

Funzioni implicite (n generico, $k=1$)

vecchio (x_0, y_0) 

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, supponiamo $0 \in \Omega$.

Supponiamo che

(i) $f(0) = 0$

(ii) f continua in Ω

(iii) $f_{x_m}(x)$ esiste ed è continua in Ω

(iv) $f_{x_m}(0) \neq 0$

Allora posso esplicitare come prima, trovando

$$\varphi: B_{\rho_0}(0) \rightarrow [-r_0, r_0]$$

palla di centro

0 e raggio ρ_0 in $\mathbb{R}^{n-1}$

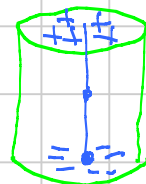
(ora la finestra è un cilindro)

Inoltre
$$\varphi_{x_i}(x) = - \frac{f_{x_i}(x, \varphi(x))}{f_{x_m}(x, \varphi(x))} \quad \forall x \in B_{\rho_0}(0)$$

per ogni $i = 1, \dots, n-1$

Idea della dim.

- Trovo una prima finestra $B_{\delta_0}(0) \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ in cui $f_{x_m}(x) > 0$



- Mi restringo alla retta verticale

$$z \rightarrow f(0, \dots, 0, z)$$

e ottengo che $f > 0$ nel centro della base superiore

e $f < 0$ " " " " inferiore

- Restringo le basi in modo da avere tutto + sopra e tutto - sotto

- Considero tutte le rette verticali che congiungano due p.ti della basi ristrette: lì f è monotona e cambia segno, quindi si annulla esattamente una volta.

Il resto della dimostrazione è davvero analogo.

Casistica di esercizi: dato un luogo di zeri, ci chiediamo

- se è limitato
- se è compatto
- se è connesso
- come è fatto localmente

Esempio 1 $f(x,y) = \sin x + \cos y - e^{xy} = 0$

Come è fatto questo insieme?

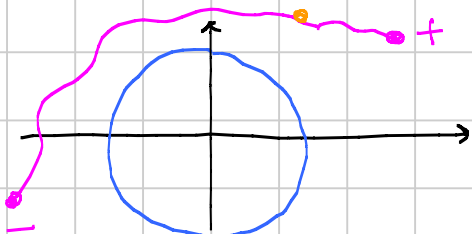
Non è limitato in quanto $x=0$ e y arbitrario funziona sempre.

Fatto generale ① Se $\liminf_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} f(x,y) > 0$, allora $\exists R > 0$ t.c.

$f(x,y) > 0$ fuori da $B_R(0,0)$ e quindi il luogo di zeri è limitato. Se f è pure continua, allora è pure compatto.

Idem se $\limsup < 0$.

② Se $\limsup f(x,y) > 0$ e $\liminf f(x,y) < 0$ (per $x^2+y^2 \rightarrow \infty$) ed f è continua, allora il luogo di zeri non è limitato.



Occhio: unire + e - restando fuori dalla palla.

Nell'esempio $\liminf f = -\infty$ ($f(x,x)$ per $x \rightarrow +\infty$)

$$\limsup f = 2 \quad f\left(\frac{\pi}{2} + 2m\pi, -2m\pi\right)$$

Esempio 2 $\sin x + e^x - \arctan y - y = 1$

① V non è limitato ($\limsup = +\infty$, $\liminf = -\infty$)

② $(0,0) \in V$. Vicino a $(0,0)$ funziona il teorema

$$f_x(0,0) = 2 \quad f_y(0,0) = -2 \quad \leadsto \text{esplicito come voglio}$$

Taylor!!!

Esplicito risp. ad y , cioè scrivo $y = \varphi(x)$.

Voglio calcolare $\dot{\varphi}(0)$ e $\ddot{\varphi}(0)$

$$\varphi'(x) = - \frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))} \quad \leadsto \quad \varphi'(0) = - \frac{f_x(0,0)}{f_y(0,0)} = 1$$

Derivo con tanta pazienza 😞

$$\varphi''(x) = - \frac{(f_{xx} + f_{xy} \varphi') f_y - f_x (f_{yx} + f_{yy} \varphi')}{f_y^2}$$

Idea alternativa: calcolare i coeff. da Taylor!
Sappiamo che $\varphi \in C^\infty$ e quindi posso scrivere

$$\varphi(x) = x + \alpha x^2 + b x^3 + o(x^3)$$

$\uparrow \dot{\varphi}(0) = 0$

$$X = f(x, \varphi(x)) = \sin x + e^x - \arctan \varphi(x) - \varphi(x)$$

$$= \cancel{x} - \frac{1}{6} \cancel{x^3} + \cancel{1} + \cancel{1} + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} \cancel{x^3} - \cancel{x} - \alpha x^2 - b x^3 + \frac{1}{3} x^3 - \cancel{x} - \alpha x^2 - b x^3 + o(x^3)$$

$$\frac{1}{2} = +2a \quad \leadsto \quad a = +\frac{1}{4} \quad \text{coeff. di } x^2$$

$$2b = \frac{1}{3} \quad \leadsto \quad b = \frac{1}{6} \quad \text{coeff. di } x^3$$

$$\text{Quindi } \ddot{\varphi}(0) = \frac{1}{2} \quad \ddot{\varphi}(0) = 1 \quad (\text{occhio ai fattoriali!})$$

③ V è un grafico globale, cioè esiste $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$V = \{ (x, \varphi(x)) : x \in \mathbb{R} \}$$

Basta osservare che, per ogni x fisso, la funzione $y \rightarrow f(x, y)$ è str. monotona ($f_y < 0$) e passa da $-\infty$ a $+\infty$.

— o — o —

Esempio 3 $z + \arctan(xz) + e^{xy} = 1$

$(0, 0, 0) \in V$. Posso esplicitare lì vicino?

$$f_z(0, 0, 0) = 1 \quad (\text{Taylor})$$

Posso esplicitare $z = \varphi(x, y)$. Calcolare

$$\limsup_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\varphi(x, y)}{x^2 + y^2}$$

Si vede dalla formula che $\varphi_x(0, 0) = \varphi_y(0, 0) = 0$.

Quindi senza il Taylor di ordine 2

$$\varphi(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + o(\rho^2)$$

$$ax^2 + bxy + cy^2 + \cancel{1} + xy + o(\rho^2) = \cancel{1}$$

$$\begin{matrix} \downarrow \\ 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \downarrow \\ 1 \\ -1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \downarrow \\ 0 \end{matrix}$$

$$\frac{\varphi(x, y)}{x^2 + y^2} = \frac{-xy}{x^2 + y^2} + o(1)$$

[Due segni cambiati dopo video]