

Teorema dell'asintoto

Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $u: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 .

Supponiamo che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = l \in \mathbb{R} \quad (\text{asintoto orizz.})$$

Allora

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} u'(t) \leq 0 \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} u'(t)$$

Oss. Possiamo riformulare la tesi dicendo che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u'(t) = \begin{cases} \nearrow \text{N.E.} \\ \searrow 0 \end{cases}$$

Oss. Può succedere che N.E. [esempio $u(t) = \frac{\sin(t^{20})}{t}$]

Dim. Applico Lagrange in $[n, n+1]$

$$\underbrace{u(n+1)}_{\downarrow l} - \underbrace{u(n)}_{\downarrow l} = u'(c_n) \quad n < c_n < n+1$$

$\downarrow$
 $+\infty$

$\Rightarrow u'(c_n) \rightarrow 0 \Rightarrow$ si conclude visto che $\liminf = \min$ e $\limsup = \max$

— 0 — 0 —

STUDIO QUALITATIVO

Capire come sono fatte le sol. di un pbm. di Cauchy senza risolverlo.

Esempio 1

$$\ddot{u} = \arctan u \quad u(0) = \pi$$

Passo 1

Esistenza locale e unicità: gratis perché $f(t, u)$ è (loc.) dip. in u .

Passo 2

Esistenza globale: $|f(t, u)| \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ glob. dim.

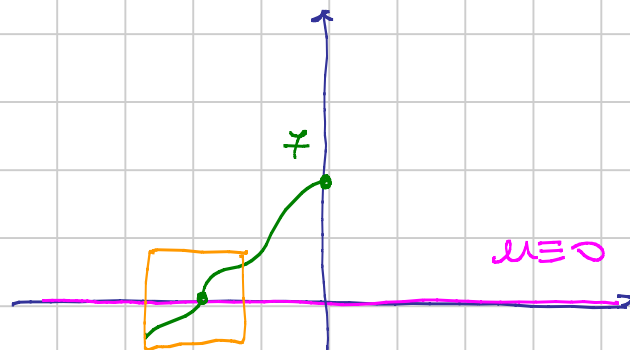
$\Rightarrow$ esistenza globale per teorema precedente.

Passo 3

$u(t) > 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Osservo che $u(t) \equiv 0$ è sol. dell'eq. (banale sostituzione)
Le soluzioni diventano barriere invalicabili.

Se $u(t)$ diventasse ≤ 0 , da qualche parte avrei $u(\tau) = 0$.
Ma questo produrrebbe una violazione di unicità.



Passo 4

u è strett. crescente in $\mathbb{R}$

$$u'(t) = \arctan(u(t)) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$\uparrow$ so che $\dot{u} > 0$

Passo 5

Essendo monotona, sappiamo che ammette limiti per $t \rightarrow -\infty$ e per $t \rightarrow +\infty$.
Chi sono questi limiti

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = l \in \mathbb{R}$$

Per l'equazione

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} u'(t) = \arctan l$$

denunque esiste, ma allora per il teo. asintoto deve essere 0, quindi

$$\arctan l = 0 \quad \leadsto \quad l = 0.$$

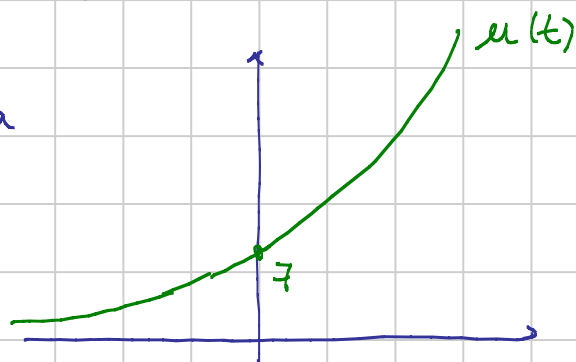
Per il limite per $t \rightarrow +\infty$, supponiamo per assurdo che sia $l \in \mathbb{R}$. Allora posso applicare il teo. asintoto e dedurre come prima che

$$\arctan l = 0 \quad \text{quindi} \quad l = 0$$

ma questo è assurdo in quanto $l \geq 7$.

Passo 6 Dico che $u(t)$ è convessa

1° modo $u'(t) = \arctan u(t)$
è crescente



2° modo Calcolo

$$\begin{aligned} u''(t) &= [\arctan u(t)]' = \frac{1}{1+u(t)^2} u'(t) \\ &= \frac{\arctan u(t)}{1+u(t)^2} > 0 \end{aligned}$$

Passo 7 $u \in C^\infty(\mathbb{R})$

Bootstrap !!

Passo 8 Dimostriamo che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(t)}{t} = \frac{\pi}{2}$$

Basta fare De L'Hôpital e diventa

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u'(t)}{1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan u(t) = \frac{\pi}{2}$$

$+\infty$

Passo 9 Ci sarà l'asintoto obliquo? Servirebbe

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \underbrace{u(t) - \frac{\pi}{2} t}_{v(t)}$$

Cosa risolve $v(t)$?

$$\dot{v}(t) = \dot{u}(t) - \frac{\pi}{2} = \arctan u(t) - \frac{\pi}{2} = -\arctan \frac{1}{u(t)}$$

Brutalmente quindi

$$\dot{v}(t) = -\arctan \frac{1}{u(t)} \sim -\arctan \frac{1}{\frac{\pi}{2} t}$$

$$\leadsto v(t) \sim -\log t \rightarrow -\infty \text{ per } t \rightarrow +\infty$$

Rigorosamente basta dim. che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\dot{v}(t)}{\frac{1}{t}} = \text{costante} \neq 0$$

e per questo basta molt. sopra e sotto per $\frac{1}{u(t)}$ e ridursi al passo precedente. [Più dettagli a voce]

Passo 10] Come tende a 0 per $t \rightarrow -\infty$.
Esponeurialmente!

Solo brutal mode: è come fosse $u \sim u$
e quindi mi aspetto $u \sim ce^t$
↑
buona quando $u \sim 0$

[Rigoroso forse in futuro].
— o — o —

Esempio 1 bis $\ddot{u} = +\arctan u$ $u(0) = -7$

Idea: se $u(t)$ è soluzione,
allora anche $-u(t)$ è solus.



Pongo $v(t) := -u(t)$ e faccio il conto

$$v'(t) = -u'(t) = -\arctan u(t) = \arctan(-u(t)) = \arctan v(t)$$

Esempio 1 ter $\ddot{u} = -\arctan u$ $u(0) = 7$

Considero $v(t) := u(-t)$

Se $u(t)$ risolve ①, allora $v(t)$
risolve ① ter



$$v'(t) = -u'(-t) = -(-\arctan u(-t)) = \arctan v(t).$$

— o — o —

Esempio 2

$$u' = \cos u$$

$$u(0) = 4$$

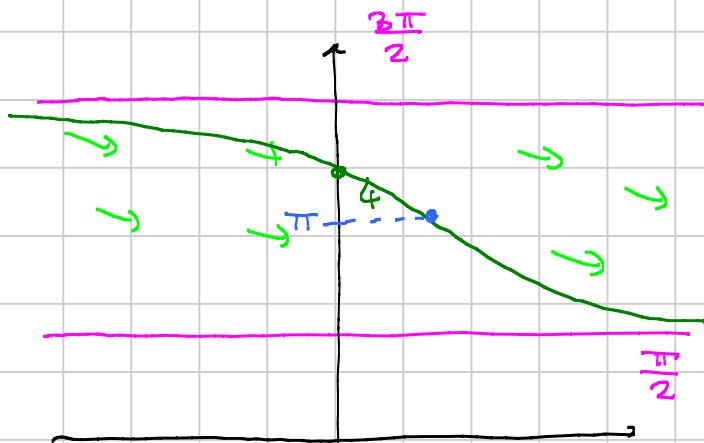
Passo 1 Esistenza GLOBALE e UNICITÀ: no problem

Passo 2 $u(t) \equiv \frac{\pi}{2}$ e $u(t) \equiv \frac{3\pi}{2}$ sono soluzioni

Quindi

$$\frac{\pi}{2} < u(t) < \frac{3\pi}{2} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Altrimenti avrei violazione
di unicità.



Passo 3 $u(t)$ è monotona decrescente in $\mathbb{R}$

$$u'(t) = \cos(u(t)) < 0 \quad \text{poiché} \quad u(t) \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

Passo 4 $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \frac{\pi}{2}$ $\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = \frac{3\pi}{2}$

Esistono per monotonia e sono reali. (diciamo l)

Esiste il lim. della derivata ed è $\cos l$

Per il tes. aiutato restano poche possibilità.

Passo 5 Studio derivata seconda

$$\begin{aligned} u''(t) &= [\cos u(t)]' = -\sin u(t) \cdot u'(t) \\ &= -\sin u(t) \cdot \cos u(t) \end{aligned}$$

Quindi $u''(t) = 0$ quando $u(t) = \pi$.

Passo 6 Al variare del dato iniziale, le soluzioni sono come in figura

