

# GRAFICI DI FUNZIONI DI DUE VARIABILI

Prerequisiti: lezione 1 e inizio lezione 2 di AM2-14

Setting: funzioni  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x,y)$   
 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$   
 $\uparrow$   
 $A \subseteq \mathbb{R}^2$  sottolinsieme

$$\text{Grafico}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y)\}$$

Due modi per esplorare un grafico

→ LINEE DI LIVELLO

→ PERCORSI DI OMINI

Esempio 1  $f(x,y) = x^2 + y^2$

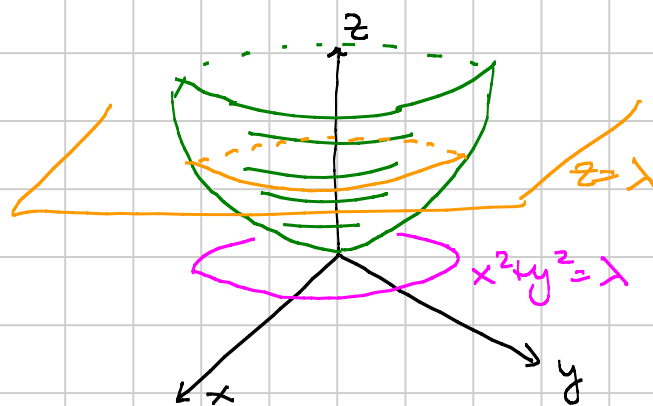
Linee di livello:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = \lambda\}$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \lambda\}$$

$\uparrow$  numero reale dato

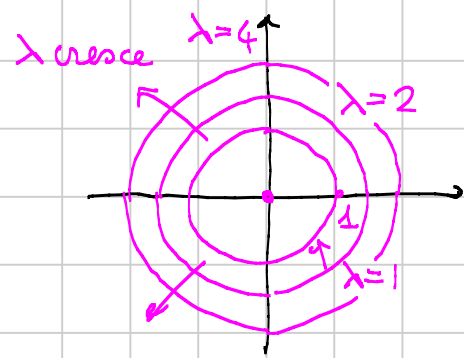
Fissato  $\lambda \in \mathbb{R}$ , cerchiamo i p.ti del piano base  $xy$  in cui il grafico sta "ad altezza  $\lambda$ ".



Altra interpretazione: intersechiamo il grafico con il piano  $z = \lambda$  (piano orizzontale) e poi proiettiamo sul piano  $xy$

- Per  $\lambda < 0$  l'intersezione è  $\emptyset$
- Per  $\lambda = 0$  è solo l'origine
- Per  $\lambda > 0$  è la circ. con centro in  $(0,0)$  e raggio  $\sqrt{\lambda}$

Le linee di livello sono circ.  
di raggio che cresce con  $\lambda$



Più ci allontaniamo da  $(0,0)$ , più  
le linee di livello diventano  
vicine tra di loro

### Percorso di omivi

Pensiamo ad una curva nel piano

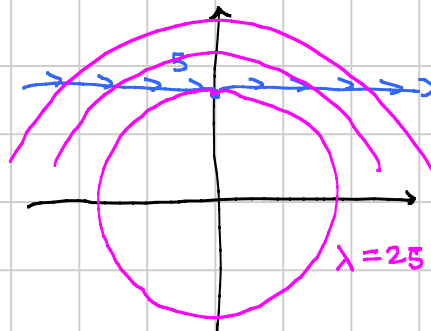
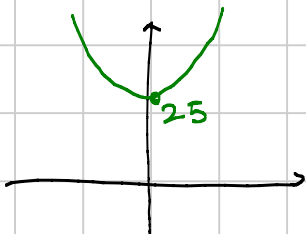
$(x(t), y(t)) \leftarrow$  punto in cui si trova  
un omivo al tempo  $t$

- $(t, 0) \rightsquigarrow$  percone asse  $x$
- $(0, t) \rightsquigarrow$  " "  $y$
- $(t, 2t) \rightsquigarrow$  " retta  $y = 2x$
- $(t, t^2) \rightsquigarrow$  percone parabola  $y = x^2$

Se  $(x(t), y(t))$  è il percorso dell'omivo nel piano  $xy$ , il  
numero  $f(x(t), y(t))$  è l'altezza "la quota" a cui si trova  
l'omivo nel corrispondente p.to del grafico.

$$f(t, 0) = t^2$$

$$f(t, 5) = t^2 + 25$$



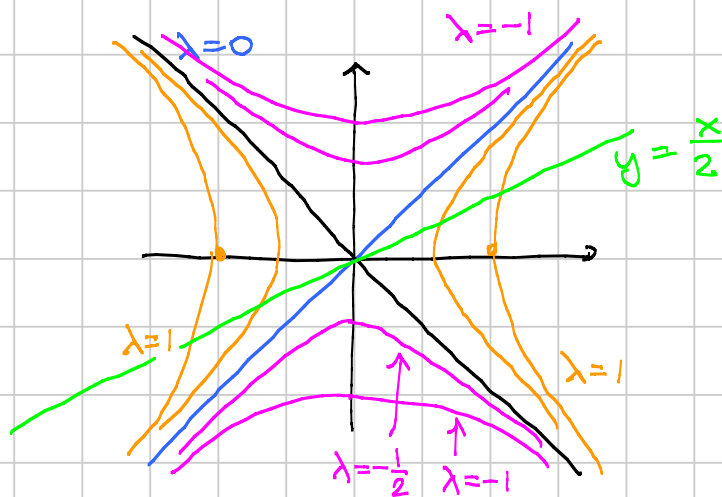
↑ intersezione del grafico  
con il piano  $y = 5$

— o — o —

Esempio 2  $f(x,y) = x^2 - y^2$

linee di livello :  $x^2 - y^2 = \lambda$

- $\lambda = 0 \rightsquigarrow x^2 - y^2 = 0$  •
- $\lambda = 1 \rightsquigarrow x^2 - y^2 = 1$  •
- $\lambda = -1 \rightsquigarrow x^2 - y^2 = -1$  •



$$f(0,0) = 0$$

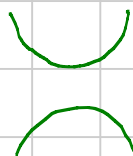
sopra e sotto "scuolo"

dx e sx salgo

Proviamo con omio

$$f(t,0) = t^2$$

$$f(0,t) = -t^2$$



omio asse x

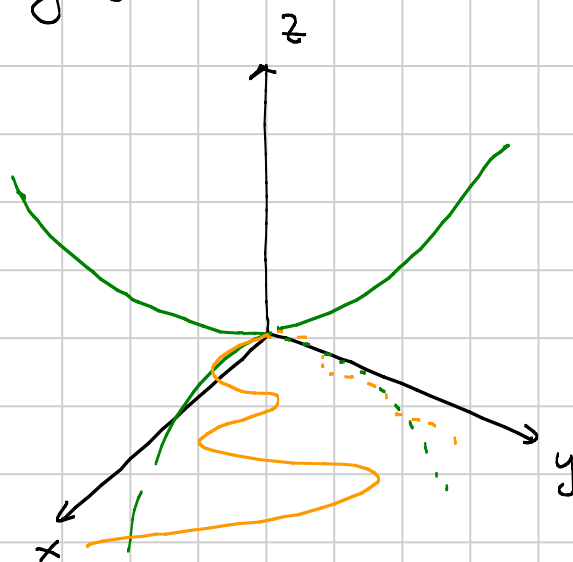
omio asse y

$$f(2t,t) = 4t^2 - t^2 = 3t^2$$



omio retta  $y = \frac{x}{2}$

Il grafico ha un p.to di sella nell'origine  
(o passo montano)



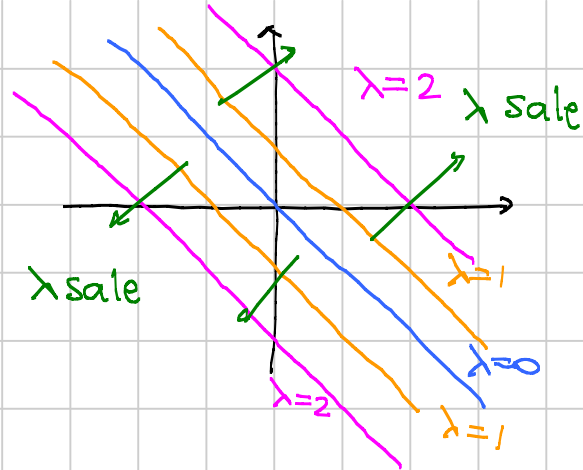
Esempio 3  $f(x,y) = |x+y|$

linee di livello :  $|x+y| = \lambda$

- $\lambda < 0 \leadsto$  insieme  $\emptyset$
- $\lambda = 0 \leadsto x+y = 0 \leadsto y = -x$
- $\lambda > 0 \leadsto |x+y| = \lambda$

$$\begin{array}{ll} x+y = \lambda & y = \lambda - x \\ x+y = -\lambda & y = -\lambda - x \end{array}$$

È come appoggiare un libro parzialmente aperto  
lungo la retta  $y = -x$



Esempi ulteriori nel video.