

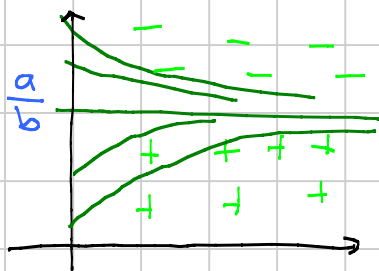
Modelli matematici

Esempio -1 Crescita esponenziale $\dot{u} = au$ $a > 0$
 $\uparrow$ tasso di riproduzione
 $u(t) = u_0 e^{at}$

Esempio 0 (Equazione Logistica)

$$\dot{u} = au - bu^2 = u(a - bu) \quad a > 0 \quad b > 0$$

$\uparrow$ autolimitazione
 (quanto i maiali si danno fastidio)



Esempio 1 Epidemia SIS (sani - infetti - sani)

→ si attacca } $\uparrow$ $\dot{M}$ $\rightarrow$ rafforzamento

→ si guarisce

$\uparrow$ $\dot{S}$ $\rightarrow$ guariscono

$\rightarrow$ hanno preso la malattia

$$\dot{M} = -aM + bMS$$

$$\dot{S} = aM - bMS \rightarrow \text{obbligatorio se voglio } M+S = \text{Tot costante}$$

$$S = \text{Tot} - M \leadsto \dot{M} = -aM + bM(\text{Tot} - M) = (-a + b\text{Tot})M - bM^2$$

Il RHS ha radici $M=0$ e $M = \frac{b\text{Tot} - a}{b} < \text{Tot}$

Ci sono 2 casi

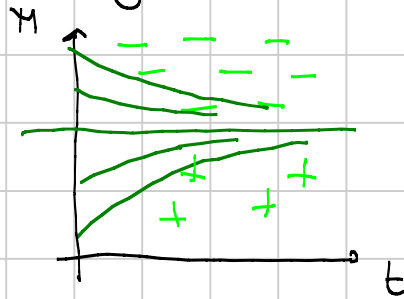
$$\textcircled{1} \quad \frac{b \text{Tot} - a}{b} \leq 0 \quad \rightsquigarrow$$



Se c'è poca massa critica

(cioè Tot piccolo) tutti definitivamente guariscono

$$\textcircled{2} \quad \frac{b \text{Tot} - a}{b} > 0 \quad \rightsquigarrow$$



Esempio 2 Epidemia SIR (sani - infetti - up)

→ si attacca

→ non si guarisce ☹️

$$\dot{M} = -aM + bMS$$

$$\dot{S} = -bMS$$

Sopravvive qualcuno? Metodo energetico: cerco qualcosa che si conservi lungo l'evoluzione

Cerco una funzione $E(M, S)$ t.c. $E(M, S) = \text{costante}$

$$[E(M, S)]' = E_M \dot{M} + E_S \dot{S} = E_M (-aM + bMS) - E_S bMS \stackrel{?}{=} 0$$

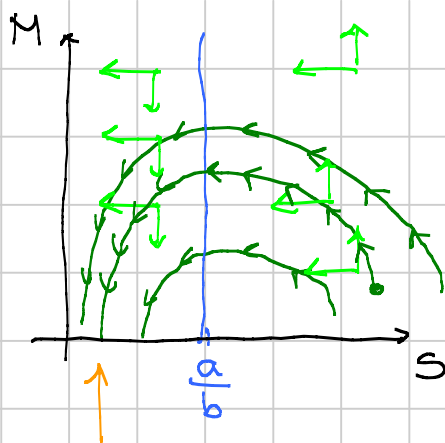
Divido per MS : $E_M \left(\underbrace{-\frac{a}{S} + b}_{\uparrow E_S} \right) - E_S \underbrace{b}_{\uparrow E_M} \stackrel{?}{=} 0$

Basta prendere $E(M, S) := -a \log S + bS + bM$

Bella copia: osservo che $E(M, S)$ è costante lungo le traiettorie (non serve nemmeno dividere)

Questo dice che S non può mai annullarsi, e anzi deve rimanere ben lontano da 0!!! (altrimenti $E(M, S)$ diventa troppo grande)

Traiettorie



$$\dot{M} = M(-a + bS)$$

$$\dot{S} = -bMS$$

Brutalata (giustificabile)

$$\frac{dM}{dt} = M(-a + bS)$$

Divido le 2 equazioni 😊

$$\frac{dS}{dt} = -bMS$$

$$\frac{dM}{dS} = \frac{\cancel{M}(-a + bS)}{-b\cancel{M}S} = \frac{a}{b} \frac{1}{S} - 1$$

$$\Rightarrow M(S) = \frac{a}{b} \log S - S + \text{cost}$$

↪ stesso risultato ottenuto sopra!!!

Oss. La brutalata si giustifica ricavando t in funzione di S (posso perché...) e sostituendo in M .
— o — o —

Esempio 3 (VOLTERRA - LOTKA) (Preda predatore)

$$\dot{u} = u(a - bv)$$

u = preda = conigli

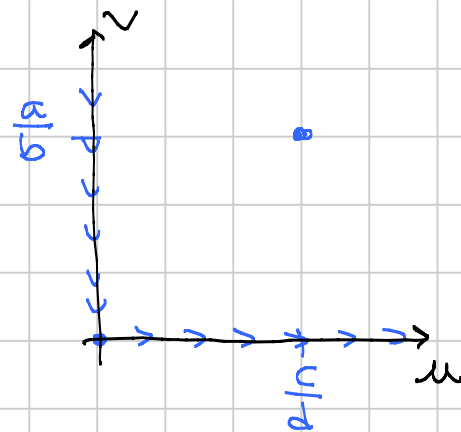
$$\dot{v} = v(-c + du)$$

v = predatori = volpi

I conigli da soli crescono esponenzialmente

Le volpi da sole decadono "

L'origine è una sella
(linearizzare per credere)



Se u_0 e v_0 sono positive,
restano tali (le traiettorie non
si incrociano)

C'è un altro p.to stazionario $(\frac{a}{b}, \frac{c}{d})$.

Linearizzando (fallo...) vengono autovalori immaginari
puri $\leadsto$ BOK.

Metodo energetico: cerco $E(u, v)$ che sia costante sulle
traiettorie (integrale primo per i fisici)

$$\begin{aligned}[E(u, v)]' &= E_u \dot{u} + E_v \dot{v} \\ &= E_u u(a - bv) + E_v (-c + du)v \\ &= uv \left[\underbrace{E_u \left(\frac{a}{v} - b \right)}_{E_v} - \underbrace{E_v \left(\frac{c}{u} - d \right)}_{E_u} \right]\end{aligned}$$

Scelgo ora $E(u, v) := a \log v + c \log u - bv - du$
e osservo che

- si tratta di una funzione definita per $u > 0$ e $v > 0$ e
concava in questa zona

$$HE = \begin{pmatrix} -\frac{c}{u^2} & 0 \\ 0 & -\frac{a}{v^2} \end{pmatrix} \leadsto \text{definita negativa}$$

- quando $(u, v) \rightarrow$ assi abbiamo $E(u, v) \rightarrow -\infty$
- $E(u, v)$ ha max per $(u, v) =$ p.to stazionario

Inoltre $E(u(t), v(t)) = \text{costante}$

Come sono fatte le linee di livello di E ?

Conclusione:

→ nessuno si estingue

→ tutte le soluzioni sono periodiche
(occorrerebbe dimostrare che ogni
curva viene percorsa in tempo finito,
cosa che si può fare dividendo in 4 tratti)

— o — o —

