

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE (Più moltiplicatori)

Setting : un sottoinsieme $V \subseteq \mathbb{R}^n$ descritto da k equazioni

$$V := \{x \in \mathbb{R}^n : g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0\}$$

dove $g_1, \dots, g_k : D \rightarrow \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$

Obiettivo : trovare max/min di una certa $f(x)$ data ristretta all'insieme V .

Brutale : ogni equazione che aggiungo "fa scendere di 1 la dimensione di V " che quindi "normalmente" avrà dimensione $n-k$ (k si dice co-dimensione)

Teorema (Moltiplicatori di Lagrange) (Misterioso)

Siano $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, $f : B_r(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$, $g_1, \dots, g_k : B_r(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$.

Sia V il luogo di zeri di $g_1, \dots, g_k$.

Supponiamo che

(i) $f, g_1, \dots, g_k$ sono di classe C^1 in $B_r(x_0)$

(ii) $x_0 \in V$

(iii) x_0 sia p.to di max/min per f ristretta a $V \cap B_r(x_0)$

Allora vale ALMENO una delle seguenti possibilità

(1) $\nabla g_1(x_0), \dots, \nabla g_k(x_0)$ sono k vettori LINEARMENTE DIP.

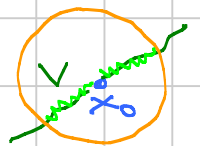
(cioè la matrice che li ha come righe ha rango $\leq k-1$)

(2) $\nabla f(x_0)$ è combinazione lineare di $\nabla g_1(x_0), \dots, \nabla g_k(x_0)$

cioè esistono numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tali che

$$\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(x_0)$$

multiplic.
di Lagrange.



Operativamente:

- Spero che Weierstrass garantisca esistenza di max/min.
- Cerco i p.ti di tipo (1). Per questo devo risolvere un sistema (1° sistema) composto da
 - k equazioni di V $g_1 = \dots = g_k = 0$
 - Se equazioni di annullamento di tutti i minori $k \times k$ della matrice che ha $\nabla g_1, \dots, \nabla g_k$ come righe $\binom{n}{k}$ equazioni.

In tutto sono $k + \binom{n}{k}$ equazioni $\rightarrow$ mi aspetto NO soluz.

- Cerco i p.ti di tipo (2). Devo risolvere il 2° sistema composto da

$$\begin{cases} \nabla f(x) = \lambda_1 \nabla g_1(x) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(x) & n \text{ equ} \\ g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0 & k \text{ equ.} \end{cases}$$

In tutto $n+k$ equ in $n+k$ incognite $\rightarrow$ mi aspetto sol. in numero FINITO

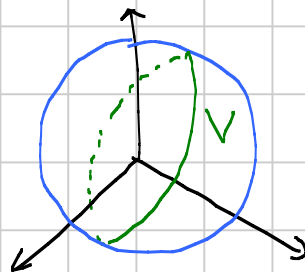
Oss. Risolvere il 2° sistema è equivalente a trovare i p.ti stazionari della funzione di $n+k$ variabili

$$F(x, \lambda_1, \dots, \lambda_k) := f(x) - \lambda_1 g_1(x) - \dots - \lambda_k g_k(x)$$

Esempio Supponiamo

$$V := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + y^2 + z^2 = 1}_{\text{sfera}}, \overbrace{x + 2y + 3z = 0}^{\text{piano}} \}$$

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \nabla g_1 \\ \nabla g_2 \end{matrix}$$



La matrice ha rango 1 ($\Rightarrow$)

$$4x - 2y = 0$$

$$6y - 4z = 0$$

$$6x - 2z = 0$$

$$y = 2x$$

$$z = 3x$$

$$z = 3x$$

∇g_1 e ∇g_2 sono lin. DIP. ($\Leftrightarrow$) $y = 2x$ e $z = 3x$

Se sostituisco nell'eq. del piano trovo $x=y=z=0$, il che non è compatibile con la sfera.

Il 1° sistema non ha soluzione.

Domanda: se fosse $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + 2y + 3z = a\}$ per quali valori di a il 1° sistema avrebbe soluzione?

Risposta: per i valori di a per cui il piano è tangente alla sfera (fare i conti per rendersene conto).

Esempio $f(x,y,z) = x + y + z$ $D = \mathbb{R}^3$

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 2y + z^2 = 5, xy = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

Domanda: max/min di f in V .

Passo 1 V è chiuso (intersezione di chiusi)

Passo 2 V è limitato. Dalla 1ª equ. + disuguaglianze deduco che $x \in [0, \frac{5}{2}]$, $y \in [0, \frac{5}{2}]$, $z \in [0, \sqrt{5}]$

Passo 3 Weierstrass $\Rightarrow$ esistono max e min (ho usato continuità di $f(x,y,z)$ e V cpt.)

Passo 4 Impostiamo il 1° sistema

$$\begin{matrix} \nabla g_1 \\ \nabla g_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2z \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rango} \leq 1 \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2xz = 0 \\ -2yz = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{matrix} x = y \\ xz = 0 \end{matrix}$$

$$xz = 0 \quad \begin{cases} \nearrow x = 0 \rightsquigarrow y = 0 \rightsquigarrow \text{incompatibile con } xy = 1 \\ \searrow z = 0 \rightsquigarrow x + y = \frac{5}{2} \rightsquigarrow x = y = \frac{5}{4} \rightsquigarrow \text{incomp. con } xy = 1 \end{cases}$$

$\uparrow$
 $g_1 = 0$

$\uparrow$
 $x = y$

Conclusione: il 1° sistema non ha soluzione. ☹️

Passo 5 Secondo sistema $\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = 2\lambda + \mu y \\ 1 = 2\lambda + \mu x \\ 1 = 2\lambda z \\ 2x + 2y + z^2 = 5 \\ xy = 1 \end{array} \right. \rightarrow \text{sottraigo} \rightsquigarrow \mu(x - y) = 0$$

$$\mu(x - y) = 0 \rightsquigarrow \mu = 0 \rightsquigarrow x = y \rightsquigarrow x = y = 1 \rightsquigarrow z = 1 \rightsquigarrow (1, 1, 1)$$

$\uparrow$
 $xy = 1$
 $x \geq 0 \quad y \geq 0$

$\uparrow$
 $g_1 \text{ e } z \geq 0$

$$\mu = 0 \rightsquigarrow \lambda = \frac{1}{2} \rightsquigarrow z = 1 \rightsquigarrow x + y = 2 \rightsquigarrow x = y = 1$$

$\uparrow$
 3^a equ.

$\uparrow$
 g_1

$\uparrow$
 g_2

Passo 6 Controllo i "bordi dei bordi", cioè vado a vedere che succede quando i $\geq$ diventano $=$.

- $x=0 \rightsquigarrow$ nessun p.to $xy=1$
- $y=0 \rightsquigarrow$ Idem
- $z=0 \rightsquigarrow x+y = \frac{5}{2} \rightsquigarrow x=2, y=\frac{1}{2}$ o viceversa
 $\uparrow$
 $xy=1$

Produce i candidati

$$\left(\frac{1}{2}, 2, 0\right)$$

$$\left(2, \frac{1}{2}, 0\right)$$

Passo 7 Sostituisco i candidati in $f(x, y, z)$

- $f \overset{\text{p.to max.}}{\left(1, 1, 1\right)} = 3 \leftarrow \text{MAX}$
- $f \left(\frac{1}{2}, 2, 0\right) = f \left(2, \frac{1}{2}, 0\right) = \frac{5}{2} \leftarrow \text{MIN}$
 $\swarrow \quad \searrow$
 p.to min.

Procedimento alternativo :

SOSTITUZIONE DEL VINCOLO

$$f(x, y, z) = x + y + z$$

$$2x + 2y + z^2 = 5$$

$$xy = 1$$

$$\downarrow$$
$$x + y = \frac{5 - z^2}{2}$$

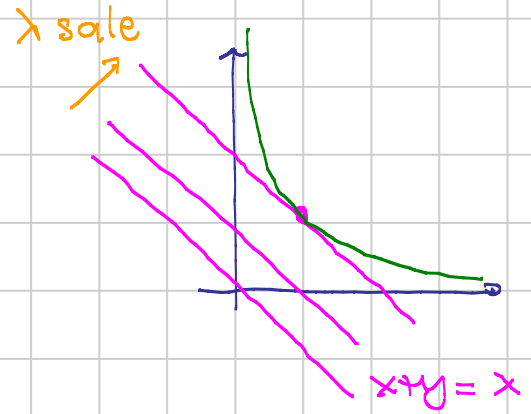
Quindi finché rimango in V vale

$$f(x, y, z) = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} z^2 + z$$

Quindi fare max/min di $x+y+z$ equivale a fare max/min di $\frac{5}{2} - \frac{1}{2} z^2 + z$.

Dove varia z quando $(x, y, z) \in V$? $z^2 = 5 - 2x - 2y$
 z^2 varia da 0 al $5 - 2$ (min $x+y$), che si realizza per $x=y=1$.

Quindi non resta che studiare $\frac{5}{2} - \frac{1}{2}z^2 + z$ al variare di z in $[0, 1]$



— 0 — 0 —