

PRODOTTO DI CAUCHY DI SERIE

Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ due serie.

Si dice prodotto di Cauchy delle due serie la

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

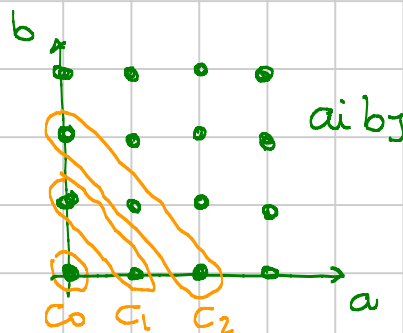
dove

$$c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

Brutalmente: $(a_0 + a_1 + a_2 + \dots)(b_0 + b_1 + b_2 + \dots)$

$$= \underbrace{a_0 b_0}_{c_0} + \underbrace{a_0 b_1 + a_1 b_0}_{c_1} + \underbrace{a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0}_{c_2} + \dots$$

Domanda: se le prime due serie conv., converge pure la terza, magari al prodotto delle prime 2?



Risposta: NO, cioè in generale NO, ma SI se almeno una delle 2 iniziali converge assolutamente.

Esempio

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}}_{a_n} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}}_{b_n}$$

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} \sqrt{n-k+1}}}_{n+1 \text{ addendi}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{k+1} \sqrt{n-k+1}} \geq \frac{2}{(n+2)} \quad \frac{1}{\sqrt{AB}} \geq \frac{2}{(A+B)} \quad \Rightarrow |c_n| \geq 1$$

$$(A+B)^2 \geq 4AB \Rightarrow A+B \geq 2\sqrt{AB} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{AB}} \geq \frac{2}{A+B}$$

$$A = k+1, B = n-k+1$$

Teorema Supponiamo che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converga assolutamente e che $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converga. Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right)$$

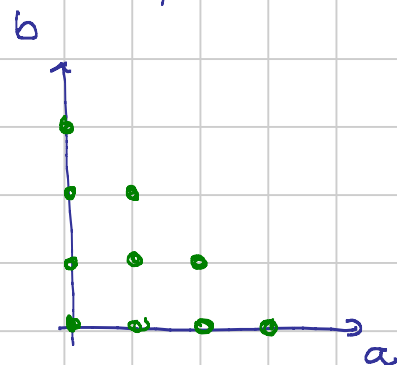
Dim. Considero le somme parziali della serie prodotto

$$\sum_{k=0}^n c_k = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0$$

$$= \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k$$

$$= \sum_{k=0}^n a_{n-k} (b_k - b_{\infty}) + \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_{\infty}$$

$$= \sum_{k=0}^n \underbrace{a_{n-k}}_{\substack{\uparrow \\ \text{piccolo se} \\ k \text{ è piccolo e} \\ n \text{ è grande}}} \underbrace{(b_k - b_{\infty})}_{\substack{\text{piccolo per} \\ k \text{ grande}}} + \underbrace{b_{\infty} a_n}_{\substack{\downarrow \\ b_{\infty} a_{\infty}}}$$



$$A_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

$$B_n = b_0 + b_1 + \dots + b_n$$

Più formalmente.

• Fisso $\hat{A} := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$
finito per ipotesi

$\hat{B} := \sup\{|B_n| : n \geq 1\}$
finito perché $B_n \rightarrow B_{\infty}$

• Mi viene dato $\varepsilon > 0$

• Scelgo $m_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{n \geq m_0} |a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2(\hat{B}+1)}$$

$\uparrow$ paura che sia $\hat{B}=0$

• Scelgo $l_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|B_n - B_\infty| \leq \frac{\varepsilon}{2(\hat{A}+1)} \quad \forall n \geq l_0$$

• Pongo $m_0 := m_0 + l_0$ e dico che per $n \geq m_0$ la sommatoria che mi interessa è $\leq \varepsilon$.
Infatti

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n a_{n-k} (B_k - B_\infty) \right| &\leq \sum_{k=0}^n |a_{n-k}| \cdot |B_k - B_\infty| \\ &= \sum_{k=0}^{l_0} |a_{n-k}| \cdot |B_k - B_\infty| + \sum_{k=l_0+1}^n |a_{n-k}| \cdot |B_k - B_\infty| \end{aligned}$$

Per ipotesi la 2ª è

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{k=l_0+1}^n |a_{n-k}| \cdot \frac{\varepsilon}{2(\hat{A}+1)} = \frac{\varepsilon}{2(\hat{A}+1)} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \\ &= \frac{\varepsilon \hat{A}}{2(\hat{A}+1)} \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Per ipotesi la 1ª è

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{k=0}^{l_0} |a_{n-k}| \underbrace{\frac{\hat{B}}{2}}_{|B_k - B_\infty| \leq \frac{\hat{B}}{2}} \leq \frac{\hat{B}}{2} \sum_{\substack{k \geq n-l_0 \\ \geq m_0}} |a_k| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(2\hat{B}+1)} \cdot \hat{B} \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Teorema Il prodotto di funzioni analitiche è analitico, all'interno di una zona di analiticità comune

Lemma (Derivata del prodotto)

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

Dim. Stessa evoluzione del binomio di Newton.

Dim. teorema Prendiamo $x_0 \in$ zona di analiticità ed $\epsilon > 0$ tale che

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \quad \forall x \in (x_0-\epsilon, x_0+\epsilon)$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \quad \text{---}$$

Pongo $\varphi(x) := f(x) \cdot g(x)$ e dico che $\varphi(x) = \text{prod. serie}$

Piché le serie convergono assolutamente, deduciamo

$$\varphi(x) = \text{prodotto serie}$$

$$= \text{serie prodotto alla Cauchy}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \frac{g^{(n-k)}(x_0)}{(n-k)!} (x-x_0)^k (x-x_0)^{n-k} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x-x_0)^n \underbrace{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0)}_{\varphi^{(n)}(x_0)}$$

— 0 — 0 —

Oss. In modo "analogo" si farebbe la analiticità della composizione, ma serve la formula per la derivata n -esima

Esempio classico

$$\begin{aligned} e^x \cdot e^y &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \right) \\ &\stackrel{\text{prod. Cauchy}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^n = e^{x+y} \end{aligned}$$

Oss 1 Uno potrebbe definire l'esponenziale come somma della serie ed ottenere a posteriori la proprietà

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

Oss 2 Tutto questo si può fare sui complessi arrivando a

$$e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi}$$

↑
scrivendolo come serie e separando
parte reale / immaginaria viene

$$\cos b + i \sin b$$

— 0 — 0 —