

Def. Sia (X, d) metrico, e sia $f: X \rightarrow X$.

Si dice che f è una **CONTRAZIONE** se

$$\exists L < 1 \quad \text{t.c.} \quad d(f(x), f(y)) \leq L d(x, y) \quad \forall (x, y) \in X^2$$

cioè f è Lip. con costante $L < 1$.

Teorema (Teorema delle contrazioni - Teo. di p.to fisso di Banach)

Sia (X, d) sp. metrico **COMPLETO** e sia $f: X \rightarrow X$ contrazione.

Allora f ammette un unico p.to fisso, cioè esiste un unico $x \in X$ t.c.

$$f(x) = x.$$

Interpretazione cartografica Se metto sul tavolo una mappa della città (o dell'Italia), c'è un unico p.to che rappresenta se stesso.

Dim. **Unicità** Siano x e y due p.ti fissi. Allora

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq L d(x, y)$$

$\uparrow$ x, y fissi $\uparrow$ contr.

$$\Rightarrow \underbrace{(1-L)}_{>0} d(x, y) \leq 0 \Rightarrow d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y.$$

Esistenza Prendo $x_0 \in X$ a caso e costruisco per ricorrenza $x_{n+1} = f(x_n)$. **SE** $\{x_n\}$ avesse un limite, diciamo $x_n \rightarrow x_\infty$, allora

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & f(x_n) \\ \downarrow & & \downarrow \leftarrow f \text{ è continua (è Lip.)} \\ x_\infty & = & f(x_\infty) \end{array}$$

Basta dim. che $\{x_n\}$ è di Cauchy. Stima base

$$d(x_2, x_1) = d(f(x_1), f(x_0)) \leq L d(x_1, x_0)$$

$$d(x_3, x_2) = d(f(x_2), f(x_1)) \leq L d(x_2, x_1) \leq L^2 d(x_1, x_0)$$

$\leadsto$ per induzione ottengo

$$d(x_{m+1}, x_m) \leq L^m d(x_1, x_0) \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Prendiamo WLOG $m > n$. Allora

$$d(x_m, x_n) \leq \overset{\uparrow}{\text{triang.}} d(x_m, x_{m-1}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n)$$

$$\leq L^{m-1} d(x_1, x_0) + \dots + L^n d(x_1, x_0)$$

$$= d(x_1, x_0) \sum_{k=n}^{m-1} L^k$$

$$\leq d(x_1, x_0) \sum_{k=n}^{\infty} L^k$$

$$= d(x_1, x_0) \frac{L^n}{1-L}$$

$\uparrow$
geometrica

$\uparrow$
tende a 0 perché $L < 1$.

Dato $\varepsilon > 0$, scelgo n_0 t.c.

$$\boxed{d(x_1, x_0) \frac{L^n}{1-L}} \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

e dalla stima precedente ottengo

$$d(x_m, x_n) \leq \varepsilon \quad \forall m > n \geq n_0$$

cioè $\{x_n\}$ è di Cauchy.

— o — o —

Osservazioni / esempi

① Serve X completo

$$X = (0, 1) \quad f(x) = \frac{1}{2}x \quad L = \frac{1}{2}$$

② Se $L = 1$ le cose possono andare male

$$X = \mathbb{R} \quad f(x) = x \quad \text{esist. ok} \quad \text{unicità NO}$$

$$X = \mathbb{R} \quad f(x) = x + 1 \quad \text{NO}$$

va male anche con X compatto: $X = S^1$, $f = \text{rot. } 90^\circ$

③ Non basta "contrazione debole", cioè

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \quad \forall (x, y) \in X^2 \text{ con } x \neq y$$

Basta per l'unicità, ma non per l'esistenza

$$X = \mathbb{R} \quad f(x) = x - \arctan x + 1 \quad \text{NO pti fissi}$$

(f è contr. debole perché $0 \leq f'(x) < 1$ + teo. Lagrange)

④ Più Hard X compatto + contrazione debole basta?

Falso: X opt. + contr. debole $\Rightarrow$ contr. vera.

— 0 — 0 —

Oss. Nella dim. dell'esistenza posso partire da un x_0 qualunque. La convergenza è molto forte perché, detto x_∞ il pto fisso, vale

$$d(x_n, x_\infty) \leq L^n d(x_0, x_\infty)$$

La convergenza è esponenziale

— 0 — 0 —

COMPLEMENTO

Def. Sia (X, d) metrico. Il (un) complemento di (X, d) è una terna $(\hat{X}, \hat{d}, i)$ tale che

(1) $(\hat{X}, \hat{d})$ è uno sp. metrico completo

(2) $i: X \rightarrow \hat{X}$ è una ISOMETRIA, cioè

$$\hat{d}(i(x), i(y)) = d(x, y)$$

(posso pensare X come s.sp. di $\hat{X}$)

(3) $i(X)$ è denso in $\hat{X}$, cioè $\text{Clos}(i(X)) = \hat{X}$.

Esempio $X = (0, 1)$ con la metrica classica

Il suo complemento è $[0, 1]$.

- Se non ci fosse la (3) andrebbe bene anche $\mathbb{R}$
- Se non ci fosse la (2) andrebbe bene anche S^1

Teorema 1 (Esistenza) Ogni sp. metrico ammette (almeno) un complemento

Teorema 2 (Estensione)

Sia (X, d) metrico, sia (Y, d_Y) metrico COMPLETO.

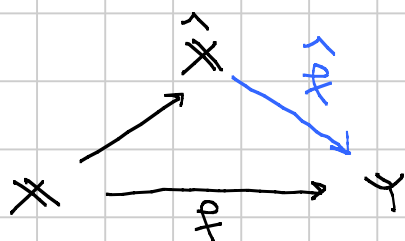
Sia $f: X \rightarrow Y$ unif. continua.

Sia $(\hat{X}, \hat{d}, i)$ un complemento di X .

Allora esiste ed è unica $\hat{f}: \hat{X} \rightarrow Y$ che estende f , cioè tale che

$$\hat{f}(i(x)) = f(x) \quad \forall x \in X$$

oppure (che è lo stesso) che chiude il diagramma



Inoltre $\hat{f}$ è unif. cont.

Teorema 3 (Unicità) Il completamento è unico a meno di isometrie.

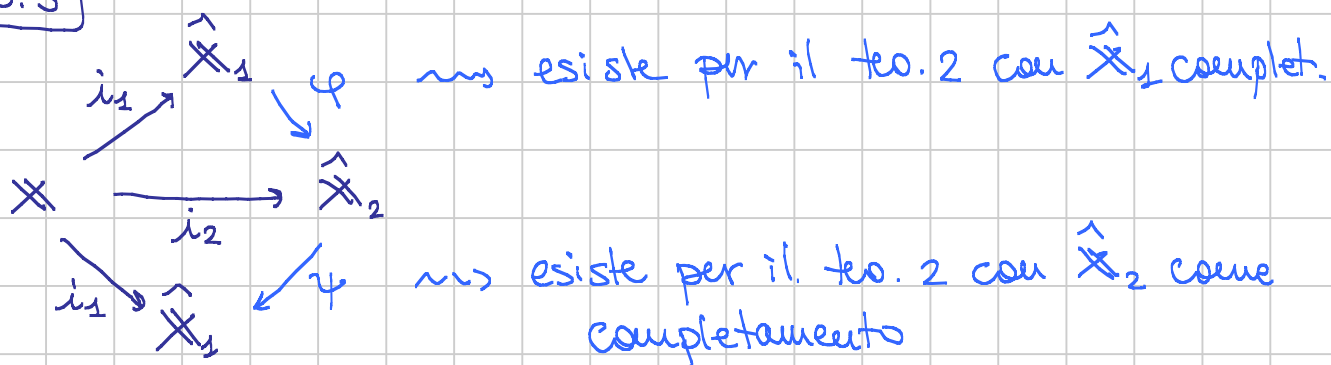
Detto altrimenti: siano $(\hat{X}_1, \hat{d}_1, i_1)$ e $(\hat{X}_2, \hat{d}_2, i_2)$ due completamenti di (X, d) .

Allora esiste $\varphi: \hat{X}_1 \rightarrow \hat{X}_2$ tale che

- φ è invertibile
- φ è isometria
- φ commuta con le immersioni, cioè

$$\varphi(i_1(x)) = i_2(x) \quad \forall x \in X.$$

Dim. teo. 3



Devo concludere che $\psi \circ \varphi = \text{identità su } \hat{X}_1$ e che sia una isometria.

Questo è vero perché vale su $i_1(X)$ che è denso in $\hat{X}_1$.

(Lemma: una funz. cont. che è isometria su un denso è ovunque).

— o — o —