

[File originale audato perduto: questa è una copia riscritta dal video]

Dimostrazione di Peano via approssimazione

$$\ddot{u} = f(t, u) \quad \rightsquigarrow \quad \ddot{u}_n = f_n(t, u_n)$$

$\uparrow$ solo continua $\uparrow$ Lip.

Dimostrazione di Peano alla Tonelli (problemi con ritardo)

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} \ddot{u}_n(t) = f(t, u_n(t - \frac{1}{n})) \\ u(t) = u_0 \end{cases} \quad \forall t \leq t_0$$

$\uparrow$ ritardo
 basterebbe
 $\forall t \in [t_0 - \frac{1}{n}, t_0]$

Dim Setting come sempre $f: \underbrace{[t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \times \bar{B}_{r_0}(u_0)}_R \rightarrow \mathbb{R}^k$

$$M := \max \{ |f(t, u)| : (t, u) \in R \}$$

Scegliamo $\delta > 0$ tale che

$$\delta \leq \delta_0$$

$$\delta \leq \frac{r}{M}$$

Passo 1 Per ogni $n \in \mathbb{N}$ il problema con ritardo ammette una soluzione (unica) definita per ogni $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ e la sol. è una

$$u_n: [t_0, t_0 + \delta] \rightarrow \bar{B}_{r_0}(u_0)$$

La cosa si dimostra per induzione finita.

- Per $t \in [t_0, t_0 + \frac{1}{n}]$ devo risolvere

$$u_n(t) = f\left(t, u_n\left(\underbrace{t - \frac{1}{n}}_{\leq t_0}\right)\right) = f(t, u_0) \text{ costante!}$$

$\leadsto$ trovo $u_n(t)$ per $t \in$ questo interv.

- Per $t \in [t_0 + \frac{1}{n}, t_0 + \frac{2}{n}]$ devo risolvere

$$u_n(t) = f\left(t, u_n\left(\underbrace{t - \frac{1}{n}}_{\in [t_0, t_0 + \frac{1}{n}]}\right)\right) \leadsto u_n(t) \text{ è nota e conoscendo } u_n\left(t_0 + \frac{1}{n}\right) \text{ posso proseguire fino a } t_0 + \frac{2}{n}$$

- e così via ...

L'unica verifica è che $u_n(t) \in \overline{B}_{r_0}(u_0)$, ma questo segue dalla form. integrale

$$|u_n(t) - u_0| \leq \int_{t_0}^t \underbrace{|f(s, u_n(s - \frac{1}{n}))|}_{\leq M} ds \leq M(t - t_0) \leq r_0 \leq \delta$$

Passo 2 Le $\{u_n(t)\}$ verificano le ipotesi di A.A.

- La cpt. a t fisso segue da $u_n(t) \in \overline{B}_{r_0}(u_0)$
- L'equicontinuità segue dalla equilip., in quanto

$$|u_n(t)| = |f(t, u_n(t - \frac{1}{n}))| \leq M$$

$\leadsto$ u_n sono Lip. con costante M .

Passo 3 A meno di s.succ. (che non rinoviamo) $u_n \rightarrow u_\infty$ unif. in $[t_0, t_0 + \delta]$.

Dico che u_0 risolve l'eq. vera senza ritardo.

Passo al limite nella formulazione integrale

$$u_n(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_n(s - \frac{1}{n})) ds$$

[typo nel video]

↓ ↓ ↓ (?)

$$u_\infty(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_\infty(s)) ds$$

↑ [typo nel video]

Per il passaggio (?) serve un lemma del tipo:

se $u_n(t) \rightarrow u_\infty(t)$ unif., allora $u_n(t - \frac{1}{n}) \rightarrow u_\infty(t)$ unif.

(supponendo di aver esteso le funzioni ponendole u_0 per $t \leq t_0$)

$$|u_n(t) - u_n(t - \frac{1}{n})| \leq |u_\infty(t) - u_\infty(t - \frac{1}{n})| + |u_\infty(t - \frac{1}{n}) - u_n(t - \frac{1}{n})|$$

La 1^a è piccola per n grande per unif. cont. di u_∞

La 2^a " " " " " per conv. unif.

— o — o —

Finestra sul futuro

Il problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{u} = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$

ha perfettamente senso in spazi di Hilbert.

→ Il caso di f lip. si dimostra allo stesso modo.

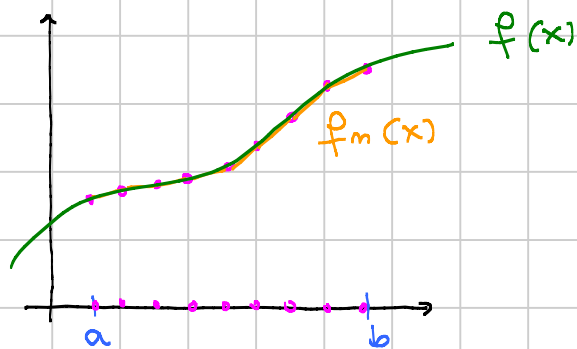
L'unico piccolo pbm. è definire l'integrale, e si fa alla Riemann.

→ Il caso f continua è FALSO in dim. infinita.

Come approx. funzioni continue con funzioni lip.

1ª strategia (funzioni in $\mathbb{R}$) : unisco i punti

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Dato $n \geq 1$, divido $[a, b]$ in n parti uguali, e considero la funzione f_n affine a tratti che interpola i valori nei p.ti della suddivisione



→ [typo nel video]

Allora le f_n sono lip. e $f_n \rightarrow f$ unif. in $[a, b]$

Dim: esercizio. Prendo $\varepsilon > 0$, scelgo $\delta > 0$ che corrisponde a $\frac{1}{2}\varepsilon$ nell'unif. cont. di $f(x)$. Scelgo n_0 in modo tale che $\frac{b-a}{n_0} \leq \delta$ e dovrebbe funzionare per ogni $n \geq n_0$.

2ª strategia (funzioni in $\mathbb{R}^k$, una per ora la descrivo in $\mathbb{R}$)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. La estendo a tutto $\mathbb{R}$ ponendo $f(x) = f(a)$ per $x \leq a$ e $f(x) = f(b)$ per $x \geq b$.

Per ogni $n \geq 1$ pongo

$$f_n(x) := n \int_x^{x + \frac{1}{n}} f(t) dt$$

↑
è come dividere per $\frac{1}{n}$

= media integrale di f tra x e $x + \frac{1}{n}$.

Dico che $f_n \rightarrow f$ unif. in $[a, b]$ e inoltre
 $\max f_n \leq \max f$ e $\min f_n \geq \min f$

Dim. L'osservazione fondamentale è che

$$f(x) = n \int_x^{x+\frac{1}{n}} \underbrace{f(x)}_{\text{costante}} dt$$

da cui

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= \left| n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(x) dt - n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t) dt \right| \\ &\leq n \int_x^{x+\frac{1}{n}} |f(x) - f(t)| dt \end{aligned}$$

Dato $\varepsilon > 0$, scelgo il $\delta > 0$ corrispondente nell'unif. cont., prendo n tale che $\frac{1}{n\delta} \leq \delta$ e mi ritrovo che nel RHS

$$|f(x) - f(t)| \leq \varepsilon \quad \text{perché } x \text{ e } t \text{ distano meno di } \frac{1}{n}, \text{ cioè meno di } \delta$$

$$\text{da cui } |f(x) - f_n(x)| \leq n \int_x^{x+\frac{1}{n}} \varepsilon dt = n \cdot \frac{1}{n} \varepsilon = \varepsilon.$$

Questo dimostra che $f_n \rightarrow f$ unif. su $[a, b]$.

Resta da dim. che le f_n sono Lip.

Per analisi 1 le $f_n(x)$ sono derivabili e la loro derivata è

$$f_n'(x) = n f\left(x + \frac{1}{n}\right) - n f(x)$$

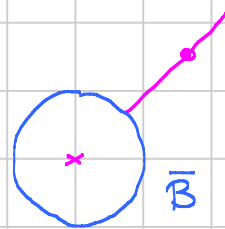
e questa è limitata essendo f limitata.

Occhio! La limitazione sulla costante di Lip. dipende (per forza!) da n .

Lo stesso discorso si può generalizzare ad $\mathbb{R}^k$.

Data una f continua (ad esempio su una palla $\bar{B}$)
la estendo in qualche modo a tutto $\mathbb{R}^k$ (ad esempio ponendola costante su opportune semirette)

Poi definisco



$$f_n(x) := \frac{1}{\text{meas}(B_{\frac{1}{n}}(x))} \int_{B_{\frac{1}{n}}(x)} f(t) dt$$

= media di f sulla palla con centro x e raggio $\frac{1}{n}$.

Lo stesso argomento di sopra mostra che $f_n \rightarrow f$ unif. in $\bar{B}$.

L'idea chiave è che

$$f(x) = \frac{1}{\text{meas}(B_{\frac{1}{n}}(x))} \int_{B_{\frac{1}{n}}(x)} f(x) dt$$

$\uparrow \uparrow$

Oss. Lo stesso vale per le funzioni $f(t, u)$
(se voglio dip. nell'ultima variabile, integro solo rispetto a quella).