

DIPENDENZA CONTINUA DAL DATO INIZIALE

Setting

$$\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$$

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$$\dot{u} = f(t, u)$$

Fisso $t_0 \in \mathbb{R}$ e considero una successione $u_{0n} \rightarrow u_{0\infty}$ in $\mathbb{R}^k$
 Considero la succ. di problemi

$$\begin{cases} \dot{u}_n = f(t, u_n) \\ u_n(t_0) = u_{0n} \end{cases}$$

$(t_0, u_{0\infty}) \in \Omega$ quindi
 $(t_0, u_{0n}) \in \Omega$ almeno per n grandi

Domanda: quando $u_{0n} \rightarrow u_{0\infty}$, è vero che $u_n(t) \rightarrow u_{\infty}(t)$?
 Se sì, come e dove?

Prop. Setting come sopra. Supponiamo che f sia continua in (t, u) e lip. nella variabile u unif. in t .

Supponiamo che $u_{\infty}(t)$ e $u_n(t)$ siano definite in un intervallo comune $[t_0, t_0 + \delta]$.

Allora

$$\|u_n(t) - u_{\infty}(t)\| \leq \|u_{0n} - u_{0\infty}\| \cdot e^{L(t-t_0)} \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta]$$

la distanza si deteriora con il passare del tempo

Dim Solito conto. Poniamo

$$w(t) := \|u_n(t) - u_\infty(t)\|^2$$

Allora

$$\dot{w}(t) = 2 \langle u_n(t) - u_\infty(t), \dot{u}_n(t) - \dot{u}_\infty(t) \rangle$$

$$\stackrel{\text{c.s.}}{\leq} 2 \|u_n(t) - u_\infty(t)\| \cdot \|\dot{u}_n(t) - \dot{u}_\infty(t)\|$$

$$= 2 \|u_n(t) - u_\infty(t)\| \cdot \|\varphi(t, u_n(t)) - \varphi(t, u_\infty(t))\|$$
$$\leq L \|u_n(t) - u_\infty(t)\|$$

$$\leq 2L w(t).$$

Abbiamo quindi dim. che $\dot{w}(t) \leq 2L w(t)$, da cui

$$w(t) \leq w(t_0) e^{2L(t-t_0)}$$

$$\|u_n(t) - u_\infty(t)\|^2 \leq \|u_n(t_0) - u_\infty(t_0)\|^2 \cdot e^{2L(t-t_0)}$$

Facendo la radice si ha la tesi.

— o — o —

Corollario

Se $u_n \rightarrow u_\infty$, allora $u_n(t) \rightarrow u_\infty(t)$ uniformemente in $[t_0, t_0 + \delta]$, purché tutte le soluzioni siano definite in un intervallo comune $[t_0, t_0 + \delta]$.

— o — o —

Prop. Nelle stesse ipotesi di sopra, vale anche

$$\|u_n(t) - u_\infty(t)\| \geq \|u_{0n} - u_{0\infty}\| \cdot e^{-L(t-t_0)} \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta]$$

altra forma quantitativa di unicità: chi parte diverso, resta diverso!

Dim. Come sopra, con stima dall'altra parte

$$\dot{w}(t) \geq -2 \|u_n(t) - u_\infty(t)\| \cdot \|u_n(t) - u_\infty(t)\|$$

$$\geq -2L w(t)$$

↑ occhio ai versi

$$\text{Da } \dot{w}(t) \geq -2L w(t) \text{ deduciamo } w(t) \geq w(t_0) e$$

— o — o —

Prop. Stesso setting. Supponiamo $u_0(t)$ sia definita in un certo intervallo chiuso $[t_0, t_0 + \delta]$.

Allora per n abbastanza grande anche $u_n(t)$ è definita almeno nello stesso intervallo.

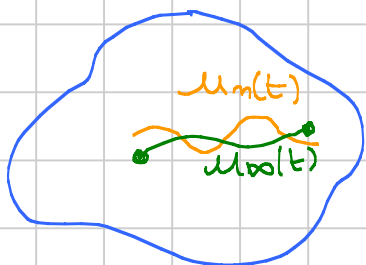
(Da questo segue una specie di dipendenza continua del tempo di vita)

Dim. Devo escludere che se $u_n(t)$ abbiano BU o BD prima di $t_0 + \delta$. Questo segue dalla stima precedente. Fino a quando $u_n(t)$ è definita vale

$$\|u_n(t) - u_\infty(t)\| \leq \|u_n(t_0) - u_\infty(t_0)\| \cdot e^{L(t-t_0)}$$

↑

impedisce blow up e anche BD perché se $(t, u_\infty(t)) \in \Omega$ e $(t, u_n(t))$ è vicino, allora sta pure lui in Ω .



Più in generale, prendiamo $f_n(t, u) \rightarrow f_\infty(t, u)$ in Ω e consideriamo problemi

$$\begin{cases} \dot{u}_n = f_n(t, u_n) \\ u_n(t_0) = u_{0n} \end{cases}$$

Prop. Supponiamo $f_n(t, u)$ solo continue, e $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. in Ω . Supponiamo $u_{0n} \rightarrow u_{0\infty}$.

Supponiamo $u_n(t)$ definite almeno in un intervallo comune $[t_0, t_0 + \delta]$.

Supponiamo che $u_n(t) \rightarrow u_\infty(t)$ unif.

Allora $u_\infty(t)$ è soluzione del problema limite.

Dim. Passaggio al limite nella formulazione integrale

$$\begin{array}{ccc} u_n(t) = u_n(t_0) + \int_{t_0}^t f_n(s, u_n(s)) ds \\ \downarrow \text{hp} & \downarrow \text{hp} & \downarrow \text{vera} \\ u_\infty(t) = u_\infty(t_0) + \int_{t_0}^t f_\infty(s, u_\infty(s)) ds \end{array}$$

La convergenza degli integrali segue da

$$\underbrace{f_n(s, u_n(s))}_{\rightarrow 0} \rightarrow \underbrace{f_\infty(s, u_\infty(s))}_{\rightarrow 0} \text{ unif.}$$

Oss. Se le $f_n(t, u)$ sono equiuite, cioè

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad |f_n(t, u)| \leq M \quad \forall (t, u) \in \Omega$$

allora le $u_n(t)$ verificano le ipotesi di A.A. (sono equilip. con costante M , ed equiuite perché $u_n(t_0)$ sono equiuite e poi uso equilip.). Quindi $u_n(t)$ ammettono s. succ. convergenti a sol. del pbm. limite

Oss. Mancando l'unicità, s. succ. diverse possono convergere a sol. diverse del pbn. limite.

Se il problema limite avesse unicà, allora tutta la succ. $u_n(t)$ converge all' unica sol. del pbn.

limite (lemma della sotto-sotto)

CONDIZIONI ALLA OSGOOD

$$\ddot{u} = u \quad \leadsto \text{esistenza globale}$$

$$\ddot{u} = u^2 \quad \leadsto \text{blow up}$$

$$\ddot{u} = u^p \quad p > 1 \quad \leadsto \text{blow up}$$

} per dati $u(0) > 0$

Cosa succede tra u e u^p con $p > 1$?

$\ddot{u} = f(u)$ c'è esistenza globale se e solo se

$$\int \frac{1}{f(u)} du \quad \text{con pbn. all' } \infty \text{ diverge}$$

Più in generale

$$\ddot{u} = f(t, u)$$

Per avere esistenza globale basta

$$\|f(t, u)\| \leq A(t) + B(t) \|u\|$$

$$\leq A(t) + B(t) f(u)$$

↑ Osgood

Per quanto riguarda l'unicità vale un discorso analogo

$$\ddot{u} = u \leadsto \text{unicità}$$

$$\ddot{u} = |u|^{2/3} \leadsto \text{non unicITÀ}$$

$$\ddot{u} = |u|^p \quad p < 1 \leadsto \text{non unicITÀ}$$

$$\ddot{u} = f(u) \quad \text{si ha unicITÀ se}$$

$$\int \frac{1}{f(u)} du \quad \text{con pbm. a 0 diverge}$$

Più in generale, se abbiamo $\ddot{u} = f(t, u)$ si ha unicITÀ (cond. suff.) se

$$\|f(t, u_2) - f(t, u_1)\| \leq \varphi(\|u_2 - u_1\|)$$

$\uparrow$ modulo di continuità

$$\text{e } \int_0^a \frac{1}{\varphi(x)} dx = +\infty$$

Dim. Uso la solita w e arrivo a

$$w'(t) \geq \varphi(w(t))$$

e questa, se punto diverso da 0, resta $\neq 0$ per i tempi successivi per non violare l'unicità.

— 0 — 0 —

N.B. I problemi $\ddot{u} = \varphi(u)$ si risolvono "quasi" esplicitamente, dividendo per $\varphi(u)$ e separando le variabili.

— 0 — 0 —