

CONVESSITÀ E CONTINUITÀ

Analisi 1 Se $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa ($C \subseteq \mathbb{R}$ è convesso) allora

- (i) f è continua in $\text{Int}(C)$
- (ii) f è loc. Dip. in $\text{Int}(C)$, cioè f è Dip. in A per ogni compatto $A \subseteq \text{Int}(C)$.

Analisi 2 Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso e sia $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ convessa. Allora

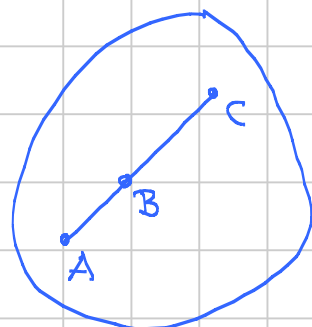
- (i) f è continua in $\text{Int}(C)$
- (ii) f è Dip. in A per ogni $A \subseteq \text{Int}(C)$ con A cpt.

Esempi di ottimalità: vedi Analisi 1.
— o — o —

- Road map
- ① f è loc. limitata dall'alto in $\text{Int}(C)$
 - ② f è continua in $\text{Int}(C)$
 - ③ f è loc. limitata dal basso in $\text{Int}(C)$
 - ④ f è loc. Dip. in $\text{Int}(C)$.
- o — o —

Lemma Anche in $\mathbb{R}^n$ vale che $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa se e solo se verifica la disug. dei 3 rapp. increm.

$$\frac{f(B) - f(A)}{|B - A|} \leq \frac{f(C) - f(A)}{|C - A|} \leq \frac{f(C) - f(B)}{|C - B|}$$



Dim Già sappiamo che la convessità è un fatto 1-dim., quindi basta restringersi al segmento AC.

1) Locale limitatezza dall'alto in Int(C)

Prop Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme qualunque.

Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione qualunque.

Allora i seguenti due fatti sono equivalenti

- (1) Per ogni $x_0 \in \text{Int}(A)$ esiste un intorno B di x_0 in A in cui f è limitata dall'alto.
- (2) Per ogni compatto $K \subseteq \text{Int}(A)$ si ha che f è limitata dall'alto in K .



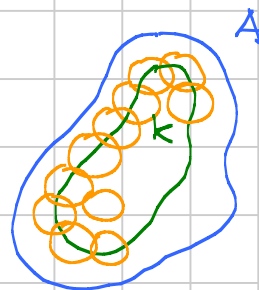
Dim. (2) $\Rightarrow$ (1) Basta prendere un intorno B cpt $\subseteq \text{Int}(A)$

(1) $\Rightarrow$ (2) Prendo $K \subseteq \text{Int}(A)$

Per ogni $x_0 \in K$ trovo un intorno in cui f è limitata dall'alto (la costante può dipendere dall'intorno).

Questi intorni ricoprono K che è cpt., quindi un s. ricopr. finito basta.

Ora prendo come limitazione dall'alto il max di quelle sugli intorni.



Def. Una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è loc. limitata dall'alto in $\text{Int}(A)$ se verifica una delle 2 propr. equivalenti.

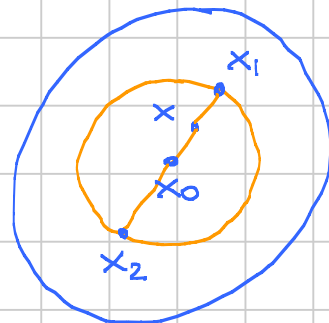
Teorema Se $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso e $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa, allora f è loc. Dim. dall'alto in $\text{Int}(C)$.

Dim. Lo dim. in versione 1 usando intorni "ipercubici".

Questi hanno un numero finito di pti estremali e quindi f è $\leq$ del max dei valori assunti nei pti estremali.

2) Continuità di f in $\text{Int}(C)$

Sia $x_0 \in \text{Int}(C)$. Sia $B_r(x_0)$ una palla in cui f è limitata dall'alto.
Sia $x \in B_r(x_0)$.



- Supponiamo $f(x) \geq f(x_0)$. Considero x_1 come in figura.
Per il lemma dei 3 rapporti vale

$$0 \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{|x - x_0|} \leq \underbrace{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{|x_1 - x_0|}}_{\substack{\leq M \\ \text{lim. dall'alto}}} \leq \frac{M - f(x_0)}{r}$$

- Supponiamo ora $f(x) \leq f(x_0)$. Considero x_2 come in fig.
Uso il lemma con $x \sim x_0 \sim x_2$. Ottengo

$$0 \leq \frac{f(x_0) - f(x)}{|x_0 - x|} \leq \underbrace{\frac{f(x_2) - f(x_0)}{|x_2 - x_0|}}_{\substack{\leq M \\ \text{lim. dall'alto}}} \leq \frac{M - f(x_0)}{r}$$

In ogni caso ho dimostrato che

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \underbrace{\frac{M - f(x_0)}{r}}_{\substack{\text{non dipende} \\ \text{da } x}} |x - x_0|$$

Quando faccio il limite per $x \rightarrow x_0$ ho la tesi.
— o — o —

3) Loc. limitatezza di f in $\text{Int}(C)$

Dim. In versione (2) considero un qualunque cpt. $k \in \text{Int}(C)$
so già che f è continua in k .
Per W ammette min. $\leadsto$ è limitata dal basso.

4) Locale Lipschitzianità in Int(C)

Versione debole Per ogni $x_0 \in \text{Int}(C)$ esiste $\epsilon > 0$ tale che f è lip. in $B_\epsilon(x_0)$

Versione forte Per ogni cpt. $K \subseteq \text{Int}(C)$ si ha che f è lip. in K .

Dim. versione debole Prendo $x_0 \in \text{Int}(C)$.

Fisso $R > 0$ tale che $B_R(x_0) \subseteq \text{Int}(C)$

Fisso $\epsilon \in (0, R)$ $\uparrow$ chiusa

Dico che f è lip. in $B_\epsilon(x_0)$

Prendo 2 pti qualunque x e y in $B_\epsilon(x_0)$ e vedo che succede. Suppongo wlog $f(y) \geq f(x)$ e prendo z come in figura. Per il solito lemma vale

$$0 \leq \frac{f(y) - f(x)}{|y - x|} \leq \frac{f(z) - f(x)}{|z - x|}$$

Ora

$$f(z) - f(x) \leq M - m$$

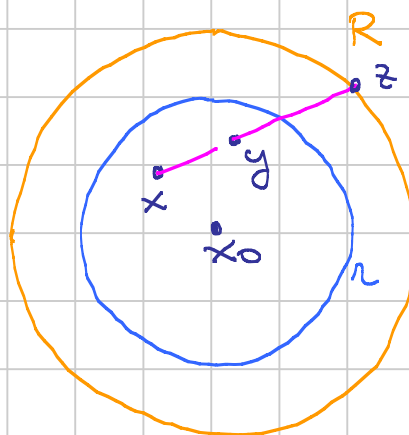
$\uparrow$ $\uparrow$
limitazioni dall'alto e dal basso in $B_R(x_0)$

$$|z - x| \geq R - \epsilon$$

Se fosse così avrei concluso che

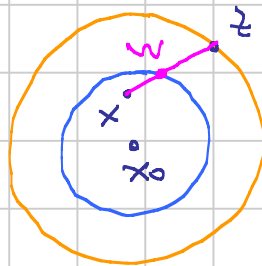
$$|f(y) - f(x)| \leq \boxed{\frac{M - m}{R - \epsilon}} |y - x|$$

L non dipende da x e y



Dimostriamo per bene che $|z-x| \geq R-\epsilon$

$$\begin{aligned} R = |z-x_0| &\leq |z-w| + |w-x_0| \\ &= |z-w| + \epsilon \\ &\leq |z-x| + \epsilon \end{aligned}$$



Aggiustandolo diventa proprio $|z-x| \geq R-\epsilon$.

Dovrebbe essere vero che le 2 versioni di locale lip. coincidono, ed in particolare che debole $\Rightarrow$ forte.

Idea Per ogni p.to di K esiste un intorno in cui f è lip.

Estraggo un ricoprimento finito $B_1, \dots, B_k$ e spero che sia vero che

f lip. in B_i per ogni $i=1, \dots, k$



f lip. in $\bigcup_{i=1}^k B_i$.

Esercizio Indagare se l'implicazione è vera e perché.