

Continuazione dimostrazione

(Continuità) Del tutto analoga al caso $k=1, m=2$.

Due approcci

- (ε/δ) Scegliendo dall'inizio $\varepsilon := \varepsilon$ trovo $\delta > 0$ t.c.

$$\varphi: \overline{B}_\delta^m(0) \rightarrow \overline{B}_\varepsilon^k(0)$$

- (Per successioni) Se $x_n \rightarrow x_0$ e $\varphi(x_n) \rightarrow z_0 \neq y_0$ trovo un assurdo.

— o — o —

(Lipschitzianità) Ipotesi: esiste $\Lambda \geq 0$ t.c.

$$\|\varphi(x_2, y) - \varphi(x_1, y)\| \leq \Lambda \|x_2 - x_1\|$$

per ogni x_1, x_2 in $\overline{B}_{\rho_1}^m(0)$ e per ogni y in $\overline{B}_{\rho_2}^k(0)$

Allora si ha che φ è Lip. in $\overline{B}_{\rho_1}^m(0)$.

Lemma (Esercizio) Siano X e Y metrici, con Y completo.

Sia

$$\phi: X \times Y \rightarrow Y$$

tale che

$$d_Y(\phi(x_2, y), \phi(x_1, y)) \leq \Lambda d_X(x_1, x_2) \quad \forall \dots$$

$$d_Y(\phi(x, y_2), \phi(x, y_1)) \leq L d_Y(y_2, y_1) \quad \forall \dots$$

↑
con $L < 1$

Sia $\varphi: X \rightarrow Y$ tale che $\Phi(x, \varphi(x)) = \varphi(x)$ per ogni $x \in X$ (esiste ed è unica).

Allora φ è lip. in X .

Dim Per ogni $(x_1, x_2) \in X^2$ vale

$$\begin{aligned} d_Y(\varphi(x_2), \varphi(x_1)) &= d_Y(\underbrace{\Phi(x_2, \varphi(x_2))}_{\text{def. } \varphi}, \Phi(x_1, \varphi(x_1))) \\ &\leq d_Y(\Phi(x_2, \varphi(x_2)), \Phi(x_2, \varphi(x_1))) \\ &\quad + d_Y(\Phi(x_2, \varphi(x_1)), \Phi(x_1, \varphi(x_1))) \\ &\leq L d_Y(\varphi(x_2), \varphi(x_1)) + \wedge d_X(x_2, x_1) \end{aligned}$$

$$\leadsto d_Y(\varphi(x_2), \varphi(x_1)) \leq \frac{\wedge}{1-L} d_X(x_2, x_1) \quad \boxed{\text{😊}}$$

La lip. segue dal lemma applicato con

$$\Phi(x, y) := y - \underbrace{[J_y f(0, 0)]^{-1}}_{\text{---}} \underbrace{f(x, y)}_{\text{---}}$$

(Differenziabilità) Per ipotesi sappiamo che f è diff. in (x_0, y_0) , quindi

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + J_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + J_y f(x_0, y_0)(y - y_0) + r(x, y)$$

(controllare le dimensioni !!!)

dove

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{\|r(x, y)\|}{(\|x - x_0\|^2 + \|y - y_0\|^2)^{1/2}} = 0$$

scrivere le
parole dove
sono

Riscrivo tutto con $y = \varphi(x)$:

$$f(x, \varphi(x)) = f(x_0, \varphi(x_0)) + J_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + J_y f(x_0, \varphi(x_0))(\varphi(x) - \varphi(x_0)) + r(x, \varphi(x))$$

da cui

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = - \overbrace{[J_y f(x_0, \varphi(x_0))]^{-1} J_x f(x_0, y_0)}^M (x - x_0) - [\dots]^{-1} r(x, \varphi(x))$$

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + M(x - x_0) - [\dots]^{-1} r(x, \varphi(x))$$

Mi basta dimostrare che l'ultimo termine è $O(\|x - x_0\|)$

$$\frac{\|[\dots]^{-1} r(x, \varphi(x))\|}{\|x - x_0\|} \leq \underbrace{\|[\dots]^{-1}\|}_{\text{numero}} \frac{\|r(x, \varphi(x))\|}{\|x - x_0\|}$$

$$\frac{\|r(x, \varphi(x))\|}{(\|x - x_0\|^2 + \|\varphi(x) - \varphi(x_0)\|^2)^{1/2}}$$

↓
0 per hp

$$\frac{(\|x - x_0\|^2 + \|\varphi(x) - \varphi(x_0)\|^2)^{1/2}}{\|x - x_0\|}$$

Limitato perché so già che φ è Lipschitziana.

— 0 — 0 —

Oss. Se f è diff. ovunque, allora anche φ lo è.

(Ulteriore regolarità) Bootstrap come nel caso base.

— 0 — 0 —

Esempio 1 Consideriamo l'equazione

$$n^2 \sin x + n \arctan(x+x^{33}) = x^2+3$$

Dimostrare che per n grande esiste x_n che risolve e t.c.
 $x_n \rightarrow 0$

Divido: $\sin x + \frac{1}{n} \arctan(x+x^{33}) = \frac{1}{n^2} (x^2+3)$

Pongo $y := \frac{1}{n}$ e ottengo

$$\sin x + y \arctan(x+x^{33}) = y^2 (x^2+3)$$

Se riesco ad esprimere x in funzione di y (almeno per $y \sim 0$)
allora ho trovato x in funzione di n .

$$f(x,y) := \sin x + y \arctan(x+x^{33}) - y^2 (x^2+3)$$

Osservo che $f(0,0) = 0$ e $f_x(0,0) = 1 \neq 0$
 $\uparrow$ viene fuori da $\sin x$

Quindi: esiste una unica (definitivamente) successione
 $x_n \rightarrow 0$ t.c. x_n risolve per n grande !!

② Studiare $\sum x_n$

Basta fare il Taylor della funzione $x = \varphi(y) = ay + by^2$
e sostituendo troveremo (senza sorprese)

$$x = 3y^2 + o(y^2)$$

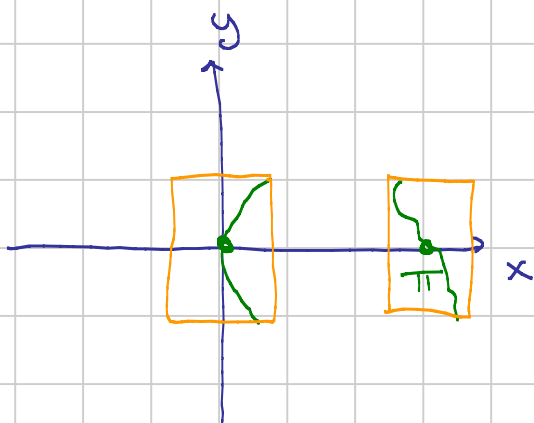
da cui $x_n = \frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$

③ x_n è unica (definitivamente) solo tra le succ. che tendono a 0.

Ad esempio esiste (sempre unica) $x_n \rightarrow \pi$ con x_n soluzione per n grande.

Notavo: $f(x, y) = \sin x + y \arctan(x + x^{3/3}) = y^2(x^2 + 3)$

Osservo che $f(\pi, 0) = 0$ e probabilmente $f_x(\pi, 0) \neq 0$, quindi posso esplicitare anche vicino a $(\pi, 0)$



Esempio 2

$$\begin{cases} n \sin(x+y) + \cos(xy) = 3y^2 \\ n^2 x + 2n \sin y = \arctan(x^2 + y^2) \end{cases}$$

Domanda: per n grande esistono soluzioni? Che fanno?

Pongo $z := \frac{1}{n}$ e riscrivo come

$$\begin{cases} \sin(x+y) + z \cos(xy) - 3y^2 z = 0 \\ x + 2z \sin y - z^2 \arctan(x^2 + y^2) = 0 \end{cases}$$

Voglio (x, y) in funzione di z . Se metto $(0, 0, 0)$ ok. Devo calcolare J e sperare che la parte in x, y sia invertibile.

$$Jf(0,0,0) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

invertibile

Quindi esistono $x(z), y(z)$, definite e regolari in $(-\delta, \delta)$ che risolvono.

→ Dimostrare che per n grande (x_n, y_n) è unica.

Se $(x_n, y_n) \rightarrow (0,0)$ allora è unica (casca nella finestra).

Può essere che $(x_n, y_n) \rightarrow (x_\infty, y_\infty) \neq (0,0)$?

Mettendo $z=0$ troviamo $x=0$ e $\sin(x+y)=0$

Quindi è FALSO: si trovano anche soluzioni vicine a $(0, \pi)$.

— 0 — 0 —