} = -\frac{x}{(x+y)^2}$$

$$\bullet f(x, y) = y^x$$

$$f_x(x, y) = [\text{lo penso come } (a^x)'] = y^x \cdot \log y$$

$$f_y(x, y) = [\text{lo penso come } (y^a)'] = x y^{x-1}$$

Calcolo di derivate direzionali

$$f(x, y) = xy + y^2$$

$$v = (1, 2)$$

Vogliamo calcolare $\frac{\partial f}{\partial v}(-3, 4)$.

→ Osserviamo che f è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$ (co. diff. totale, essendo f_x e f_y continue) e

$$\nabla f(x, y) = (y, x + 2y)$$

→ Ora posso usare la formula

$$\frac{\partial f}{\partial v}(-3, 4) = \langle \nabla f(-3, 4), (1, 2) \rangle = \langle (4, 5), (1, 2) \rangle = 4 + 10 = 14$$

Se volessi farlo a mano, dovrei calcolare

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h} = \frac{(-3+h)(4+2h) + (4+2h)^2 - (-12+16)}{h}$$

$\uparrow$
 $x_0 + hv = (-3+h, 4+2h)$

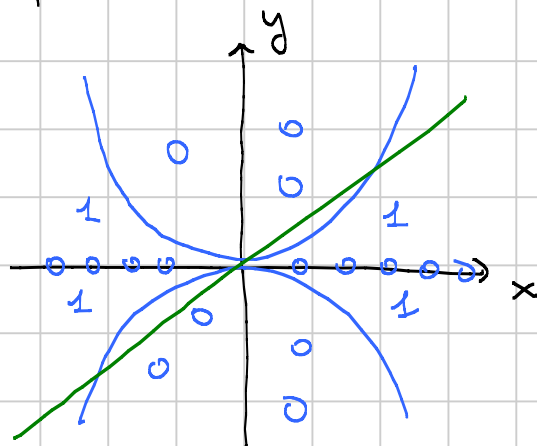
= controllare che venga uguale!
— 0 — 0 —

Achtung! L'esistenza di derivate parziali e direzionali non implica in generale la differenziabilità e nemmeno la continuità

Esempio (un po' burocratico) Solito con le parabole

Comunque io scelga retta per l'origine, si ha che $f = 0$ sulla retta in un intorno di 0, quindi tutte le deriv. direzionali sono nulle.

Tuttavia f non è continua in $(0, 0)$.



Esempio

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Domande: $\rightarrow$ è continua in $(0,0)$?

$\rightarrow$ ha deriv. parziali / direzionali in $(0,0)$?

$\rightarrow$ è diff. in $(0,0)$?

Continuità: Sì (coord. polari: $|f(x,y)| = |\rho \cos \theta| \leq |\rho|$)

Deriv. parziali: Usiamo la definizione per quelle direzionali

Sia $v = (a,b)$. Dobbiamo calcolare ($x_0 = (0,0)$)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(ah, bh)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{a^3 h^3}{h^2(a^2 + b^2)} = \frac{a^3}{a^2 + b^2}$$

Sì: esistono tutte le derivate direzionali, quindi pure quelle parziali. In particolare

$$f_x(0,0) = \underset{\substack{\uparrow \\ (a,b) = (1,0)}}{1} \quad \text{e} \quad f_y(0,0) = \underset{\substack{\uparrow \\ (a,b) = (0,1)}}{0}$$

e quindi $\nabla f(0,0) = (1,0)$

Differenziabilità: No. Se lo fosse, allora

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \langle \nabla f(0,0), (a,b) \rangle = \langle (1,0), (a,b) \rangle = a$$

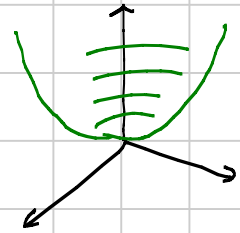
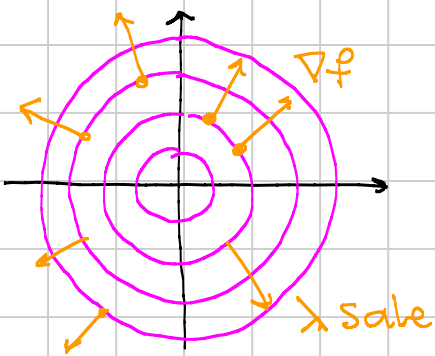
ma dalla formula sappiamo che è tutt'altro!

Interpretazione geometrica di ∇f

∇f = direzione in cui andare per avere la massima crescita di f

= vettore applicato nel p.to x_0 che è $\perp$ alla linea di livello di f passante per quel punto e che punta nella direzione " λ cresce "

Esempio solito $f(x,y) = x^2 + y^2$



$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$$

[Grafici nel video]