

Parte di esistenza del teorema di esistenza e unicità $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$ aperto $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ continua $(t_0, u_0) \in \Omega$ $\uparrow$ k variabili

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

$$\exists L \in \mathbb{R} \quad \forall (t, u_1) \in \Omega \quad \forall (t, u_2) \in \Omega$$

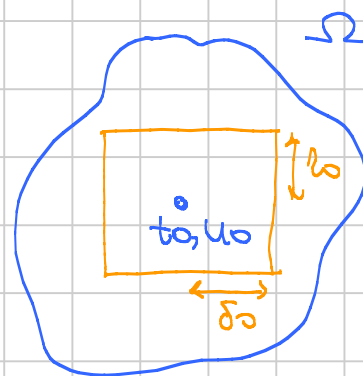
$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq L |u_1 - u_2|$$

Quattro dimostrazioni:

- Cauchy - lipschitz classica (via contrazioni)
- " " con norme pesate
- Iteratale di Picard
- Iterata n -esima dell'operatore di Volterra

Consideriamo un rettangolo

$$R = [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \times [u_0 - \eta_0, u_0 + \eta_0] \\ \subseteq \Omega$$

più in generale $R = [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \times \overline{B}_{\eta_0}(u_0)$

Consideriamo infine

$$M := \max \{ |f(t, u)| : (t, u) \in R \}$$

$\nwarrow$ compatto

Formulazione integrale

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

Cerco di risolvere questa per $t \in [t_0, t_0 + \delta]$

$\uparrow$ da scegliere
(allo stesso modo si risolve in $t \in [t_0 - \delta, t_0]$)

Dimostrazione alla Cauchy - Lipschitz

Supponiamo che $\delta > 0$ verifichi 3 disuguaglianze:

$$\delta \leq \delta_0 \quad \delta \leq \frac{r_0}{M} \quad \delta < \frac{1}{L}$$

$\uparrow$ non scappa da $\mathbb{R}$

Allora esiste (almeno) una soluzione in $[t_0, t_0 + \delta]$.

Considero l'operatore di Volterra

$$[\Phi(u)](t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta]$$

e considero l'insieme

$$X_{\delta, r} := \{u: [t_0, t_0 + \delta] \rightarrow \overline{B}_{r_0}(u_0) \text{ continue}\}$$

Dico che

① $X_{\delta, r}$ è uno spazio metrico completo rispetto alla

$$d(u, v) := \sup \{|u(t) - v(t)| : t \in [t_0, t_0 + \delta]\}$$

② $\Phi : X_{\delta, r} \rightarrow X_{\delta, r}$

③ Φ è contrazione

A questo p.to Φ ha un p.to fisso (unico) u , e questa risolve la form. int. su $[t_0, t_0 + \delta]$.

① Fatta tante volte

② Mi serve che $\Phi(u) \in X_{\delta, \eta}$. La continuità è ovvia essendo un integrale. Serve solo dim. che

$$|[\Phi(u)](t) - u_0| \leq \eta \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta]$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} |[\Phi(u)](t) - u_0| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t \underbrace{|f(s, u(s))|}_{\leq M \text{ perché siamo in } R} ds \\ &\leq \int_{t_0}^t M ds \\ &= M(t - t_0) \leq M\delta \leq \eta \end{aligned}$$

$\uparrow$ scelta di δ

③ Dimostriamo che Φ è contrazione

$$\begin{aligned} |[\Phi(u)](t) - [\Phi(v)](t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| ds \\ &\leq L \int_{t_0}^t |u(s) - v(s)| ds \end{aligned}$$

$$\leq L \int_{t_0}^t \text{dist}(u, v) ds$$

$$\leq L \text{dist}(u, v) \delta \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta]$$

Facendo il sup del LHS per $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ ottengo

$$\text{dist}(\Phi(u), \Phi(v)) \leq \boxed{L\delta} d(u, v)$$

" $L' < 1$ per ipotesi su δ

e quindi Φ è una contrazione in $X_{\delta, L}$.

— o — o —

Oss. (su cui torneremo) Non pensare nemmeno di aver dimostrato l'unicità. Potrebbero esserci soluzioni che non stanno in $X_{\delta, L}$.

— o — o —

Dimostrazione con norme pesate

Supponiamo che δ verifichi $\delta > 0$ e

$$\boxed{\delta \leq \delta_0}$$

$$\boxed{\delta \leq \frac{\delta_0}{M}}$$

e basta

Allora esiste una soluzione in $[t_0, t_0 + \delta]$. (meno ipotesi, stessa tesi)

Consideriamo lo spazio $X_{\delta, L, 1}$ che è lo stesso insieme di prima, ma distanta

$$\text{dist}_1(u, v) := \sup \{ |u(t) - v(t)| e^{-\lambda t} : t \in [t_0, t_0 + \delta] \}$$

↑
peso nella norma

Claim

- ① $X_{\delta, \lambda, \Lambda}$ è metrico completo per ogni $\Lambda \in \mathbb{R}$
- ② $\Phi : X_{\delta, \lambda, \Lambda} \rightarrow X_{\delta, \lambda, \Lambda}$ per ogni $\Lambda \in \mathbb{R}$
- ③ Se $\Lambda > L$, allora Φ è una contrazione 😊

Dimostriamo i claim

- ① Facile esercizio (basta che il peso sia positivo)
- ② Non c'è nulla da dimostrare
- ③ Come prima

$$\begin{aligned} |[\Phi(u)](t) - [\Phi(v)](t)| &\leq L \int_{t_0}^t |u(s) - v(s)| ds \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{come prima} \\ &\leq L \int_{t_0}^t \text{dist}_{\Lambda}(u, v) e^{\Lambda s} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= L \text{dist}_{\Lambda}(u, v) \frac{1}{\Lambda} (e^{\Lambda t} - e^{\Lambda t_0}) \\ &\leq \frac{L}{\Lambda} \text{dist}_{\Lambda}(u, v) e^{\Lambda t} \end{aligned}$$

Ora porto $e^{\Lambda t}$ al LHS e faccio il sup per $t \in [t_0, t_0 + \delta]$.
Ottengo

$$\text{dist}_{\Lambda}(\Phi(u), \Phi(v)) \leq \frac{L}{\Lambda} \text{dist}_{\Lambda}(u, v)$$

Se $\Lambda > L$ abbiamo una contrazione.

Esercizio sulle norme pesate

Sia S un insieme, sia (X, d) un metrico completo, sia $\text{Bounded}(S, X)$

l'insieme delle funzioni $u: S \rightarrow X$ limitate.

Sia $\varphi: S \rightarrow (0, +\infty)$ (strett. pos.) e limitata, e sia

$$\text{dist}_\varphi(u, v) := \sup \{ d(u(s), v(s)) \underbrace{\varphi(s)}_{\text{peso}} : s \in S \}$$

Allora $\text{Bounded}(S, X)$ è un metrico completo rispetto a $\text{dist}_\varphi(u, v)$.

Dim. Che si tratti di una distanza è quasi ovvio.
(c'è a voce nel video)

Si tratta ora di mostrare la completezza.

Sia $\{u_n\}$ una succ. di Cauchy in $\text{Bounded}(S, X)$.

Per ogni $s \in S$ vale che

$$d(u_n(s), u_m(s)) \varphi(s) \leq \text{dist}_\varphi(u_n, u_m)$$

e quindi

$$d(u_n(s), u_m(s)) \leq \frac{1}{\varphi(s)} \text{dist}_\varphi(u_n, u_m)$$

Essendo $\{u_n\}$ di Cauchy deduciamo che $\{u_n(s)\}$ è di Cauchy in X , quindi converge ad un certo $u_\infty(s)$.

Abbiamo così dim. che $u_n(s) \rightarrow u_\infty(s)$ puntualmente

Resta da dimostrare la convergenza rispetto a dist_φ .

- Mi viene dato $\varepsilon > 0$

- Prendo $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\text{dist}_\varphi(\mu_n, \mu_m) \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$

- Deduco come sopra che

$$d(\mu_n(s), \mu_m(s)) \cdot \varphi(s) \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall m \geq n_0 \\ \forall s \in S$$

- Passo al limite per $m \rightarrow \infty$ e ottengo

$$d(\mu_n(s), \mu_\infty(s)) \cdot \varphi(s) \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall s \in S$$

- Faccio il sup al variare di s in S e ottengo

$$\text{dist}_\varphi(\mu_n, \mu_\infty) \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

che è quello che volevo.

— o — o —

Oss. All'interno della dim 2 la convergenza in $X_{S,1,1}$ è equivalente alla conv. unif. classica visto che il peso è limitato dal basso e dall'alto.