

Calcolo del periodo

Esempio $\ddot{u} = -u^3$

Energia $\leadsto \frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{4} u^4 = c$

$$\leadsto \dot{u}^2 + \frac{1}{2} u^4 = c$$

$\leadsto$ Posso ricavare $\dot{u}$ quando solo "sopra" o "sotto"

Sopra: $\dot{u}(t) = \sqrt{c - \frac{1}{2} u(t)^4}$ (sotto avrei il segno -)

$\uparrow$ teoricamente posso risolverla come eq. di ordine 1.

Per ogni $t \in [t_1, t_2]$ vale la relazione di sopra, dunque

$$\frac{\dot{u}(t)}{\sqrt{c - \frac{1}{2} u(t)^4}} = 1$$

$$\forall t \in (t_1, t_2)$$

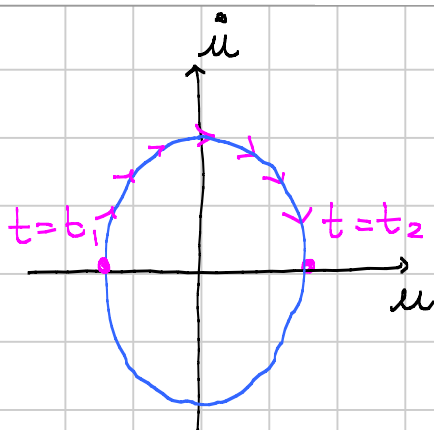
$\uparrow \quad \uparrow$
per non dividere per 0

Integro tra t_1 e t_2 :

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\dot{u}(t)}{\sqrt{c - \frac{1}{2} u(t)^4}} dt = \int_{t_1}^{t_2} 1 dt = t_2 - t_1$$

|| Pongo $x = u(t) \leadsto dx = \dot{u}(t) dt$

$$\int_{u(t_1)}^{u(t_2)} \frac{1}{\sqrt{c - \frac{1}{2} x^4}} dx = \int_{-\sqrt[4]{2c}}^{\sqrt[4]{2c}} \frac{1}{\sqrt{c - \frac{1}{2} x^4}} dx$$



Da questo segue che

$$t_2 - t_1 = \int_{-\sqrt[4]{2c}}^{\sqrt[4]{2c}} \frac{1}{\sqrt{c - \frac{1}{2}x^4}} dx$$

meta' del periodo

L'integrale improprio
con poli in $\pm \sqrt[4]{2c}$
converge perché c'è
la radice quadrata

Vediamo come dipende da c : pongo $x = \sqrt[4]{2c} y$

$$dx = \sqrt[4]{2c} dy \quad x = \pm \sqrt[4]{2c} \Leftrightarrow y = \pm 1$$

$$\frac{1}{2} \text{ periodo} = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{c - cy^4}} \sqrt[4]{2c} dy$$

$$= \frac{\sqrt[4]{2c}}{\sqrt{c}} \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}}_{\text{Fisso}}$$

$\uparrow$
 $\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{c}}$

$\leadsto$ + c diventa grande, più il periodo diventa piccolo!!

Esempio 2 $\ddot{u} = -u$ (oscillatore armonico)

Energia: $\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{2} u^2 = \text{cost} \quad \dot{u}^2 + u^2 = c$

"Sopra" $\dot{u} = \sqrt{c - u^2}$

$$\frac{1}{2} \text{ periodo} = \int_{-\sqrt{c}}^{\sqrt{c}} \frac{dx}{\sqrt{c - x^2}} = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{c - cy^2}} \sqrt{c} dy = \int_{-1}^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

$\uparrow$
 $x = \sqrt{c} y$

Il periodo NON dipende da c .

Esempio 3 $\ddot{u} = -\sin u$ (Pendolo vero)

Esistenza globale $\leadsto$ NO PBM.

Energia $\ddot{u} \dot{u} = -\dot{u} \sin u \leadsto \left(\frac{1}{2}\dot{u}^2\right)' = (\cos u)'$

$$\frac{1}{2}\dot{u}^2 - \cos u = \text{cost}$$

Dovrò disegnare le curve nello spazio delle fasi

$$\dot{u} = \pm \sqrt{C + 2 \cos u}$$

Le traiettorie chiuse
esterne corrispondono
a traiettorie periodiche
 $C \in (-2, 2)$

Il periodo T è dato da

$$\frac{1}{2}T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{C + 2 \cos x}}$$

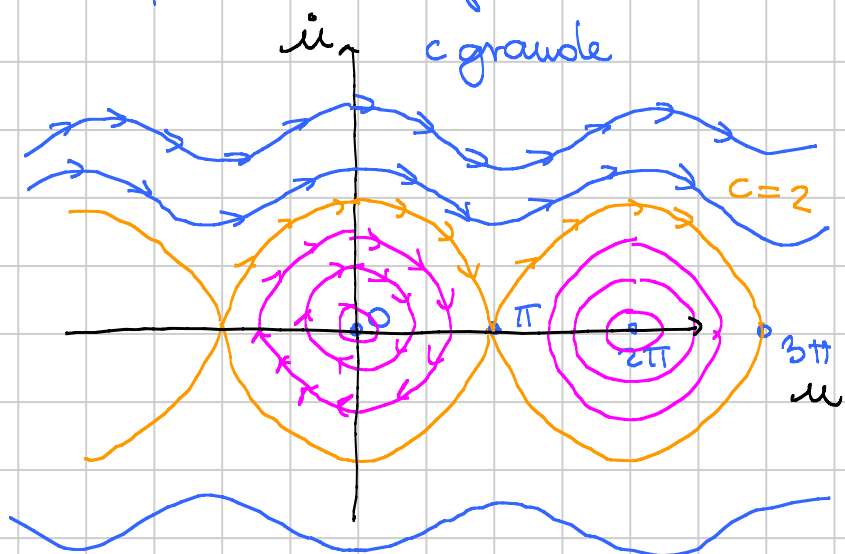
dove x_1 e x_2 sono le radici di
 $C + 2 \cos x = 0$

e si vede che l'integrale converge (esercizio)

La traiettoria con $C = 2$ corrisponde ad una soluzione
 $u(t)$ strett. crescente tale che

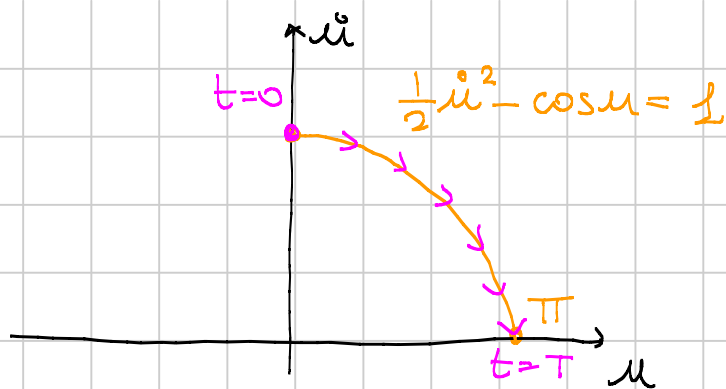
$$\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = -\pi$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \pi$$



Supponiamo di partire con
 $\begin{cases} u(0) = 0 \\ \dot{u}(0) = 2 \end{cases} \leadsto \text{quindi } c = 1$

Avevamo $c = 1$ l'energia ci dice che



$$\frac{1}{2} \dot{u}^2 - \cos u = 1 \leadsto \dot{u} = \sqrt{2 + 2 \cos u}$$

Supponiamo che la soluzione arrivi in $(\pi, 0)$ al tempo T .

In $[0, T]$ vale $\dot{u}(t) = \sqrt{2} \sqrt{1 + \cos u}$

Divido e integro e trovo

$$\int_0^T \frac{\dot{u}}{\sqrt{2} \sqrt{1 + \cos u}} = \int_0^T 1 = T$$

" $x = u(t)$ $t=0 \leadsto x=0$
 $t=T \leadsto x=\pi$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{1 + \cos x}}$$

integrale improprio in π e divergente

$\cos x$ in un intorno sx di π si comporta come

$$\cos(\pi - t) = -\cos t \sim -1 + \frac{t^2}{2} \Rightarrow \sqrt{1 + \cos(\pi - t)}$$

$$\sim \sqrt{\frac{t^2}{2}} \sim t$$

$\Rightarrow$ per arrivare in π occorre un tempo infinito.

Riassumendo

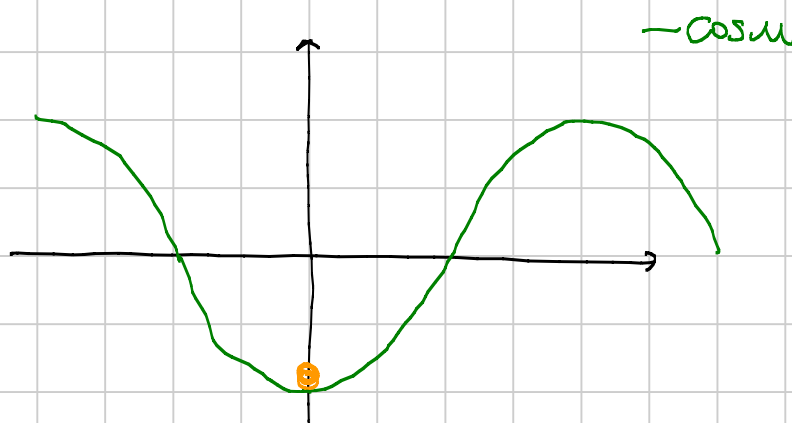
$$\begin{cases} \ddot{u} = -\sin u \\ u(0) = 0 \\ \dot{u}(0) = \alpha > 0 \quad (\text{per } \alpha < 0 \text{ è simm.}) \end{cases}$$

Abbiamo che

- per $\alpha < 2$ la soluzione $u(t)$ è periodica
- per $\alpha = 2$ vale $u(t) \rightarrow \pm\pi$ per $t \rightarrow \pm\infty$ e la soluzione è monotona
- per $\alpha > 2$ la soluzione $u(t)$ è monotona e tende a $\pm\infty$ per $t \rightarrow \pm\infty$

Energy landscape

- α piccolo: la pallina sale, si ferma, torna indietro e così via



- α grande: la pallina scollina e prosegue fino all'infinito
- α critico: valore critico della velocità che fa arrivare in cima in tempo infinito

— o — o —

Esercizio Capire come il periodo dipende dall'energia.