

Teorema funzione inversa (Teo. invertibilità locale)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, sia $x_0 \in \Omega$, sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ^{stesso n}

Supponiamo che

(i) $f \in C^1$ in Ω ,

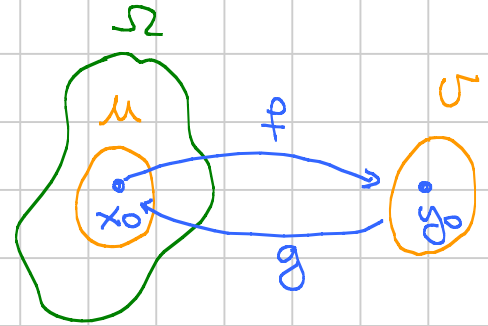
(ii) $Jf(x_0)$ invertibile (matrice $n \times n$).

Allora f è localmente invertibile, cioè esiste un intorno aperto U di x_0 e un intorno aperto V di $f(x_0) = y_0$, ed esiste

$$g: V \rightarrow U$$

tale che

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= x & \forall x \in U \\ f(g(y)) &= y & \forall y \in V. \end{aligned}$$



Inoltre g è di classe C^1 (anzi della stessa classe di regolarità di f) e vale

$$Jg(y) = [Jf(g(y))]^{-1} \quad \forall y \in V$$

Achtung!

① Ad analisi 1 se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe C^1 e $f'(x) \geq \frac{1}{2018}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora f è glob. inv., cioè esiste $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. ...

stretto

② Se invece assumo solo $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora $f(\mathbb{R}) = V$ aperto ed esiste $g: V \rightarrow \mathbb{R}$ tale che funziona come inversa

③ Ad Analisi 2 esiste $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $Jf(x)$ è invertibile per ogni $x \in \mathbb{R}^2$ e f non è nemmeno iniettiva
 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$$

L'iniettività globale non c'è $f(x, y + 2\pi) = f(x, y)$ e

$$Jf(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det Jf(x, y) = e^{2x} \neq 0$$

Si tratta di e^z vista $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Dim Parte semplice. Considero

$$\Phi: \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\Phi(x, y) = y - f(x) \quad (\text{funzione di } 2n \text{ variabili})$$

$$J\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} -Jf \\ \text{Id} \end{pmatrix}$$

$n \times n$
invertibile

$$\Phi(x_0, y_0) = 0$$

Per il teo. della funzione implicita esistono $\rho > 0$ ed ν ed esiste

$$g: B_\nu(y_0) \rightarrow B_\rho(x_0)$$

che "esplicita" la Φ , cioè tale che $\Phi(g(y), y) = 0$, cioè

$$y = f(g(y)) \quad \forall y \in B_\nu(y_0)$$

Parte delicata: definire U dopo aver posto $V := B_\nu(y_0)$ che posso prendere aperta.

La scelta naturale è $U := g(V)$ così automaticamente

g è l'inversa di $f: U \rightarrow V$.

Resta da dimostrare che U è aperto. Per questo ci sono due strade quasi equivalenti.

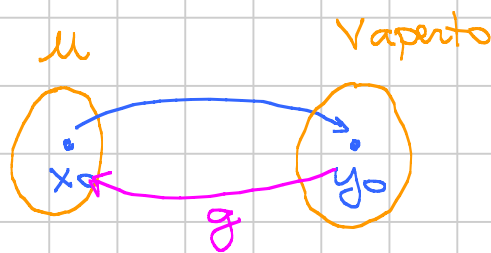
[1] Riapplicare il teorema al contrario:

in un verso abbiamo dim. che

$y_0 \in \text{Int}$ dell'immagine di f

Applicando il teo. con g trovo

che $x_0 \in \text{Int}$ dell'immagine di g .

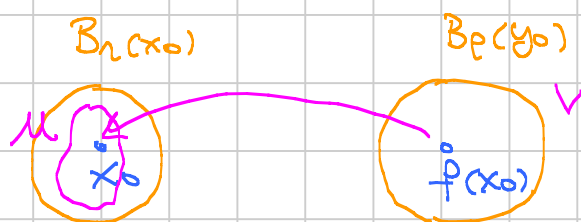


[2] Osservare che $g(V) = \underbrace{B_r(x_0)}_{\text{aperto se voglio}} \cap \underbrace{f^{-1}(B_\epsilon(y_0))}_{\text{aperto perché } f^{-1}(\text{aperto})}$

Qui sto usando che $\forall y \in B_\epsilon(y_0)$ esiste un unico $x \in B_r(x_0)$ tale che $\Phi(x, y) = 0$ e questo x è il $g(y)$.

(occhio: stiamo esplicitando x in funzione di y).

— o — o —



— o — o —

Teo. della mappa aperta 1

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ di classe C^1 t.c.

$Jf(x)$ è invertibile per ogni $x \in \Omega$.

Allora f è una mappa aperta, cioè manda aperti in aperti.

[Dim.] Sia $A \subseteq \Omega$ aperto, sia $x_0 \in \Omega$, sia $y_0 = f(x_0)$. Dico che $y_0 \in \text{Int}(f(A))$.

Questo segue dal teo. della funzione inversa applicato nel p.to x_0 .

[Vedi figura sopra].

— o — o —

Teo. mappa aperta 2

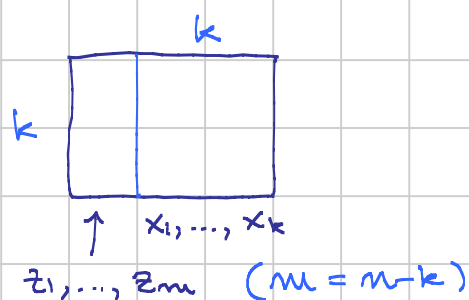
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ di classe C^1 .
 Supponiamo che Jf sia FULL RANK, cioè

$Jf(x)$ ha rango k per ogni $x \in \Omega$ (questo è imposs. se $k > n$)

Allora f è una mappa aperta.

Dim. Basta dimostrare che per ogni $x_0 \in \Omega$ si ha che
 $f(x_0) \in \text{Int}(f(\Omega))$ (si applica alla restrizione di f ad ogni aperto $A \subseteq \Omega$).

Prendo $Jf(x_0)$: è una matrice $k \times n$ con sottomatrici $k \times k$ invertibile. Supponiamo che sia rispetto alle ultime k variabili



Considero la funzione $\Phi(z, x, y) = y - f(z, x)$

È una funzione $\Phi: \Omega \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ e

$$J\Phi = \begin{array}{|c|c|} \hline k & \text{Id} \\ \hline \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{2cm}}_{Jf}$

Quindi posso ricavare x in funzione di y e z .
 Quindi ho tanti gradi di libertà: posso fissare a piacere y in arrivo e le prime n componenti del vettore in partenza (tutto questo in un aperto) ed il teo. funz. implicite mi trova le restanti k componenti del vettore in partenza.