

- Curve e integrali curvilinei
- Forme differenziali
- Superfici e integrali superficiali
- Teo. della divergenza (Gauss - Green)
- Teo. del rotore (Stokes)

CURVE

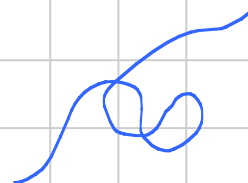
Defn. Una curva a valori in $\mathbb{R}^n$ è una funzione

$$\gamma: \underbrace{[a,b]}_{\text{intervallo} \subseteq \mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Def. Si dice sostegno di una curva l'immagine della γ , cioè

$$\text{sostegno}(\gamma) := \{ \gamma(t) : t \in [a,b] \} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Achtung! Il "disegno" di una curva è il suo sostegno, la curva è il modo in cui il sostegno viene percorso.



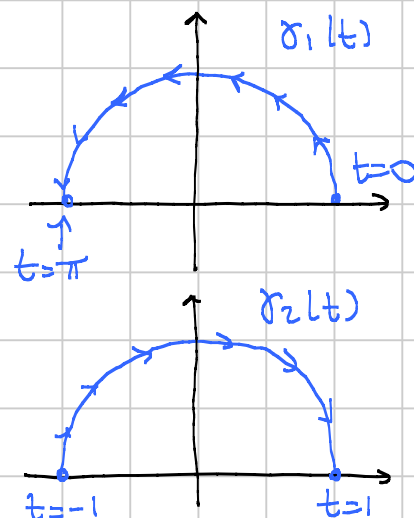
Esempio 1 $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, \pi]$
 $[a, b]$

$$\gamma_2(t) = (t, \sqrt{1-t^2}) \quad t \in [-1, 1]$$

$$\gamma_3(t) = (\cos(\pi-t), \sin(\pi-t)) \quad t \in [0, \pi]$$

$(-\cos t, \sin t)$

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ percorrono lo stesso sostegno



Esempio 2 $\gamma_4(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$
 $\gamma_5(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 8\pi]$

γ_4 e γ_5 percorrono lo stesso sostegno, ma γ_5 lo ripete 4 volte.

Def. Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva derivabile (cioè le singole componenti sono derivabili).

Dato $t_0 \in (a, b)$ si definisce

- **VELOCITY** il vettore $\dot{\gamma}(t_0) = (\gamma_1'(t_0), \dots, \gamma_n'(t_0))$
- **SPEED** il numero $\|\dot{\gamma}(t_0)\|$
- **RETTA TANGENTE** in t_0 la retta di equ. parametrica

$$t \rightarrow \gamma(t_0) + \dot{\gamma}(t_0)t \quad (\text{definita se } \dot{\gamma}(t_0) \neq 0)$$

$\uparrow$ p.to base $\uparrow$ direzione della retta

Esempio $\gamma(t) = (\sin t, t^2, \log t) \quad t \in [1, 3]$

$t_0 = 2 \quad \dot{\gamma}(2) = (\cos 2, 4, \frac{1}{2}) \quad \dot{\gamma}(t) = (\cos t, 2t, \frac{1}{t})$

La retta tangente è $\gamma(t_0) = (\sin 2, 4, \log 2)$

$$t \rightarrow (\sin 2 + t \cos 2, 4 + 4t, \log 2 + \frac{t}{2})$$

$$= \gamma(2) + t \dot{\gamma}(2).$$

Oss. Se la curva è continua, allora il sostegno è per forza compatto, quindi in particolare chiuso.

Def. Una curva $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice

- **CHIUSA** se $\gamma(a) = \gamma(b)$ (achtung! non c'è nulla di topologico in tutto questo)
- **SEMPLICE** se è iniettiva, tranne al più ai 2 estremi, cioè

$$\gamma(t) = \gamma(s) \Rightarrow t=s \text{ oppure } \{t,s\} = \{a,b\}$$

Domanda: se $\gamma: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ è iniettiva, posso dire che è semplice?



Stabilire se una curva è chiusa è banale sostituzionale.
La semplicità è più delicata.

Come dimostro che una curva è semplice?

Strategia 1 Se almeno una componente è strett. monotona allora la curva è semplice.

Se fosse $\gamma(t) = \gamma(s)$, dovrebbe essere $\gamma_i(t) = \gamma_i(s)$, ma se γ_i è strett. monot., questo implica $t=s$.

Strategia 2 Se esiste un invariante strett. monotono, allora la curva è semplice.

Quindi devo cercare $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$t \rightarrow f(\gamma(t))$ sia str. monot.

Dim. Se fosse $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, sarebbe $\neq(\gamma(t_1)) = \neq(\gamma(t_2))$...

Esempi $\gamma_1(t) = (\cos t, \boxed{t^3+t}, t^3-2t^2)$ $t \in [-5, 5]$
 $\uparrow$
str. cresc. $\leadsto \gamma_1$ è semplice

$\gamma_2(t) = (\cos t, \boxed{t^2+t}, t^3-t^4)$ $t \in [0, 4]$
 $\uparrow$
str. cresc. per $t \geq 0 \leadsto \gamma_2$ è semplice

$\gamma_3(t) = (t \cos t, t \sin t)$ $t \in [0, 127]$

$\uparrow$
Considero x^2+y^2 , che diventa $t^2 \cos^2 t + t^2 \sin^2 t = t^2$
e questo è iniettivo per $t \in [0, 127]$.

Strategia 3 Se riesco a scomporre $[a, b]$ in sottointervalli in cui γ è iniettiva e appartiene a zone disgiunte di $\mathbb{R}^n$, allora γ è semplice.

Esempio $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, 2\pi]$

Scompongo $[0, 2\pi] = [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \pi] \cup [\pi, \frac{3\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

In ogni sottointervallo la curva è iniettiva (entrambe le componenti sono monotone)

Inoltre nei 4 sottointervalli la curva sta in quadranti diversi e quindi questo esclude

$$\gamma(t) = \gamma(s)$$

con t ed s appartenenti ad intervalli diversi
(in realtà occorre controllare gli assi).

Strategia 4 Usare la definizione negata.

Esempio $\gamma(t) = (t-t^2, t-t^3)$ $t \in [0,1]$

Osservo che γ è chiusa $\Rightarrow$ 1 e 2 falliscono.

Supponiamo che non sia semplice. Impongo

$$(t-t^2, t-t^3) = (s-s^2, s-s^3)$$

$$\begin{cases} t-t^2 = s-s^2 \\ t-t^3 = s-s^3 \end{cases} \quad \begin{cases} t-s = (t-s)(t+s) \\ t-s = (t-s)(t^2+ts+s^2) \end{cases}$$

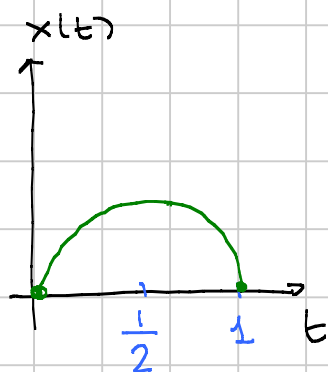
Se $t=s$ nulla di male, altrimenti divido:

$$\begin{cases} 1 = t+s \\ 1 = t^2+ts+s^2 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = t+s \\ 1 = (t+s)^2-ts \end{cases} \quad \begin{cases} t+s=1 \\ ts=0 \end{cases} \leadsto \{t,s\} = \{0,1\}$$

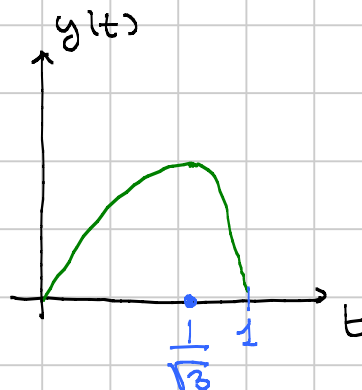
Disegnare il sostegno di γ

Disegno separatamente le due componenti

$$x(t) := t-t^2$$



$$y(t) := t-t^3$$



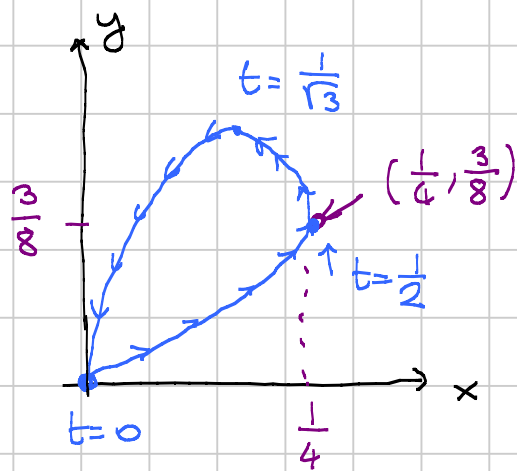
$$y'(t) = 1-3t^2 \quad t = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Dall'andamento delle 2 componenti, deduco quello della curva

- Per $t \in [0, \frac{1}{2}]$ le $x(t)$ e $y(t)$ sono $\nearrow$

- Per $t \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ la $x(t) \downarrow$ e $y(t) \uparrow$

- Per $t \in [\frac{1}{\sqrt{3}}, 1]$ abbiamo $x(t) \downarrow$ e $y(t) \downarrow$



Oss. Forse dal disegno si può dedurre una dim. di semplicità basata sulla strategia 3.

— o — o —