

Esempio 1 (Fondamentale) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

Funzione definita per $(x,y) \neq (0,0)$

Esplorazione: $(t,0) \rightsquigarrow \lim_{t \rightarrow 0} f(t,0) = 0$ (asse x)

$(0,t) \rightsquigarrow \lim_{t \rightarrow 0} f(0,t) = 0$ (asse y)

$(t,t) \rightsquigarrow \lim_{t \rightarrow 0} f(t,t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3}{t^4 + t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t^2 + 1} = 0$

$(t,mt) \rightsquigarrow \lim_{t \rightarrow 0} f(t,mt) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \cdot mt}{t^4 + m^2 t^2}$

↑
generica retta
 $y = mx$

$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{mt}{t^2 + m^2} = 0$

↑
se $m \neq 0$, viene $\frac{0}{m^2} = 0$
se $m = 0$ è banale

Il limite viene $= 0$ procedendo
su ogni retta passante per $(0,0)$

Questo fatto da solo NON basta.

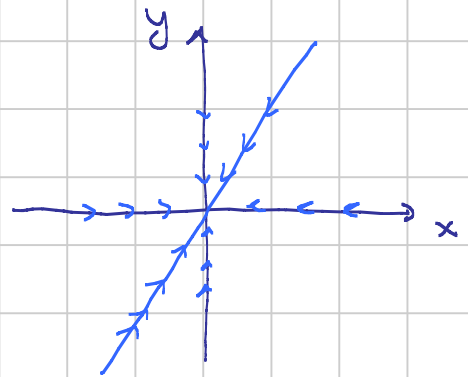
Proviamo con le coordinate polari:

$$\frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \frac{\rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{\rho^4 \cos^4 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} = \rho \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{\rho^2 \cos^4 \theta + \sin^2 \theta}$$

Ora faccio il lim per $\rho \rightarrow 0$.

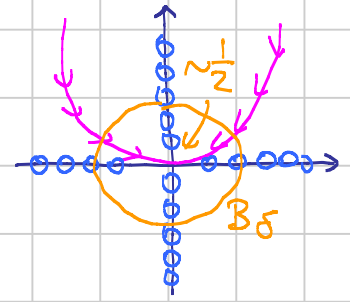
$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{\rho^2 \cos^4 \theta + \sin^2 \theta} = 0 \cdot \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{\sin^2 \theta} = 0 \quad (\text{bosco})$$

- Se $\sin \theta \neq 0$ ragiono come sopra e viene 0
- Se $\sin \theta = 0$, allora sto facendo il limite di frazione $\equiv 0$.



Ultimo tentativo: proviamo ad avvicinarci a $(0,0)$ lungo una parabola (t, t^2)

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t^2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 \cdot t^2}{t^4 + t^4} = \frac{1}{2} \text{ OPS!!}$$



Questo vuol dire che il limite NON ESISTE.

Achtung!

- Non basta che il limite sia lo stesso su tutte le rette
- Quando si lavora in coord. polari, bisogna ridursi a qualcosa indipendente da θ !!
(fare tendere $\rho \rightarrow 0$ con θ fisso = ragionare sulle rette)

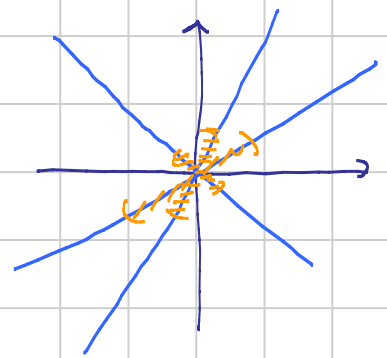
Enistica geometrica: perchè non basta considerare le rette

Supponiamo $f(t, mt) \rightarrow 0$ per ogni m

Dato $\varepsilon > 0$, su ogni retta c'è un intorno dell'origine in cui $|f| \leq \varepsilon$.

L'intorno dipende dalla retta (o da θ).

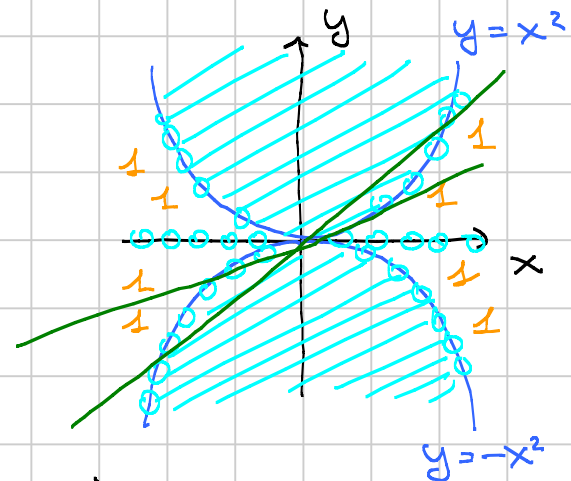
Mettendo insieme gli intorni non è detto che si ottenga qualcosa che contiene un cerchio centrato in $(0,0)$.



Esempio burocratico

Consideriamo f che vale

- 0 dentro le parabole e sull'asse x
- 1 fuori dalle parabole



È evidente che $\lim_{t \rightarrow 0} f(t, mt) = 0$ per ogni m

È evidente che $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ N.E.

Esempio 2 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^4+y^2} = 0$

Infatti

$$0 \leq \frac{|x|y^2}{x^4+y^2} = \underbrace{\frac{y^2}{x^4+y^2}}_{\leq 1} \cdot |x| \leq |x| \leadsto \text{finale con i carabinieri}$$

Esempio 3 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+2y^2}{x^2+3y^2}$ NON esiste

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t^2} = 1 \quad \text{asse } x$$

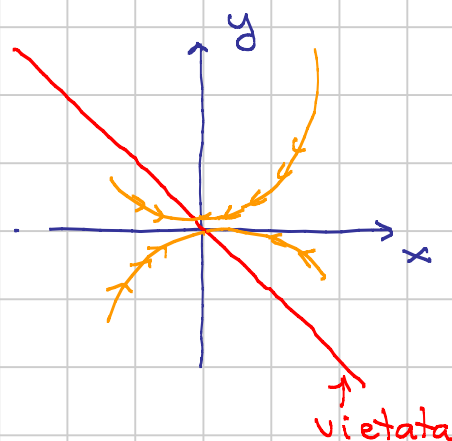
$$\lim_{t \rightarrow 0} f(0,t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t^2}{3t^2} = \frac{2}{3} \quad \text{asse } y$$

Esempio 4 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x+y}$ Definita per $x+y \neq 0$

• Proviamo con le rette $\lim_{t \rightarrow 0} f(t,mt) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{mt^3}{(m+1)t} = 0$

• Proviamo con le parabole $y = mx^2$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} f(t,mt^2) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{mt^4}{t+mt^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{mt^3}{1+mt} = 0 \end{aligned}$$



• Se ragionassi in coord. polari

$$\frac{\rho^{\frac{2}{3}} \cos^2 \theta \sin \theta}{\rho (\cos \theta + \sin \theta)}$$

Fissato θ , la funzione tende a 0 per $\rho \rightarrow 0$
 $\uparrow$
 qualunque

$\uparrow$ equivalente a ragionare sulle rette, quindi non basta!!

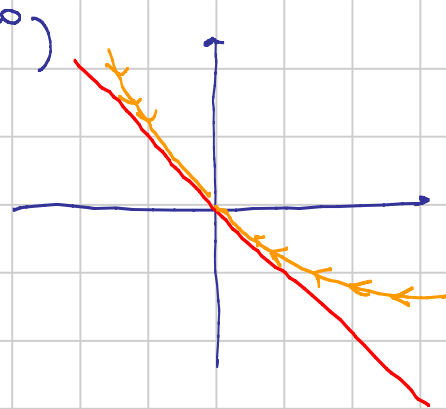
Proviamo avvicinando $(t, -t + t^{2020})$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, -t + t^{2020})$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 (-t + t^{2020})}{\cancel{t} - \cancel{t} + t^{2020}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-1 + t^{2019}}{t^{2017}} = -\infty, \text{ quindi il limite in generale non esiste.}$$

[Corretto dopo video]



Esempio 5 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x|y|^a}{x^4 + y^6}$

Per quali valori di a il limite esiste?

TECNICA DI PAREGGIAMENTO ESPONENTI

Pongo $x = u^6$ e $y = v^4$. Osservo che $(x,y) \rightarrow (0,0) \Leftrightarrow (u,v) \rightarrow (0,0)$

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{u^6 |v|^{4a}}{u^{24} + v^{24}}$$

↑ ↑
esponenti uguali 😊

In coord. polari $\frac{\rho^{6+4a} \cos^6 \theta |\sin \theta|^{4a}}{\rho^{24} (\cos^{24} \theta + \sin^{24} \theta)} = \rho^{4a-18} \cdot \boxed{\frac{\cos^6 \theta |\sin \theta|^{4a}}{\cos^{24} \theta + \sin^{24} \theta}} \leq \frac{1}{m}$

Se $4a > 18$, cioè $a > \frac{9}{2}$, allora il limite fa 0.

Se $4a \leq 18$, allora il limite non esiste, come si verifica provando $f(\underbrace{t^6}_\uparrow, \underbrace{mt^4}_\uparrow)$ e mandando $t \rightarrow 0$
scelta che pareggia gli esponenti

con $m = \min$ del denom., che è > 0 come nella lezione 4

[Grafici nel video]