

GRADIENTE, LAPLACIANO, DIVERGENZA, ROTORE

Prendono in input funzioni / campi di vettori e restituiscono funzioni / campi di vettori

Setting: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n$ $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funzione

$\vec{E}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ a seconda dei casi

$\vec{E}(x, y, z) = (A(x, y, z), B(x, y, z), C(x, y, z))$

GRADIENTE

funzione $\rightarrow$ vettore

$$\nabla f(x, y, z) = (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z))$$

In n variabili ∇f è il vettore che ha come componenti

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$$

LAPLACIANO

funzione $\rightarrow$ funzione

In due variabili

$$\Delta f(x, y) = f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y)$$

↑
Delta

Oss Il Laplaciano è la traccia della matrice Hessiana.

Se $f(x, y)$ è convessa, allora $\Delta f(x, y) \geq 0$.

(Non vale il viceversa)

In n variabili

$$\Delta f(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_1, \dots, x_n)$$

DIVERGENZA

Vettore $\rightarrow$ funzione

In due variabili $\vec{E}(x, y) = (A(x, y), B(x, y))$

$$\operatorname{div} \vec{E} = A_x + B_y$$

In 3 variabili $\operatorname{div} \vec{E} = A_x + B_y + C_z$

In n variabili

$$\operatorname{div} \vec{E} := \sum_{i=1}^n \frac{\partial A_i}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$$

i -esima componente

ROTORE

Vettore $\rightarrow$ Vettore

CURL in inglese

Si fa solo per campi in $\mathbb{R}^3$

Si ottiene sviluppando formalmente il det. della matrice

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & B & C \end{pmatrix} \rightsquigarrow (C_y - B_z, -C_x + A_z, B_x - A_y)$$
$$=: \operatorname{rot} \vec{E}$$

In due variabili si definisce pensando di estendere con $C=0$

$$\operatorname{rot}(A, B) = \operatorname{rot}(A, B, 0) = (0, 0, B_x - A_y)$$

Notazioni dei fisici

Gradiente : $\nabla \leftarrow$ Nabla

Laplaciano : ∇^2

Divergenza : $\operatorname{div} \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E}$

Rotore : $\operatorname{rot} \vec{E} = \nabla \wedge \vec{E}$

Finestra sul futuro : il rotore è il caso speciale in dim. 3 di un oggetto molto più generale, che è il differenziale delle k -forme, che viene una 2 -forma.
— 0 — 0 —

PROPRIETÀ BASE

$$\operatorname{div} \nabla f = \Delta f$$

$$\operatorname{div} (f_x, f_y, f_z) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$$

$$\operatorname{rot} \nabla f = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix}$$

$$= (f_{zy} - f_{yz}, -f_{zx} + f_{xz}, f_{yx} - f_{xy}) \quad \text{Schwarz.}$$

Oss. Funziona anche in dim 2 con il rotore dei fisici

Dim. dei fisici : la 2^a e 3^a riga sono lin. dip.

$$\operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{E}) = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = (C_y - B_z, -C_x + A_z, B_x - A_y)$$

$$\operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{E}) = \cancel{C_y}_x - \cancel{B_z}_x - \cancel{C_x}_y + \cancel{A_z}_y + \cancel{B_x}_z - \cancel{A_y}_z = 0.$$

Molte operazioni non hanno senso:

$$\begin{array}{ccccccc} \operatorname{rot}(\operatorname{div} \vec{E}) & & \Delta(\nabla f) & & \operatorname{div}(\Delta f) & & \dots \\ & & \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} & & & & \end{array}$$

GRADIENTE NULLO / UGUALE

- Se $\nabla f = 0$ in Ω , allora f è localmente costante in Ω , quindi costante se Ω è connesso
- Se $\nabla f_1 = \nabla f_2$ in Ω , e Ω è connesso, allora

$$\exists c \in \mathbb{R} \text{ t.c. } f_1(x) = f_2(x) + c \text{ in } \Omega$$

ROTORE NULLO / UGUALE

- Se $\operatorname{rot}(\vec{E}) = 0$ in Ω , allora la forma diff.

$$\omega = A dx + B dy + C dz$$

è chiusa in Ω . Se Ω è semplicemente connesso, allora ω è esatta, cioè

$$\exists f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.c. } \vec{E} = \nabla f$$

Oss. Vale la stessa cosa in $\mathbb{R}^2$ con il rotore dei fisici.

Oss. Se $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, allora

$$\vec{E} = \nabla f + c \cdot \text{campo associato alla "solita"}$$

$\uparrow$ funzione $\uparrow$ cost.

- Se $\text{rot } \vec{E}_1 = \text{rot } \vec{E}_2$, e Ω è sempl. connesso, allora

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2 + \nabla f \quad (\text{esiste } f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.c.})$$

DIVERGENZA NULLA / UGUALE

- Se $\text{div } \vec{E} = 0$, allora (teorema per ora misterioso) sotto opportune misteriose ipotesi su Ω , vale che

$$\text{esiste campo } \vec{F} \text{ t.c.} \quad \vec{E} = \text{rot } \vec{F}$$

Le ipotesi misteriose sono ok se Ω è stellato

In generale basta 2-connesso, cioè ogni mappa continua da $S^2 \rightarrow \Omega$ si estende ad una mappa dalla sfera piena in Ω .

($\mathbb{R}^3 \setminus \text{p.to}$ non va bene, $\mathbb{R}^3 \setminus \text{retta si}$)

- Se $\text{div } \vec{E}_1 = \text{div } \vec{E}_2$, e Ω è 2-connesso, allora

$$\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = \text{rot } \vec{F}$$

The slope of a scalar function has no curl.

The curl of a vector function has no convergence.

The convergence of the slope of a scalar function is its concentration.

The concentration of a vector function is the slope of its convergence, together with the curl of its curl.

$$\text{rot } (\nabla f) = 0$$

$$\text{div } (\text{rot } \vec{E}) = 0$$

$$\text{div } (\nabla f) = \Delta f$$

$$\pm \text{rot } (\text{rot } \vec{E}) \mp \nabla (\text{div } \vec{E}) = (\Delta A, \Delta B, \Delta C)$$

Esercizio Mettendo bene i segni questa identità torna (vedi AM2-16).

[Dall'articolo originale di Maxwell, vedi CURL su WIKI].