

CAMBIO DI VARIABILI NEGLI INTEGRALI MULTIPLI

Def. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $B \subseteq \mathbb{R}^n$ due aperti.

Diciamo che $\varphi: A \rightarrow B$ è un diffeomorfismo se è di classe C^1 e ammette funzione inversa $\psi: B \rightarrow A$ pure lei di classe C^1 .

Oss. Per il differenziale della funzione composta $\psi(\varphi(x)) = x$ quindi

$$J_\psi(\varphi(x)) \cdot J_\varphi(x) = \text{Id} \quad \forall x \in A.$$

In particolare
 $J_\varphi(x)$ è inv.
ovunque

Teorema (cambio di variabili, sotto ipotesi caute)

Siano A e B due aperti in $\mathbb{R}^n$, e sia $\varphi: A \rightarrow B$ un diffeom. Supponiamo che $J_\varphi(x)$ e $J_\psi(x)$ siano unif. cont. in A e B , rispettivamente.

Sia $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e a supporto compatto, cioè

$$\exists K \subseteq B \text{ compatto t.c. } f(y) = 0 \quad \forall y \in B \setminus K$$

Allora vale

$$\int_B^* f(y) dy = \int_A^* f(\varphi(x)) \cdot |\text{Det } J_\varphi(x)| dx$$

e stessa cosa per gli integrali inferiori.

Oss. Se f è pure integrabile, allora anche il RHS è integrabile e vale il seguito di = tra integrali veri.

Oss. brutale La formula corrisponde al procedimento brutale "pongo $y = \varphi(x)$, l'insieme di integrazione diventa A , e $|\text{Det } J_\varphi(x)|$ è proprio il pagamento calcolato col procedimento descritto a suo tempo".

Oss. Nel caso degli integrali con $n=1$, la formula è coerente con quella di analisi 1:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) dy = \int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx$$

Non c'è il valore assoluto, ma... $\varphi: [a,b] \rightarrow [\varphi(a), \varphi(b)]$
 Ora se φ è crescente, allora il val. assol. è come se ci fosse, se φ è decrescente, allora $\varphi(a)$ e $\varphi(b)$ sono in ordine inverso, quindi compare un segno - al LHS che è come mettere il val. assol. al RHS.

Piccola variante: ad analisi 1 valeva la formula anche se $\varphi'(x)$ poteva annullarsi, quindi se φ non era un diffeomorfismo.
 C'è una formula analoga anche per integrali multipli, che non involgheremo (ora...) (formula alla LAX)

Prop. 1 Se la formula vale per $\varphi_1: A \rightarrow B$ e per $\varphi_2: B \rightarrow C$, allora vale per la composizione $\varphi_3 = \varphi_2 \circ \varphi_1: A \rightarrow C$.

Dim. $\int_C^* f(z) dz = \int_B^* f(\varphi_2(y)) |\text{Det } J_{\varphi_2}(y)| dy$
 $\uparrow$
 vale per φ_2

$= \int_A^* f(\varphi_2(\varphi_1(x))) |\text{Det } J_{\varphi_2}(\varphi_1(x))| \cdot |\text{Det } J_{\varphi_1}(x)| dx$
 $\uparrow$
 vale per φ_1 $J_{\varphi_3}(x)$ per diff. funzione composta

$$= \int_A^* f(\varphi_3(x)) |\text{Det } [J_{\varphi_2}(\varphi_1(x)) \cdot J_{\varphi_1}(x)]| dx.$$

Prop. 2 Supponiamo che la formula valga con integrali veri quando f è la caratteristica di un rettangolo, sia per $\varphi: A \rightarrow B$, sia per l'inversa $\psi: B \rightarrow A$. Allora la formula vale in generale.

Dim. Stiamo supponendo che

$$\int_B f_R(y) dy = \int_A f_R(\varphi(x)) \cdot |\text{Det } J_\varphi(x)| dx \quad \forall R \subseteq B \text{ rett.}$$

$$\int_A g_R(x) dx = \int_B g_R(\psi(y)) |\text{Det } J_\psi(y)| dy \quad \forall R \subseteq A \text{ rett.}$$

(f_R e g_R sono funzioni caratteristiche, 1 dentro, 0 fuori)
(sono tutti integrali VERI)

Step 1 La formula vale con integrali veri per tutte le SF. Infatti LHS e RHS sono appl. lineari in f , e coincidono in una base, quindi coincidono ovunque 😊.

Step 2 La formula vale con disuguaglianza per tutte le f ammissibili, cioè

$$\int_B^* f(y) dy \geq \int_A^* f(\varphi(x)) |\text{Det } J_\varphi(x)| dx$$

Infatti, prendiamo una qualunque SF $g \geq f$ in B . Per il passo precedente vale

$$\begin{aligned} \int_B^* g(y) dy &= \int_A^* g(\varphi(x)) \cdot |\text{Det } J_\varphi(x)| dx \\ &\geq \int_A^* f(\varphi(x)) \cdot |\text{Det } J_\varphi(x)| dx \end{aligned}$$

↑
ho usato che $g(\varphi(x)) \geq f(\varphi(x))$ e $|\text{Det}| \geq 0$

Facendo l'inf. sulle SF $g \geq f$ abbiamo la tesi.

Step 3 Dalla disuguaglianza segue l'uguaglianza 😊.

Infatti una formula con disug. analoga vale anche per l'inversa φ , e quindi

$$\begin{aligned}\int_B^* f(y) dy &\geq \int_A^* f(\varphi(x)) |\text{Det } J_\varphi(x)| \\ &\geq \int_B^* f(\varphi(\varphi(y))) \underbrace{|\text{Det } J_\varphi(\varphi(y))| \cdot |\text{Det } J_\varphi(y)|}_{=1} dy \\ &= \int_B^* f(y) dy.\end{aligned}$$

Subteorema La formula vale quando $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una trasformazione affine (invertibile).

Dim. Facciamo un po' di casi particolari (per la prop. 2 basta che mi limito alle caratt. dei rettangoli per φ e l'inversa φ).

Caso 1 φ è una traslazione

Banalità: il rettangolo si trasla e conserva il "ipervolume" e l'inversa è dello stesso tipo.

Caso 2 φ scambia tra di loro 2 coordinate, e il resto resta invariato

$$\varphi(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = (\dots, x_j, \dots, x_i, \dots)$$

Banalità: non cambia nulla e l'inversa è se stessa.

Caso 3 φ dilata la prima coordinata e lascia il resto uguale:

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Vale la formula in quanto il volume cambia di un fattore $|\lambda|$ e questo è proprio $|\text{Det } J_\varphi(x)|$

Caso 4 φ somma le prime 2 coordinate:

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\underbrace{x_1+x_2}_{y_1}, \underbrace{x_2}_{y_2}, \dots, \underbrace{x_n}_{y_n})$$

Che succede ad un rettangolo in arrivo, cioè in B ?

$$\text{Sia } R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

che vuol dire

$$a_1 \leq y_1 \leq b_1, \quad a_2 \leq y_2 \leq b_2, \quad \dots, \quad a_n \leq y_n \leq b_n$$

Nello spazio di partenza diventa

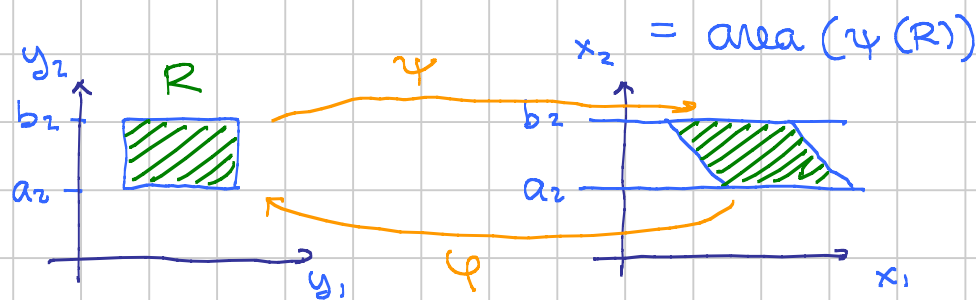
$$a_1 \leq x_1+x_2 \leq b_1, \quad a_2 \leq x_2 \leq b_2, \quad \dots, \quad a_n \leq x_n \leq b_n.$$

Ma allora nelle variabili da 3 in poi non cambia nulla.

Nelle prime 2 otteniamo che

$$\int_B f_R(y) dy = \text{area}(R) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$$

$$\int_A f_R(\varphi(x)) \cdot \underbrace{|\text{Det } J_\varphi(x)|}_{=1} dx = \int_A f_R(\varphi(x)) dx$$



Basta osservare che $\text{area parallelogrammo} = \text{area rettangolo}$.

Caso 5 φ affinità generica.

Grazie ad un lemma di algebra lineare, ogni affinità è composizione delle 4 tipologie precedenti, quindi la prop 1 duplica il teo.

