

LIMITI A 0 PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI (2 in realtà)

Prerequisiti: AM2-14 fino alla lezione 3.

Recap teoria $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ (notazione vettoriale)

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ se $\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \geq M \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ se $\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \leq M \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $|f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ NON ESISTE se le precedenti sono false.

[Se $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}^d$, allora ovunque ... $\forall x \in (A \cap B_\delta(x_0)) \setminus \{x_0\}$]

SLOGAN: i limiti per funzioni di più variabili hanno pochissima voglia di esistere

① Come dimostro che un certo limite esiste?

- Usare metateorema (funzioni continue)
- Usare disuguagliante + teorema carabinieri
- Ridursi a funzioni di 1 variabile con opportuni cambi di variabile
- Coordinate polari
- Uso delle successioni

② Come dimostro che un certo limite non esiste?

- Trovo due "direzioni" in cui il limite viene diverso.

Esempio 1 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sin x + \cos y + 7} = 0$

Osserviamo che $f(x,y)$ è definita in tutto $\mathbb{R}^2$ senza pbm. barcollanti. Per il metateorema è continua ovunque, quindi basta sostituire $(0,0)$ al posto di (x,y) .

Esempio 2 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4}{x^2+y^2}$

Osserviamo che f è definita per $(x,y) \neq (0,0)$. Non solo: se sostituisco $(0,0)$ viene $\frac{0}{0}$, quindi una forma indet..

Ora

$$0 \leq \frac{x^4}{x^2+y^2} = \boxed{\frac{x^2}{x^2+y^2}} \cdot x^2 \leq x^2$$

≤ 1
(denom $\geq$ num)

quindi

$$\boxed{0} \leq \frac{x^4}{x^2+y^2} \leq \boxed{x^2} \leftarrow \text{metateorema}$$

0 (per teo. carabinieri)

Esempio 3 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2}$

Come prima è forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Osservo che

$$\boxed{0} \leq \frac{|y^3|}{x^2+y^2} = \boxed{\frac{y^2}{x^2+y^2}} \cdot |y| \leq \boxed{|y|}$$

0

Ora uso la tecnica del valore assoluto (vedi les. analisi 1)

Se $\lim_{\dots} |f(x,y)| = 0$, allora $\lim_{\dots} f(x,y) = 0$.

Esempio 4 (Granole classico)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

NON ESISTE

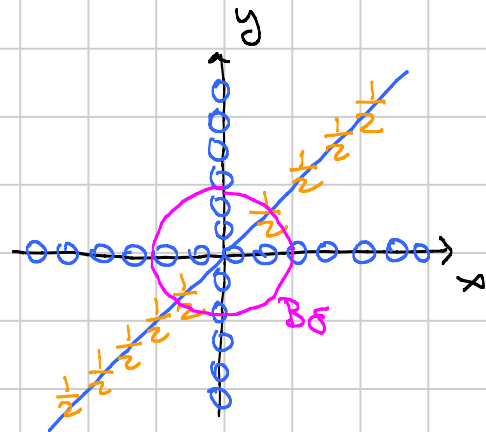
Come è fatta la funzione?

$$f(t, 0) \equiv 0 \quad (\text{asse } x)$$

$$\varphi(0,t) \equiv 0 \quad (\text{asse } y)$$

$$p(t, t) \equiv \frac{1}{2}$$

↑ bisettrice I e III

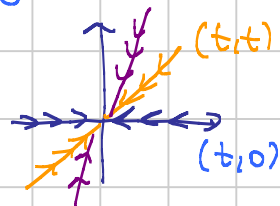


Questo basta per dire che il limite non esiste: se esistesse, $f(x,y)$ "dovrebbe assumere valori vicini a l in $B_\delta(0,0)$ "

Più formalmente, cerchiamo 2 direzioni in cui il limite viene diverso

1^a: $(t, 0)$ $\lim_{t \rightarrow 0} f(t, 0) = 0$ (muoversi lungo asse x)

$$2^a: (t, t) \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = \frac{1}{2}$$



NOTA BENE : $(t, 0)$ e (t, t) tendono a $(0, 0)$ per $t \rightarrow 0$

Oss. Se mi muovo lungo la retta generica (t, ut) ottengo

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, ut) = \frac{ut^2}{t^2 + u^2 t^2} = \frac{u}{1 + u^2}$$

quindi il limite dipende dalla direzione di avvicinamento!!

Esempio 5 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$ NON ESISTE

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t^2} = 1, \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(0, t) = 0$$

$\uparrow$
asse x
 $\uparrow$
asse y

Esempio 6 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$ NON ESISTE

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t,0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} = +\infty$$

↑
asse x positivo

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t,0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{t} = -\infty$$

↑
asse x negativo

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(0,t) = 0$$

↑
asse y positivo

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t,t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{t}{2t^2} = -\infty$$



Esempio 7 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2}{|x|+|y|}$

Ancora una volta $\frac{0}{0}$ e $f(x,y)$ è definita per ogni $(x,y) \neq (0,0)$.

1° modo Disuguaglianza + carabinieri

$$0 \leq \frac{y^2}{|x|+|y|} = \underbrace{\frac{|y|}{|x|+|y|}}_{\leq 1} \cdot |y| \leq |y|$$

Conclusione con metateorema + carabinieri

2° modo Coordinate polari $x = \rho \cos \theta$ $y = \rho \sin \theta$

Osserv. fond.: $(x,y) \rightarrow (0,0) \Leftrightarrow \rho \rightarrow 0$

$$\frac{y^2}{|x|+|y|} = \frac{\rho^2 \sin^2 \theta}{\rho (|\cos \theta| + |\sin \theta|)} = \rho \frac{\sin^2 \theta}{|\cos \theta| + |\sin \theta|}$$

Voglio stimare dall'alto la funzione di θ

→ Banalmente $\sin^2 \theta \leq 1$

→ Il denom. è una funzione continua di θ , dunque per $\theta \in [0, 2\pi]$ ammette un minimo m (teo. di Weierstrass di analisi 1)

Osservo che $m = |\cos \theta_0| + |\sin \theta_0|$, dove θ_0 è un p.to di min. I due termini non possono essere entrambi nulli, dunque $m > 0$ e quindi

$$|\cos \theta| + |\sin \theta| \geq m > 0 \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$$

↑
non dipende da θ

Ne segue che

$$\frac{\sin^2 \theta}{|\cos \theta| + |\sin \theta|} \leq \frac{1}{m}$$

↑
num. + grande
denom. + piccolo

Ma allora

$$0 \leq \rho \frac{\sin^2 \theta}{|\cos \theta| + |\sin \theta|} \leq \boxed{\rho \cdot \frac{1}{m}} \leftarrow \text{indipendente da } \theta.$$

Mando $\rho \rightarrow 0$ e uso i carabinieri.

Oss. L'importante è ridursi ad un limite per $\rho \rightarrow 0$ di roba che NON DIPENDE da θ

Allo stesso modo si facevano gli esempi 2 e 3

$$\frac{x^4}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{y^3}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\rho^4 \cos^4 \theta}{\rho^2} = \rho^2 \cos^4 \theta$$

$$\frac{\rho^3 |\sin \theta|^3}{\rho^2} = \rho |\sin \theta|^3$$

$$0 \leq \rho^2 \cos^4 \theta \leq \rho^2$$

↓ ↓
0 0

$$0 \leq \rho |\sin \theta|^3 \leq \rho$$

↓ ↓
0 0

— 0 — 0 —