

SUCCESIONI DI FUNZIONI

Sia S un insieme e Y uno spazio metrico.

Una successione di funzioni è del tipo

$$f_n: S \rightarrow Y.$$

Def. Si dice che

- f_n converge puntualmente ad $f_\infty: S \rightarrow Y$ se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f_\infty(x) \quad \forall x \in S$$

In simboli

$$\forall x \in S \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq m_0 \quad d_Y(f_n(x), f_\infty(x)) \leq \varepsilon$$

- f_n converge uniformemente ad $f_\infty: S \rightarrow Y$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_0 \in \mathbb{N} \quad \forall x \in S \quad \forall n \geq m_0 \quad d_Y(f_n(x), f_\infty(x)) \leq \varepsilon$$

Oss. fondamentale Conv. unif. $\Rightarrow$ conv. puntuale

Nella convergenza puntuale m_0 dipende da ε e da x , nella uniforme dipende solo da ε .

— o — o —

L'ESEMPIO $S := [0, 1]$, $Y := \mathbb{R}$ $f_n(x) = x^n$

Analisi 1 ci dice che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f_\infty(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

↑
limite
puntuale

(Quando calcolo un limite puntuale, x è un parametro)

Dico che $f_\infty(x)$ NON è limite uniforme su $[0, 1]$.

Se lo fosse, vorrebbe dire che $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|f_n(x) - f_\infty(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [0, 1], \text{ cioè}$$

$$f_\infty(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \leq f_\infty(x) + \varepsilon$$

cioè il grafico di $f_n(x)$ sta in una striscia di ampiezza ε intorno al grafico di $f_\infty(x)$, il che è palesemente falso.

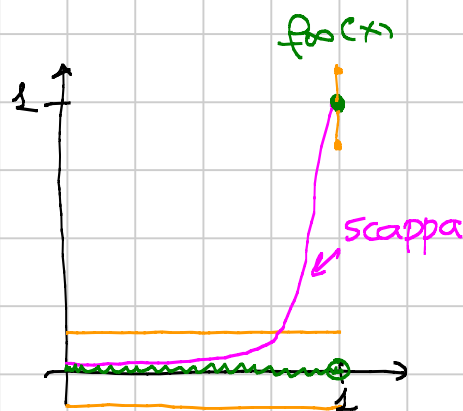
Piccola variante: $f_n \rightarrow f_\infty$ in $[0, \frac{99}{100}]$ uniformemente?

Sì perché basta dimostrare che

$$0 \leq f_n(x) \leq \varepsilon \quad \forall x \in [0, \frac{99}{100}]$$

per n abb. grande. Per monotonia basta controllare $\left(\frac{99}{100}\right)^n \leq \varepsilon$.

— o — o —



Brutta notizia 1: il limite puntuale di funzioni continue non è obbligato ad essere continuo

Achtung! Precisare sempre DOVE si ha o non si ha conv. unif. La stessa fm può conv. unif. a f_∞ in qualche insieme e non in qualche altro.

Interpretazioni diverse Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e siano $f_n: A \rightarrow \mathbb{R}$ e $f_\infty: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Allora $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. in A se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall x \in A$$

$$f_\infty(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \leq f_\infty(x) + \varepsilon$$

$f_n(x)$ sta nella striscia di ampiezza ε centrata in $f_\infty(x)$

cioè se e solo se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \{ |f_n(x) - f_\infty(x)| : x \in A \} = 0$$

Oss.

① La convergenza puntuale è un concetto locale e dipende solo da una nozione di convergenza, cioè posso definirla ogni qual volta ho deciso cosa vuol dire che $y_n \rightarrow y_\infty$ in arrivo.

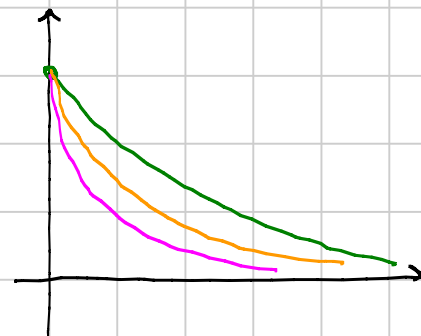
② La convergenza unif. è un concetto globale e metrico, cioè serve una distanza in arrivo per definirla.

— o — o —

Esempio 2 $f_n : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ $f_n(x) = e^{-nx}$

Idea

$$f_n(x) \rightarrow f_\infty(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x=0 \\ 0 & \text{se } x>0 \end{cases}$$



La convergenza è

- puntuale in $[0, +\infty)$
- NON uniforme in $[0, +\infty)$
- uniforme in $[a, +\infty)$ per ogni $a > 0$
- NON uniforme in $(0, +\infty)$

$$\sup \{ |f_n(x) - f_\infty(x)| : x \in (0, +\infty) \} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\sup \{ \quad \quad \quad : x \in [a, +\infty) \} = e^{-na} \rightarrow 0$$

Esempio 3 $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \arctan(nx)$$

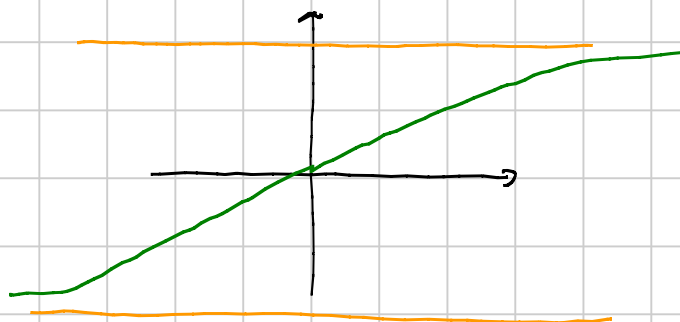
$$g_n(x) = \arctan\left(\frac{x}{n}\right)$$

$$f_n(x) \rightarrow f_\infty(x) := \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{\pi}{2} & x > 0 \end{cases}$$

- puntuale in $\mathbb{R}$
- NON uniforme in $\mathbb{R}$
- uniforme in $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$ per ogni $a > 0$.

$$g_n(x) \rightarrow g_\infty(x) \equiv 0$$

- puntuale in $\mathbb{R}$
- NON uniforme in $\mathbb{R}$
- uniforme sui compatti



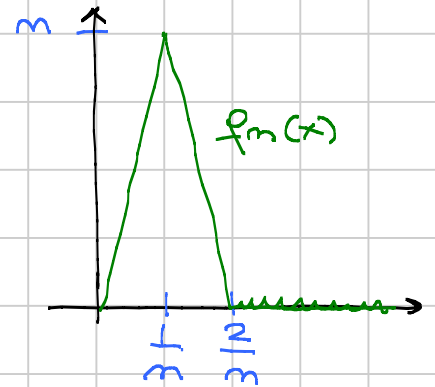
Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e siano $f_n: A \rightarrow \mathbb{R}$ e $f_\infty: A \rightarrow \mathbb{R}$.
Si dice che $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. sui compatti se

$$f_n \rightarrow f_\infty \text{ su } K \text{ per ogni } K \subseteq A \text{ compatto.}$$

Esempio 4 $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x) \rightarrow f_\infty(x) \equiv 0 \text{ puntualmente}$$

NON conv. unif. in $[0,1]$, ma
conv. unif. sui compatti di $(0,1]$



Brutta notizia 2 Nell'esempio precedente

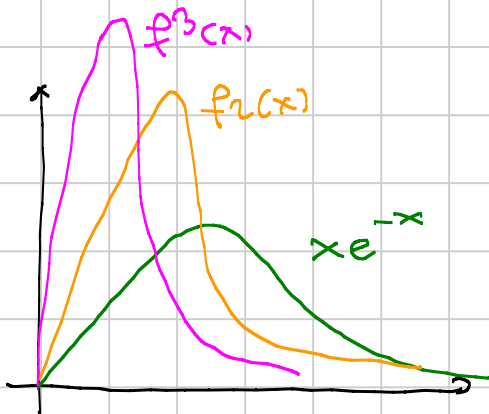
$$\int_0^1 f_n(x) dx = 1 \rightarrow 1$$

$$\int_0^1 f_\infty(x) dx = 0$$

L'integrale non passa al limite.

Esempio 5 $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$

Vedere che succede praticamente la stessa cosa



Esempio 6 $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$

$f_n(x) \rightarrow f_\infty(x) := |x|$ puntualmente in $[-1, 1]$

Brutta notizia 3: con il limite puntuale, se anche salviamo la continuità, possiamo perdere la derivabilità.

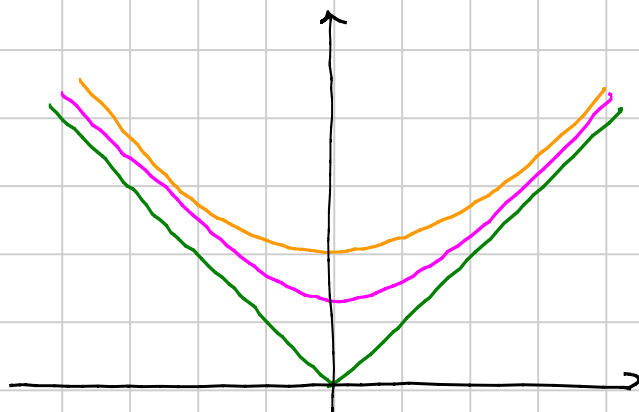
Sarà uniforme la convergenza? Sì, unif. in $[-1, 1]$.

$$\begin{aligned} f_n(x) - f_\infty(x) &= \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| && \text{("razionalizzato")} \\ &= \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} \end{aligned}$$

quindi $0 \leq f_n(x) - f_\infty(x) \leq \frac{1}{n} \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{😊}$

↑
metto $x=0$
al denom.

questo dim. che $\sup \{ |f_n(x) - f_\infty(x)| : x \in [-1, 1] \} \rightarrow 0$



La conv. è pure unif. su tutto $\mathbb{R}$.