

BARICENTRO

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ misurabile. Il baricentro di A è il punto G di coordinate

$$x_G := \frac{1}{\text{Area}(A)} \iint_A x \, dx \, dy$$

"media di x in A "

$$y_G := \frac{1}{\text{Area}(A)} \iint_A y \, dx \, dy$$

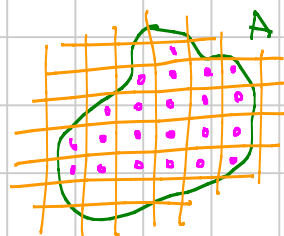
"media di y in A "

Oss. Questo coincide con il baricentro nel senso fisico del termine, supponendo che A sia a densità costante, altrimenti

$$x_G := \frac{\iint_A x \overset{\text{densità}}{\rho(x,y)} \, dx \, dy}{\underbrace{\iint_A \rho(x,y) \, dx \, dy}_{\text{massa totale}}}$$

$$y_G := \dots$$

Se immaginiamo di appross. A con un numero finito di p.ti, la def. è coerente con il baricentro di un numero finito di p.ti + procedura delle somme di Riemann



La def. è analoga per $V \subseteq \mathbb{R}^3$ semplicemente ci sono 3 coord.

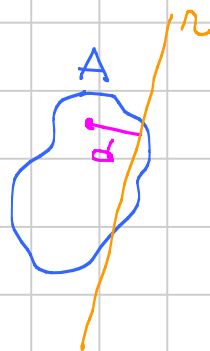
$$x_G := \frac{\iiint_V x \, dx \, dy \, dz}{\text{Vol}(V)}$$

$$y_G := \dots$$

$$z_G := \dots$$

MOMENTO DI INERZIA (Di una figura piana rispetto ad una retta r)

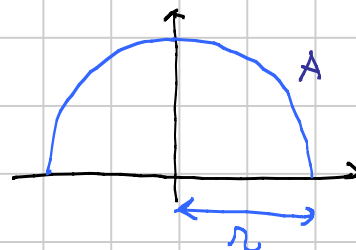
$$\text{Momento} = \iint_A \text{dist}^2((x,y), r) dx dy$$



Stesso discorso in $\mathbb{R}^3$.

— o — o —

Esempio 1 Baricentro di un semicerchio



$x_G = 0$ per simmetria

$$\iint_A y dx dy = \int_0^r dp \int_0^\pi d\theta \, p \sin \theta \cdot p = \underbrace{\int_0^r p^2 dp}_{\frac{1}{3} r^3} \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta d\theta}_2$$

$$= \frac{2}{3} r^3$$

$$\leadsto y_G := \frac{\frac{2}{3} r^3}{\frac{\pi}{2} r^2} = \boxed{\frac{4}{3\pi} r}$$

Esempio 2 Baricentro di una semisfera

$$A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, z \geq 0 \}$$

$x_G = y_G = 0$ per simmetria

$$\iiint_A z dx dy dz = \int_0^r dp \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \, p \sin \varphi \, p^2 \cos \varphi$$

$$= \underbrace{\int_0^r p^3 dp}_{\frac{1}{4} r^4} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi}_{\left[\frac{1}{2} \sin^2 \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4} r^4$$

Divido per il volume

$$z_G = \frac{\pi}{4} r^4 \cdot \frac{3 \cdot 2}{4\pi} \frac{1}{r^3} = \boxed{\frac{3}{8} r}$$

$$\frac{3}{8} r \stackrel{?}{<} \frac{4}{3\pi} r \quad 9\pi \stackrel{?}{<} 32 \quad \text{ok}$$

Esercizio Fatto in dim. n , a cosa tende la coordinata rilevante.

Esempio 3 Momento di inerzia della sfera rispetto ad una retta che passa per il centro

Prendo sfera canonica e come retta asse z

$$\iiint_S \underbrace{(x^2+y^2)}_{\substack{\text{dist}^2 \\ \text{dall'asse } z}} dx dy dz = 2 \iiint_S z^2 dx dy dz = \frac{8}{15} \pi r^5$$

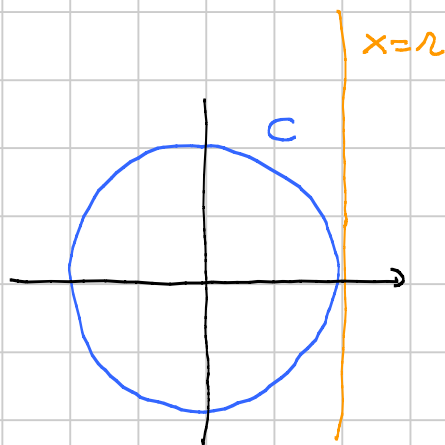
Esempio 4 Momento di inerzia di una circ. rispetto ad una retta tangente.

$$\iint_C \text{dist}^2((x,y), r) dx dy$$

$$= \iint_C (x-r)^2 dx dy$$

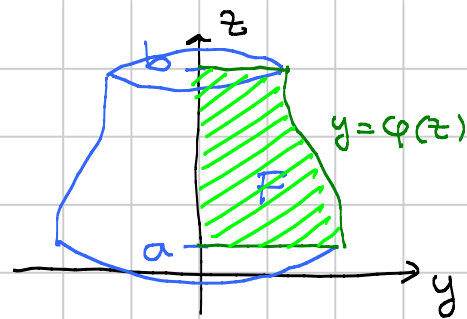
$$= \iint_C (x^2 - 2rx + r^2) dx dy = \pi r^4 + \int_0^r dr \int_0^{2\pi} d\theta \, r^2 \cos^2 \theta \cdot r$$
$$= \pi r^4 + \frac{1}{4} r^4 \pi$$

— 0 — 0 —



SOLIDI DI ROTAZIONE

Data una figura $F \subseteq \mathbb{R}^2$, che penso come piano yz , considero il solido S ottenuto ruotando F intorno all'asse z .



Caso speciale: quello in cui

$$F := \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : a \leq z \leq b, 0 \leq y \leq \varphi(z)\}$$

Descrizione del solido

- In coord. cilindriche diventa

$$\theta \in [0, 2\pi] \quad (\rho, z) \in F$$

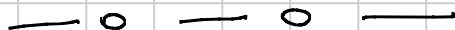
Nel caso speciale diventa

$$\rho \in [0, \varphi(z)] \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad z \in [a, b]$$

- Equazione cartesiana nel caso speciale

$$z \in [a, b] \quad x^2 + y^2 \leq \varphi(z)^2$$

la sezione ad
altezza z è un cerchio
di raggio $\varphi(z)$.



VOLUME DI UN SOLIDO DI ROTAZIONE

- caso speciale
- caso generale
- teorema GULDINO 1

Caso speciale

$$\begin{aligned} \text{Vol}(S) &= \iiint_S 1 \, dx \, dy \, dz \stackrel{\text{sezioni}}{=} \int_a^b dz \, \text{Area}(S_z) \\ &= \pi \int_a^b \varphi^2(z) \, dz \end{aligned}$$

$$\text{Vol}(S) = \pi \int_a^b \varphi^2(z) \, dz$$

Caso generale

Uso coordinate cilindriche

$$\begin{aligned} \text{Vol}(S) &= \iiint_S 1 \, dx \, dy \, dz = \iiint_{S'} \rho \, d\rho \, d\theta \, dz \\ &\stackrel{S \text{ in coord. cilindriche}}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_F \rho \, d\rho \, dz = 2\pi \int_F \rho \, d\rho \, dz \end{aligned}$$

Ricambiando il nome alle variabili otteniamo

$$\text{Vol}(S) = 2\pi \int_F y \, dy \, dz$$

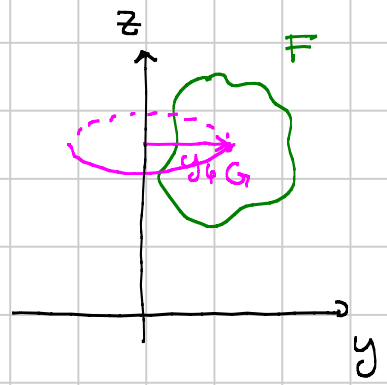
controllare che sia
coerente con il caso
prec.

Teorema di Guldino 1

$$\text{Vol}(S) = \text{Area}(F) \cdot 2\pi y_G$$

↑
area della
figura che
ruota

↑
lunghezza
circ. descritta
da G durante
la rotazione



Dim. Usando la formula generale

$$\text{Vol}(S) = 2\pi \iint_F y \, dy \, dz = \text{Area}(F) \cdot 2\pi \underbrace{\frac{\iint_F y \, dy \, dz}{\text{Area}(F)}}_{y_G}$$

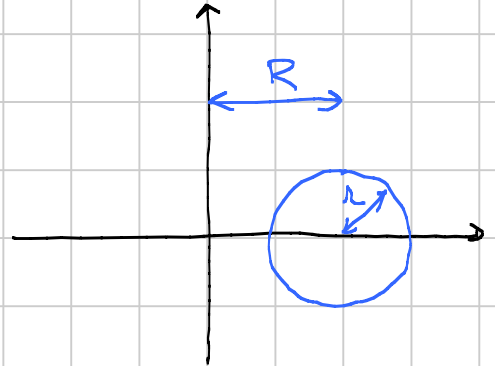
Guldino è comodo quando il pto G è noto per ragioni sue

Esempio (TORO)



$$\text{Vol}(\text{Toro}) = \text{Area}(F) \cdot 2\pi y_G$$

$$= \pi r^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 R r^2$$



Esercizio provare con semicerchio e sfera.
(cilindro e cono).

— o — o —