

Convergenza puntuale $\Rightarrow$ conv. uniforme sotto ipotesi di monotonia

Teorema (Dini's theorem in mondo \{Pisa\})

Sia (X, d) metrico, sia $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ succ. di funz.

sia $f_\infty: X \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) $f_n \rightarrow f_\infty$ puntualmente in X

(ii) X compatto

(iii) f_n continua per ogni $n \in \mathbb{N}$

(iv) f_∞ continua

(v) per ogni $x \in X$ la succ. di numeri $\{f_n(x)\}$ è monotona debil.
(anche in verso diverso a seconda di x).

Allora

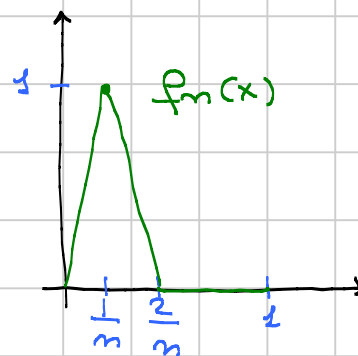
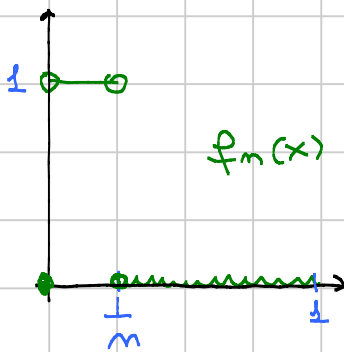
$f_n \rightarrow f_\infty$ unif. in X .

Oss. le ipotesi servono davvero

Senza (ii): $X := [0, 1)$, $f_n(x) = x^n$

Senza (iv): $X := [0, 1]$, $f_n(x) = x^n$, $f_\infty =$ suo lim. puntuale

Senza (iii): $X := [0, 1]$, $f_\infty(x) \equiv 0$, $f_n(x)$ come a sx



Senza (v): vedi esempio a dx. Si noti che in ogni punto x la succ. $\{f_n(x)\}$ è definitiv. monotona in n .
Il pbm. è che il definitiv. è x -dependent.

Dem. Occorre fare le scelte in ordine.

- Mi viene dato $\varepsilon > 0$
- Per ogni $x \in X$, trovo un indice $n_x \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|f_\infty(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{4} \varepsilon \quad \forall n \geq n_x \quad (\text{usato (i)})$$

- Trovo $\delta_x > 0$ t.c.

$$|f_\infty(y) - f_\infty(x)| \leq \frac{1}{4} \varepsilon \quad \forall y \in B_{\delta_x}(x) \quad (\text{iv})$$

- A meno di rimpicciolire δ_x accade anche che

$$|f_{n_x}(y) - f_{n_x}(x)| \leq \frac{1}{4} \varepsilon \quad \forall y \in B_{\delta_x}(x) \quad (\text{iii) con } n = n_x$$

Molto facilmente ottengo

$$|f_{n_x}(y) - f_\infty(y)| \leq \frac{3}{4} \varepsilon \quad \forall y \in B_{\delta_x}(x)$$

Dico che vale di più, e cioè che

$$|f_n(y) - f_\infty(y)| \leq \frac{3}{4} \varepsilon \quad \forall y \in B_{\delta_x}(x), \quad \forall n \geq n_x$$

Questo dall'ipotesi (v). Occorre distinguere 2 casi

→ se per un certo y la $\{f_n(y)\}$ è deb. cresc., allora

$$|f_n(y) - f_\infty(y)| = \underset{\substack{\uparrow \\ f_\infty(y) \geq f_n(y)}}{f_\infty(y) - f_n(y)} \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{monot.}}}{f_\infty(y) - f_{n_x}(y)} \leq \frac{3}{4} \varepsilon$$

→ se per un certo y la $\{f_n(y)\}$ è decr. allora

$$|f_n(y) - f_\infty(y)| = f_n(y) - f_\infty(y) \leq f_{n_x}(y) - f_\infty(y) \leq \frac{3}{4} \varepsilon.$$

Riassunto: abbiamo dimostrato che

$$\forall x \in X \quad \exists n_x \in \mathbb{N} \quad \exists \delta_x > 0 \quad \text{t.c.}$$

$$|f_n(y) - f_\infty(y)| \leq \varepsilon \quad \forall y \in B_{\delta_x}(x) \quad \forall n \geq n_x$$

Ora $\{B_{\delta_x}(x)\}_{x \in X}$ sono un ricoprimento aperto di X , dal quale posso estrarne un sottoricoprimento finito

$$X = B_{\delta_1}(x_1) \cup \dots \cup B_{\delta_k}(x_k)$$

Basta prendere $n_0 := \max\{n_{x_1}, \dots, n_{x_k}\}$ e abbiamo la tesi

$$|f_n(y) - f_\infty(y)| \leq \varepsilon \quad \forall y \in X \quad \forall n \geq n_0.$$

Teorema (succ. di funzioni monotone)
con estremi

Sia $f_n: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $f_\infty: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) $f_n \rightarrow f_\infty$ in $[a,b]$

(ii) f_∞ continua

(iii) per ogni $n \in \mathbb{N}$ la funzione f_n è monotona, anche in verso n -dependant.

Allora

$$f_n \rightarrow f_\infty \text{ unif. in } [a,b]$$

Oss. Serwe $[a,b]$ con estremi: solito in $[0,1]$

Serwe (ii) per il solito motivo

Non è vero in $[0, +\infty)$: $f_n(x) = \arctan(\frac{x}{n})$

Dim. In ordine.

- Mi viene dato $\varepsilon > 0$
- La f_∞ è unif. cont. in $[a, b]$, quindi prendo il δ corrispondente a $\frac{1}{4}\varepsilon$.
- Trovo una δ -rete in $[a, b]$, cioè dei p.ti $x_1, \dots, x_k$

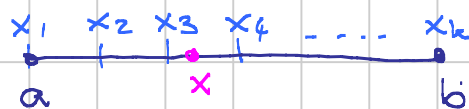
tale che ogni altro $x \in [a, b]$ dista $\leq \delta$ da uno di questi

- Per ogni $i = 1, \dots, k$ trovo n_i tale

$$|f_n(x_i) - f_\infty(x_i)| \leq \frac{1}{4}\varepsilon \quad \forall n \geq n_i$$

- Prendo $n_0 := \max\{n_1, \dots, n_k\}$ e spero vada bene, cioè

$$|f_n(x) - f_\infty(x)| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



Prendo $x \in [x_i, x_{i+1}]$ e prendo $n \geq n_0$. A seconda della monotonia di $f_n(x)$ metto in mezzo x_i oppure x_{i+1}

→ Supponiamo $f_n(x) \nearrow$

$$f_n(x) - f_\infty(x) \leq f_n(x_{i+1}) - f_\infty(x)$$

$$= \underbrace{f_n(x_{i+1}) - f_\infty(x_{i+1})}_{\leq \frac{1}{4}\varepsilon} + \underbrace{f_\infty(x_{i+1}) - f_\infty(x)}_{\leq \frac{1}{4}\varepsilon}$$

perché $n \geq n_{i+1}$

$$\leq \varepsilon$$

Analogamente

$$f_n(x) - f_\infty(x) \geq f_n(x_i) - f_\infty(x)$$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{f_n(x_i) - f_\infty(x_i)}_{\substack{\geq -\frac{1}{4}\varepsilon \\ (n \geq m_i)}} + \underbrace{f_\infty(x_i) - f_\infty(x)}_{\substack{\geq -\frac{1}{4}\varepsilon \\ \text{(U.C.)}}} \\ &\geq -\varepsilon \end{aligned}$$

Quindi $f_n(x) - f_\infty(x)$ è compreso tra $-\varepsilon$ ed ε .

→ Se per quel dato n si ha che $f_n(x) \searrow$, la disc. è la stessa invertendo il ruolo di i e $i+1$.
— o — o —

Oss. Nei due teoremi di monotonia, se non si assume che X o $[a,b]$ siano compatti, la tesi diventa $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. sui compatti.

Pensiamo come esempio a $f_n(x) = \arctan\left(\frac{x}{n}\right)$ su tutto $\mathbb{R}$

Qui valgono entrambi i teoremi e si ha conv. unif. sui cpt., ma non su tutto $\mathbb{R}$.

Il tipo di monotonia in n dipende da x !!

Oss. Nel teo 2, se f_n è $\nearrow$ per ∞ valori di n e $\searrow$ per ∞ valore di n , allora f_∞ è costante.
(esercizio)