

INTEGRALI TRIPLI④ Notazioni

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz$$

↑
zona di integrazione

Si intende che

- $A \subseteq \mathbb{R}^3$ limitato
- $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è limitata

② Significato fisico Pensiamo A come un solido

Supponiamo $f(x, y, z) > 0$ e rappresenta la densità del materiale di cui è fatto il solido che varia da p.to a p.to.

Come calcolo la massa del solido?

→ se A è un parallelepipedo e f è costante, allora basta moltiplicare la densità per il volume (caso banale)

→ altrimenti posso scomporre A in "parall. piccol" e fare finta che la densità sia costante su ognuno di essi.

Poi sommo la massa dei singoli (somma di Riemann o Darboux)

③ Definizione formale

→ Caso banale : $A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$

$f(x, y, z) = \lambda$ in A (e 0 fuori di A)

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz = \lambda \underbrace{\prod_{i=1}^3 (b_i - a_i)}_{\text{Vol}(A)}$$

→ Caso semi-banale : SF = comb. lin. di casi banali

→ Caso generale: definisco al solito modo int. sup. e inf. e se coincidono...

Prop. Valgono le solite proprietà di sempre con le stesse dim. di analisi 1:

- linearità
- monotonia (se $f \leq g$, allora...)
- continuità (integrale di $|f|$ è $\geq$ del val. ass. di int. f)
- integrabilità di $f \cdot g$ e $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$

Allo stesso modo si dice che $A \subseteq \mathbb{R}^3$ è misurabile se la funzione indicatrice di A (1 in A e 0 fuori) è integrabile.

Prop. Se $A \subseteq \mathbb{R}^3$ è misurabile e $f: A \rightarrow \mathbb{R}^3$ è continua, allora f è integrabile in A (stessa dim. del caso di due variabili)

4 Tecniche di calcolo = formule di riduzione

• formula sui parallelepipedi $3 = 1 + 1 + 1$

• integrale per colonne $3 = 2 + 1$

• integrale per sezioni $3 = 1 + 2$

— o — o —

Sui parallelepipedi $A := [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz f(x, y, z)$$

permutando le variabili
otengo 6 formule

Esempio 1

$$A = [0, 1] \times [-1, 1] \times [0, 2]$$

$$f(x, y, z) = x + yz$$

$$\iiint_A (x + yz) dx dy dz = \int_0^1 dx \int_{-1}^1 dy \int_0^2 dz (x + yz)$$

$$= \int_0^1 dx \int_{-1}^1 dy \underbrace{\left[xz + \frac{1}{2} y z^2 \right]_{z=0}^{z=2}}_{\text{primitiva in } z}$$

$$= \int_0^1 dx \int_{-1}^1 dy (2x + 2y)$$

$$= \int_0^1 dx \left[2xy + y^2 \right]_{y=-1}^{y=1} = \int_0^1 dx (2x + 1 + 2x - 1)$$

$$= \int_0^1 4x dx = \left[2x^2 \right]_{x=0}^{x=1} = 2.$$

2° modo, più astuto

$$\iiint_A (x + yz) dx dy dz = \iiint_A x dx dy dz + \underbrace{\iiint_A yz dx dy dz}_{0''}$$

$$\iiint_A yz dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^2 dz \underbrace{\int_{-1}^1 dy yz}_{0''} = \int_0^1 dx \int_0^2 z dz \underbrace{\int_{-1}^1 y dy}_{0''}$$

$$\iiint_A x dx dy dz = \int_0^1 dx \underbrace{\int_{-1}^1 dy \int_0^2 dz}_{\text{area di } [-1, 1] \times [0, 2] = 2 \cdot 2 = 4} (x)$$

$$= \int_0^1 x dx \underbrace{\int_{-1}^1 dy \int_0^2 dz}_{\text{area di } [-1, 1] \times [0, 2] = 2 \cdot 2 = 4}$$

area di $[-1, 1] \times [0, 2] = 2 \cdot 2 = 4$

$$= \int_0^1 4x dx = 2.$$

Integrale per colonne

$$3 = 2 + 1$$

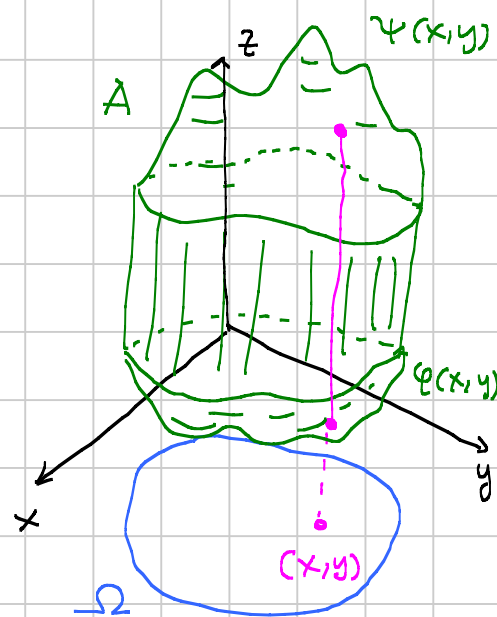
Def. Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice normale rispetto al piano xy se si può scrivere nella seguente forma

$$A := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y) \}$$

dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ è un sottoinsieme limitato (detto "base") e $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $\psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni che descrivono i "tappi".

Prop. Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ è misurabile e φ e ψ sono integrabili, allora $A \subseteq \mathbb{R}^3$ è misurabile.

Oss. Analogamente si definiscono gli insiemi normali rispetto agli altri piani.



Formula di riduzione per colonne

Se A è normale risp. al piano xy , allora

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\Omega} dx dy \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} dz f(x, y, z)$$

integrale sulla colonna
che sta sopra il pto (x, y)

— o — o —

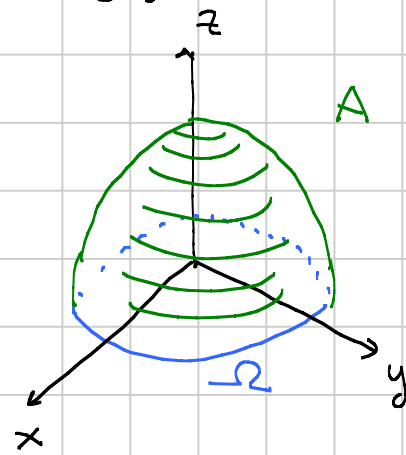
Esempio 1

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$$

$$f(x, y, z) = x^2 z$$

Posso scrivere A come insieme normale
nella forma

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + y^2 \leq 1}_{\substack{\text{descrive la base } \Omega \\ \varphi(x, y)}}, \underbrace{0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2}_{\substack{\text{descrive la colonna} \\ \psi(x, y)}}\}$$



$$\iiint_A x^2 z \, dx \, dy \, dz = \iint_{\Omega} dx \, dy \int_0^{1-x^2-y^2} x^2 z \, dz$$

$$= \iint_{\Omega} x^2 dx \, dy \int_0^{1-x^2-y^2} z \, dz$$

$$= \iint_{\Omega} x^2 dx \, dy \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{z=0}^{z=1-x^2-y^2}$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} x^2 (1 - x^2 - y^2)^2 dx \, dy$$

polari $\star$ $= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \, \rho^2 \cos^2 \theta (1 - \rho^2)^2 \rho$ $\uparrow$ PAG.

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \rho^3 (1 - \rho^2)^2 d\rho = \text{banale analisi 1.}$$

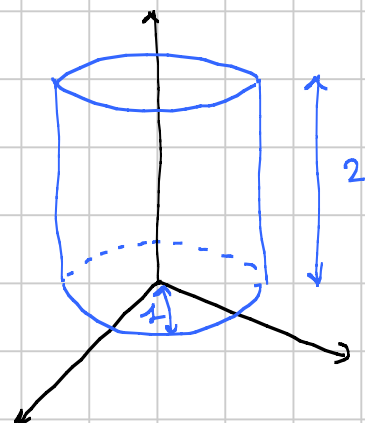
Esempio 2 A = cilindro in figura

$$\iiint_A (z^2 + y^2 \sin x) \, dx \, dy \, dz$$

$$= \iiint_A z^2 \, \dots + \underbrace{\iiint_A y^2 \sin x \, \dots}_0$$

• l'int. è dispari in x

• A è invariante rispetto a $(x, y, z) \rightarrow (-x, y, z)$



Scriviamo A come insieme normale

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2 \}$$

$$\begin{aligned} \iiint_A z^2 \, dx \, dy \, dz &= \iint_{\Omega} dx \, dy \int_0^2 dz \, z^2 \\ &= \iint_{\Omega} dx \, dy \left[\frac{1}{3} z^3 \right]_{z=0}^{z=2} \\ &= \frac{8}{3} \iint_{\Omega} dx \, dy \\ &= \frac{8}{3} \text{Area}(\Omega) = \frac{8}{3} \pi. \end{aligned}$$

— 0 — 0 —