

$$F(\lambda) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda x} dx$$

③  $F(\lambda) \rightarrow 0$  per  $\lambda \rightarrow +\infty$

Prendo una qualunque  $\lambda_n \rightarrow +\infty$ . Allora definitivamente  $\lambda_n \geq 2018$  e quindi

$$\left| \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda_n x} \right| \leq e^{-2018x}$$

e questa dominazione basta per il teorema

②  $F$  è derivabile su  $(0, +\infty)$ .

Mostriamo che è derivabile su  $(A, +\infty)$  per ogni  $A > 0$ . Basta una dominazione per la derivata dell'integranda rispetto a  $\lambda$

$$\left| \frac{\sin x}{x} (-x) e^{-\lambda x} \right| \leq e^{-Ax} \quad \forall x \geq 0 \quad \forall \lambda \geq A$$

②bis Calcolo della derivata

Per ogni  $\lambda > 0$  vale il te. di scambio e quindi

$$F'(\lambda) = - \int_0^{+\infty} \sin x \cdot e^{-\lambda x} dx = \text{analisi 1...} = - \frac{1}{1 + \lambda^2}$$

↑  
formula nota

**1 Facile**  $f$  è continua su  $(0, +\infty)$

Facile: su ogni semiretta  $\lambda \geq A > 0$  vale la dominazione

$$\left| \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\leq 1} e^{-\lambda x} \right| \leq e^{-Ax} \quad \forall \lambda \geq A \quad \forall x \geq 0.$$

Posso quindi usare il teorema.

Achtung! Sembra mancare una dominazione verso  $\lambda = 0$ .

**1 Difficile**  $f$  è continua anche in  $\lambda = 0$

Occorre ripercorrere la dim. di conv. dell'int. di Dirichlet

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda x} dx = \underbrace{\int_0^1}_{\downarrow} \dots + \int_1^{+\infty} \dots$$

integrale proprio e passa  
al limite tranquillo

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda x} dx &= \left[ -\frac{\cos x}{x} e^{-\lambda x} \right]_{x=1}^{x=+\infty} \rightarrow -\frac{\cos 1}{1} e^{-\lambda} \\ &\quad \text{per parti} \uparrow \\ &\quad + \int_1^{+\infty} (+\cos x) \frac{-\lambda e^{-\lambda x} x - e^{-\lambda x}}{x^2} dx \end{aligned}$$

Alla fine mi basta passare a limite

$$\int_1^{+\infty} \cos x \frac{\lambda x e^{-\lambda x} + e^{-\lambda x}}{x^2} dx \quad \xrightarrow{\lambda=0} \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

Senza una dominazione per l'integrandi

$$\left| \cos x \frac{\frac{t}{\lambda x} e^{-\frac{t}{\lambda x}} + e^{-\lambda x}}{x^2} \right| \leq \frac{M+1}{x^2} \quad \begin{matrix} \forall \lambda \geq 0 \\ \forall x \geq 1 \end{matrix}$$

dove  $M := \max_{t \geq 0} \{ t e^{-t} \}$

Morale: la dominazione non funziona nell'integrale originario, ma funziona su quello ottenuto dopo un passaggio per parti

DELIRIO 1 Pti critici e topologia dei Livelli

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  abbastanza regolare ( $C^2$  e siamo sicuri)

$$L_a = \{ x \in \mathbb{R}^n : f(x) = a \} \quad \text{ipersup. di livello}$$

$$L_{[a,b]} = \{ x \in \mathbb{R}^n : a \leq f(x) \leq b \} \quad \text{striscia di livello}$$

Teorema Supponiamo che

$$\inf \{ |\nabla f(x)| : x \in L_{[a,b]} \} > 0$$

(Il gradiente sta ben lontano da 0 nella striscia)

Allora  $L_a$  e  $L_b$  sono omeomorfi.

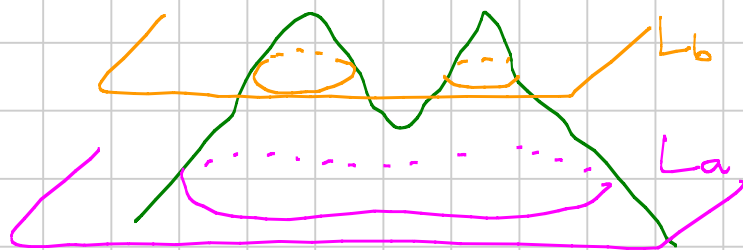
Corollario Se  $L_a$  e  $L_b$  non sono omeomorfi, allora in  $L_{[a,b]}$  succede qualcosa al gradiente.

In particolare, se  $L_{[a,b]}$  è compatto, allora esiste almeno un pto stazionario su  $L_{[a,b]}$ .

Cambio top. dei livelli = guai sul gradiente

[Dru] Considero il sistema di eq. diff.

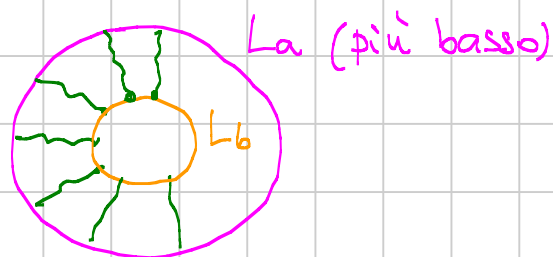
$$\dot{u} = - \frac{\nabla f(u)}{\|\nabla f(u)\|^2}$$



$$[f(u)]' = \langle \nabla f(u), \dot{u} \rangle = \langle \nabla f(u), - \frac{\nabla f(u)}{\|\nabla f(u)\|^2} \rangle = -1$$

Se i considero dati iniziali  $u_0 \in L_b$ , al tempo  $b-a$  mi trovo in  $L_a$ .

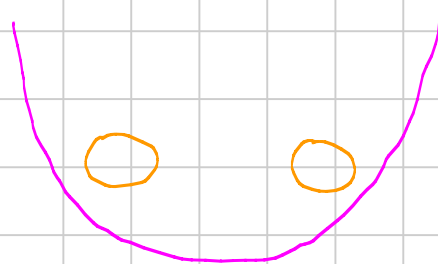
Questa mappa induce un omeomorfismo tra  $L_b$  ed  $L_a$   
→ continuo per dip. cont. dal dato iniziale



→ sing. perché metto un segno -  
e torno indietro nel tempo

→ il meccanismo è ben definito perché il denominatore sta lontano da 0 !!!

Oss. Nessuno caueolisce un "cambio all'infinito"



## DELIRIO 2

### Dimensione di uno spazio metrico

Sia  $(X, d)$  metrico compatto. Allora per ogni  $r > 0$  esiste una  $r$ -rete di distributori finita.

Sia  $D(r)$  il min. numero di distributori necessario per una  $r$ -rete.

Ci aspettiamo

$$D(r) \sim \frac{K}{r^d} \leftarrow \text{dimensione}$$

Def. Possiamo pone

$$\dim(X, d) := \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\log D(r)}{|\log r|}$$

Def. Se  $(X, d)$  non è compatto, la sua dim. è il sup delle dimensioni dei compatti contenuti.

Esercizi per casa 😊

1 - Dim. che la dim. di  $\mathbb{R}^n$  è  $n$

2 - Trovare esempi in cui il limsup NON è un limite

3 - Trovare un metrico compatto di dim.  $\sqrt{2018}$

4 - Se  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$  sono due metrici (compatti) e  $f: X \rightarrow Y$  è lip., allora

$$\dim(f(X)) \leq \dim(X)$$

Se è  $\alpha$ -hölderiana, allora  $\dim(f(X)) \leq \frac{1}{\alpha} \dim(X)$ .

(esercizio sui ricoprimenti!)

## Curva di Peano

Esiste  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$

continua e surgettiva, cioè una curva che ha come sostegno un quadrato PIENO.

Questa non può essere meglio di  $\frac{1}{2}$ -holder, ed infatti è proprio  $\frac{1}{2}$ -holder.

— o — o —