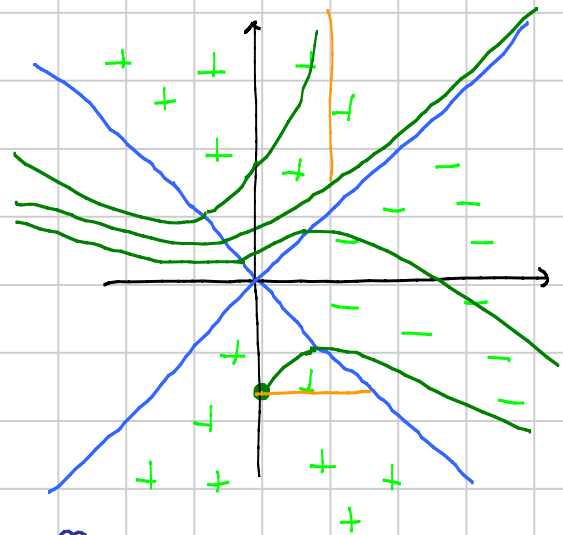


Esempio 1 $\begin{cases} \ddot{u} = u^2 - t^2 \\ u(0) = \alpha \end{cases}$

Saltiamo i convenevoli

Caso $\alpha < 0, t \geq 0$



Esistenza globale e $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = -\infty$

È evidente che la sd. tocca la retta $u = -t$. Il contatto avviene in T e poi

$$-t \leq u(t) \leq t \quad \forall t \geq T$$

$\ddot{w}(t) \qquad \qquad \ddot{v}(t)$

w è sottosol.: $\ddot{w} \leq w^2 - t^2$

$-1 \qquad 0 \qquad \text{☺}$

v è soprased.: $\ddot{v} \geq v^2 - t^2$

$1 \geq 0$

Se per assurdo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = l \in \mathbb{R}$$

avremmo $\ddot{u}(t) \rightarrow -\infty$ il che non va bene per te, assist.

Simmetria Se $u(t)$ è sol., allora anche $v(t) := -u(-t)$ è sol. (simmetria risp. origine)

$$\ddot{v}(t) = -\ddot{u}(-t)(-1) = \ddot{u}(-t) = u(-t)^2 - (-t)^2 = v(t)^2 - t^2$$

Caso $\alpha > 0, t \geq 0$ Ci sono 3 possibilità

- blow up $\alpha \in A$
- esistenza glob. con $u(t) \rightarrow +\infty$
- esistenza " " $u(t) \rightarrow -\infty$ $\alpha \in B$

L'insieme A è una semiretta ($\neq \emptyset$) e aperta

Facile: se $\alpha \in A$ e $\hat{\alpha} > \alpha \leadsto \hat{\alpha} \in A$.

Medio: $A \neq \emptyset$. Si può fare in 2 modi

1° modo: via confronto

Nella zona $[0, 1] \times [2, +\infty)$
esiste una costante c tale che

$$u^2 - t^2 \geq cu^2$$

$$u^2 - t^2 \underset{t \leq 1}{\geq} u^2 - 1 \underset{\text{posso prendere } c = \frac{1}{2}}{\geq} cu^2$$

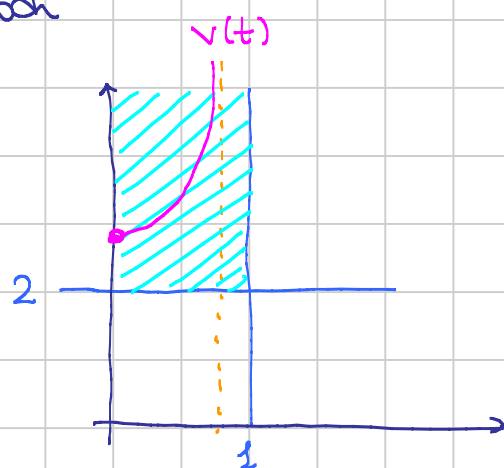
Osservo che le soluzioni di $\dot{v} = \frac{1}{2} v^2$ hanno blow up per $T \leq 1$ se partono abbastanza in alto.

Lo stesso vale per le $u(t)$ che partono sopra.

2° modo: spero di trovare una sottosol. che ha blow up

$$v(t) := \frac{A}{1-t} \quad \dot{v} \stackrel{?}{\leq} v^2 - t^2 \quad \text{per } t \leq 1$$

$$\frac{A}{(1-t)^2} \stackrel{?}{\leq} \frac{A^2}{(1-t)^2} - t^2 \quad ; \quad A \stackrel{?}{\leq} A^2 - t^2(1-t)^2$$



$$A^2 - A \geq t^2(1-t)^2 ; \quad t^2(1-t)^2 \leq 1 \leq A^2 - A$$

$\uparrow$
 $t \in [0,1]$ $\uparrow$ se prendo A grande

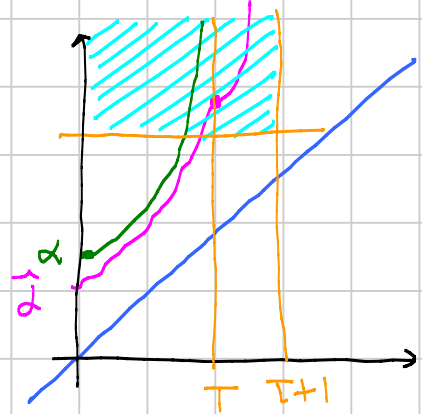
Resta da dim. che A è aperto, cioè se $\alpha \in A$ esiste $\hat{\alpha} \in A$ con $\hat{\alpha} < \alpha$.

Dimostro che partendo un po' a dx ho ancora blow up.

Come prima osservo che esiste $c > 0$ tale che

$$u^2 - t^2 \geq cu^2 \quad \forall t \in [0, T+1]$$

$$\forall u \geq T+2$$



A questo pto risolve

$$\dot{v} = cv^2$$

$$v(T) = A \text{ grande}$$

e osservo che per A grande la sol. ha blow up prima di $T+1$.

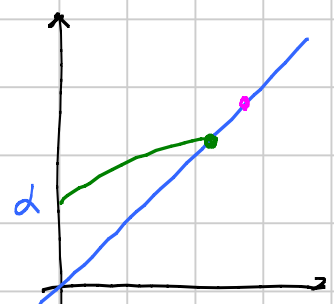
Tornando indietro trovo $\hat{\alpha} < \alpha$.

Volevo potersi usare una soprasoluz.:

$$v(t) = \frac{A}{T+12-t} \quad (\text{fare verifica per } A \text{ grande})$$

Verifichiamo che $\mathcal{Q}$ insieme B è un intervallo aperto a dx e $\neq \emptyset$

- $\neq \emptyset$: basta partire sulla bisettrice (osservo che andando indietro non ritocca la bisettrice che è SOPRASOL)



- Intervallo : se $\alpha \in B$, allora quelli $< \alpha$ stanno in B pure

- Aperto ad x : se $\alpha \in B$, allora esiste $\hat{\alpha} > \alpha$ t.c. $\hat{\alpha} \in B$
(basta partire sulla bisettrice + avanti)

Quindi per connessione $\exists \alpha_0 > 0$ t.c. $\alpha_0 \notin A$ e $\alpha_0 \notin B$.
La solut. con dato α_0 è crescente ($u(t) \geq t$), tende a $+\infty$ e non ha blow up.

Unicità della soglia Siano u e v due sol. crescenti che esistono glob.

Pongo $w(t) := u(t) - v(t)$ (wlog assumo $u(t) \geq v(t)$)

Allora $\dot{w}(t) = \dot{u}(t) - \dot{v}(t)$

$$= u(t)^2 - v(t)^2$$

$$= (u(t) + v(t))(u(t) - v(t))$$

$$\geq w(t)^2$$

Se $w(0) > 0$, allora per confronto $w(t)$ avrebbe BU in tempo finito, il che non è possibile.

Comp. asintotico Sia $u(t)$ la sol. con. alla soglia.
Allora

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) - t = 0$$

Poniamo $v(t) := u(t) - t$ e vediamo cosa risolve

$$v'(t) = u'(t) - 1 = u(t)^2 - t^2 - 1 = (v(t) + t)^2 - 1 - t^2$$

$$= v(t)^2 + 2tv(t) - 1$$

Quindi vorrei studiare

$$\dot{v} = v^2 + 2tv - 1$$

$$v^2 + 2tv - 1 = 0$$

$$v = -t \pm \sqrt{t^2 + 1}$$

Le sol. con dato > 0 possono

- avere blow up $\leadsto$ come le relative u
- diventare negative ed andare a $-\infty$
 $\leadsto$ come le u che toccavano ed andavano a $-\infty$
- l'unica altra possibilità è che $v(t) \rightarrow 0$ rimanendo sempre positiva.

Abbiamo anche una stima di come tende a 0

$$0 \leq v(t) \leq -t + \sqrt{t^2 + 1} = \frac{1}{t + \sqrt{t^2 + 1}}$$

Esercizio

Capire come tendono a $-\infty$ le soluzioni che stanno tra le bisettrici.
(Cong. $u(t) \sim -t$).

