

Def. (Norma cubica) (sarebbe norma ∞)

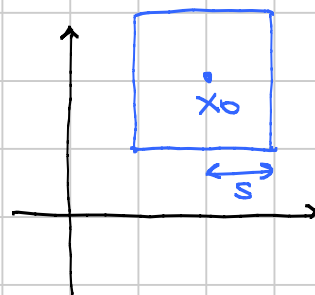
Dato $x \in \mathbb{R}^n$ definiamo

$$\|x\| := \max \{ |x_i| : i = 1, \dots, n \}$$

Def. Fissato $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e fissato $s > 0$, possiamo definire

$$C(x_0, s) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq s\}$$

$\uparrow$ cubo $\uparrow$ semilato



Def. Data M matrice $m \times n$, poniamo

$$\|M\| := \max \left\{ \sum_{j=1}^n |M_{i,j}| : i = 1, \dots, m \right\}$$

Brutalmente: riga per riga sommo il valore assoluto degli elementi, poi prendo il max al variare delle righe.

$|*| + |*| + |*| \rightarrow r_1$

$* * * \rightarrow r_2$

$* * * \rightarrow r_3$

Prop. (Non serve, ma descrive l'idea)

Data M matrice $m \times n$, dato $x \in \mathbb{R}^n$, vale

$$\|Mx\| \leq \|M\| \cdot \|x\|$$

$\uparrow$ norma cubica su $\mathbb{R}^m$ $\uparrow$ norma cubica su $\mathbb{R}^n$

Dim. Sia $j \in \{1, \dots, m\}$ t.c. $\|Mx\| = |(Mx)_j|$

Allora

$$|(Mx)_j| = \left| \sum_{i=1}^n M_{j,i} x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |M_{j,i}| \cdot |x_i|$$

$$\leq \|x\| \cdot \sum_{i=1}^n |M_{j,i}| \leq \|x\| \cdot \|M\|$$

$\uparrow$ somma riga j .

□

Prop. (Lagrange direzionale vettoriale cubico)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto convesso, sia $R: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione di classe C^1 , siano x e y p.ti di A .
Allora esiste c nel segmento di estremi x e y t.c.

$$\|R(y) - R(x)\| \leq \|y - x\| \cdot \|J_R(c)\|.$$

Dim. Sia $j \in \{1, \dots, m\}$ t.c. $\|R(y) - R(x)\| = |(R(y) - R(x))_j|$

Allora

comp. j -esima di R

$$|(R(y) - R(x))_j| = |R_j(y) - R_j(x)|$$

$$= |\langle \nabla R_j(c), y - x \rangle|$$

riga j -esima della
matrice jacobiana
 $M = J_R(c)$

$$= \left| \sum_{i=1}^n M_{j,i} \cdot (y-x)_i \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^n |M_{j,i}| \cdot |(y-x)_i|$$

$$\leq \|y - x\| \cdot \sum_{i=1}^n |M_{j,i}|$$

$$\leq \|y - x\| \cdot \|J_R(c)\|.$$

LEMMA DEL CUBETTO ESTERNO

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, sia $R: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ di classe C^1 , sia $C(x_0, s)$ un cubo contenuto in A .

Allora

$$R(C(x_0, s)) \subseteq C(R(x_0), Ls)$$

$$\text{dove } L := \max \{ \|J_R(x)\| : x \in C(x_0, s) \}$$

Dim. Sia $y \in \mathbb{R}(C(x_0, S))$.

Per def. di immagine si ha

$$y = \mathbb{R}(x)$$

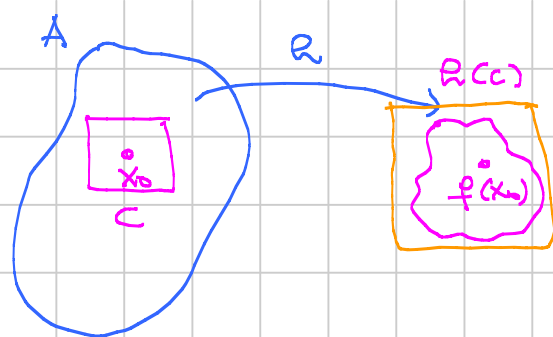
con $x \in C(x_0, S)$.

Per la prop. prec.

$$\|y - \mathbb{R}(x_0)\| = \|\mathbb{R}(x) - \mathbb{R}(x_0)\|$$

$$\leq \underbrace{\|x - x_0\|}_{\leq S} \cdot \underbrace{\|\mathbb{J}_{\mathbb{R}}(x)\|}_{\leq L}$$

— o — o —



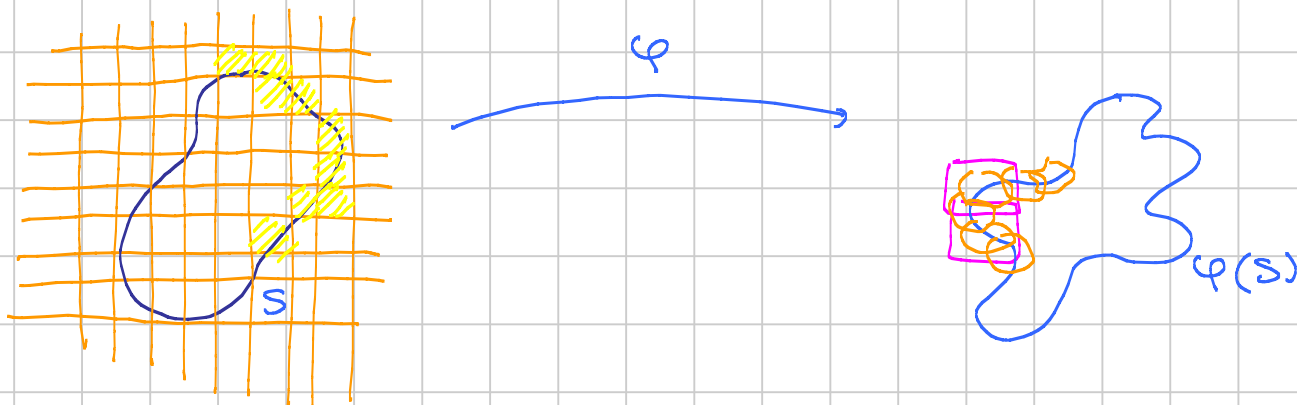
LEMMA 1 (I diffeomorfismi mandano insieme misurabili in insieme misurabili)

Siano A e B aperti in $\mathbb{R}^n$. Sia $\varphi: A \rightarrow B$ di classe C^1 con inversa $\psi: B \rightarrow A$ di classe C^1 . Supponiamo che $\mathbb{J}_{\varphi}$ e $\mathbb{J}_{\psi}$ siano limitati.

Sia $S \subseteq A$ un insieme misurabile con $\text{Clos}(S) \subseteq A$.

Allora $\varphi(S)$ è misurabile.

Dim. Usiamo il criterio di misurabilità seguente: S è misurabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ la frontiera ∂S è contenuta in una unione di cubetti di misura totale $\leq \varepsilon$.



Per un fatto topologico (che avrebbe dimostrato) si ha che

$$\partial \varphi(S) = \varphi(\partial S)$$

↑

senza φ invertibile con inversa continua

Fisso $\varepsilon > 0$ e ricopro ∂S con cubetti $C_1, \dots, C_k$ di misura totale $\leq \varepsilon$. Applico φ e osservo che $\partial \varphi(S)$ sarà ricoperta da

$$\varphi(C_1), \dots, \varphi(C_k)$$

Detto s il lato comune dei cubetti C_i , avremo che i $\varphi(C_i)$ sono contenuti in cubetti di semilato Ls , con un L opportuno. La somma delle misure di questi nuovi cubetti è $\leq CL^m$.

— o — o —

LEMMA 2 (ε -disug. sui cubi piccoli)

J_φ e J_ψ

Siano A, B, φ e ψ come nel lemma precedente + unif. cont.

Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni cubo $C(y_0, s)$ con semilato $s \leq \delta$ vale la disuguaglianza

↑ contenuto in B

$$\int_B f_C(y) dy \geq \frac{1}{(1+\varepsilon)^{m+1}} \int_A f_C(\varphi(x)) \cdot |\text{Det } J_\varphi(x)| dx$$

Dim. Scegliamo la piccolezza di ε .

Sia L il sup di $\|J_\varphi(x)\|$ al variare di x in A

Sia $\hat{L}$ il sup di $\|J_\psi(y)\|$ " " " y in B .

Esiste δ t.c.

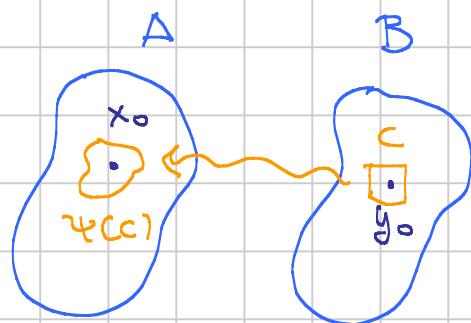
$$\textcircled{1} |\text{Det } J_\varphi(x_1)| \leq (1+\varepsilon) |\text{Det } J_\varphi(x_2)| \quad \text{se } \|x_1 - x_2\| \leq \hat{L} \delta$$

$$\textcircled{2} \|J_\varphi(\psi(y_1)) \cdot J_\psi(y_2)\| \leq (1+\varepsilon) \quad \text{se } \|y_1 - y_2\| \leq \delta$$

se $y_1 = y_2$, questa è l'identità, quindi ha norma 1

Supponiamo $C(y_0, s)$ con $s \leq \delta$.

Allora



$$\int_A f_c(\varphi(x)) \cdot |\text{Det } J_\varphi(x)| dx$$

$$= \int_{\varphi(C)} |\text{Det } J_\varphi(x)| dx$$

$$\leq (1+\varepsilon) \int_{\varphi(C)} |\text{Det } J_\varphi(x_0)| dx$$

$$= (1+\varepsilon) |\text{Det } J_\varphi(x_0)| \cdot \text{meas}(\varphi(C))$$

$$= (1+\varepsilon) \text{meas}(J_\varphi(x_0)(\varphi(C)))$$

$$= (1+\varepsilon) \text{meas}(R(C(y_0, s))) = (\star)$$

(prendo $\varphi(C)$ e applico la matrice costante $J_\varphi(x_0)$ e uso teo. affine)
 $\uparrow$
dove $R = J_\varphi(x_0) \circ \varphi + \tau$ in modo che $R(y_0) = y_0$

Osservo che $R(C(y_0, s)) \subseteq C(R(y_0), Ms)$ dove

$$M := \max \{ \|J_R(y)\| : y \in C(y_0, s) \}$$

$$\text{ma } J_R(y) = J_\varphi(x_0) \cdot J_\varphi(y) = \underbrace{J_\varphi(\varphi(y_0)) \cdot J_\varphi(y)}_{\text{per la (2) ha norma cubica } \leq (1+\varepsilon)}$$

$$(\star) \leq (1+\varepsilon) \text{meas}(C(\overset{R(y_0)}{y_0}, (1+\varepsilon)s))$$

vale anche se $R(y_0) \neq y_0$

$$= (1+\varepsilon) \cdot (1+\varepsilon)^n \text{meas}(C(y_0, s))$$

$$= (1+\varepsilon)^{n+1} \int_B f_c(y) dy.$$

— o — o —