

Matrice Hessiana e studio locale di un pto stazionario

$$\{Hf(x_0)\}_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \quad \text{matrice } n \times n$$

Taylor di ordine 2

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), R \rangle + \frac{1}{2} q(R) + o(|R|^2)$$

dove $q(R)$ è una forma quadratica in R che è quella associata alla matrice Hessiana, quindi

$$q(R) = R^t Hf(x_0) R$$

Ad esempio, se siamo in due variabili, la formula diventa

$$f(x_0 + R, y_0 + k) = f(x_0, y_0)$$

$$+ f_x(x_0, y_0) R + f_y(x_0, y_0) k$$

$$+ \frac{1}{2} [f_{xx}(x_0, y_0) R^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0) Rk + f_{yy}(\dots) k^2]$$

$$q(R, k) = (R, k) \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ k \end{pmatrix}$$

$$+ o(R^2 + k^2)$$

Def. Un p.to x_0 si dice stazionario per $f(x)$ se

$$\nabla f(x_0) = 0$$

sistema di n equazioni

Teorema Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$, sia $\delta > 0$, sia $f: B_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione

Supponiamo che

(i) f ammette derivate parziali fino all'ordine 2 continue in $B_\delta(x_0)$ (ma forse un po' si può risparmiare)

(ii) x_0 p.to stazionario.

Allora valgono queste implicazioni.

- $Hf(x_0)$ def. pos. $\Rightarrow x_0$ p.to di min. loc.
- $Hf(x_0)$ def. neg. $\Rightarrow x_0$ p.to di max. loc.
- $Hf(x_0)$ indefinita $\Rightarrow x_0$ non è né max, né min. loc.
- $Hf(x_0)$ solo semidef. pos./neg. $\Rightarrow$ BOM (entrano in gioco i termini succ.)

Dim. $Hf(x_0)$ def. pos. Per la proprietà fondamentale

$$\exists m > 0 \quad \text{t.c.} \quad q(R) \geq m |R|^2 \quad \forall R \in \mathbb{R}^n$$

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + \underbrace{\langle \nabla f(x_0), R \rangle}_0 + \frac{1}{2} q(R) + |R|^2 \omega(R) \geq m |R|^2$$

$$f(x_0 + R) - f(x_0) \geq m |R|^2 + |R|^2 \omega(R)$$

$$= |R|^2 (m + \underbrace{\omega(R)}_0)$$

$\exists \delta_0 \in (0, \delta)$ t.c. questo termine è ≥ 0 se $|R| \leq \delta_0$

Da questo deduco che

$$f(x_0 + R) \geq f(x_0) \quad \text{se} \quad |R| \leq \delta_0$$

Posso in realtà fare meglio, cioè scegliere δ_0 t.c.

$$u + w(R) \geq \frac{m}{2} \quad \forall R \text{ con } |R| \leq \delta_0$$

Così facendo ottengo che

$$f(x_0 + R) > f(x_0) \quad \forall R \text{ con } 0 < |R| < \delta_0$$

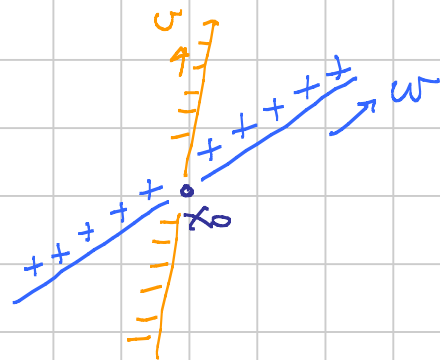
cioè x_0 è un pto di min. loc. stretto.

Hf(x_0) def. neg. Stessa cosa con $q(R) \leq -m|R|^2$ con $m > 0$.

Hf(x_0) indefinita Per ipotesi sappiamo che

$$\exists v \in \mathbb{R}^n : q(v) < 0$$

$$\exists w \in \mathbb{R}^n : q(w) > 0$$



Considero

$$f(x_0 + tw) = f(x_0) + \frac{1}{2} q(tw) + |tw|^2 \omega(tw)$$

↑
mi muovo in
direzione w

$$= f(x_0) + \frac{1}{2} t^2 q(w) + t^2 |w|^2 \omega(tw)$$

$$f(x_0 + tw) - f(x_0) = t^2 \left(\frac{1}{2} q(w) + |w|^2 \omega(tw) \right)$$

↓
 $\frac{1}{2} q(w)$, quindi è positivo
quando t è abbastanza
vicino a 0

Analogamente

$$f(x_0 + tv) - f(x_0) = t^2 \left(\frac{1}{2} q(v) + |v|^2 \omega(tv) \right)$$

— 0 — 0 —
negativo quando t è vicino a 0.

Interpretazione "montana"



Direzioni con $q(v) < 0 \leadsto$ si vede un max locale
" " $q(w) > 0 \leadsto$ si vede un min. locale.

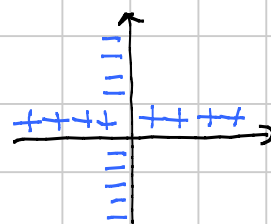
Achtung! Negli altri casi non si può dedurre nulla

• $f(x,y) = x^2 + y^4$ $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0$ (semidef. pos.)

$(0,0)$ è p.to di min. loc. stretto perché $f(x,y) > 0$ se $(x,y) \neq (0,0)$

• $f(x,y) = x^2 - y^4$ $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0$ come prima

$(0,0)$ non è max/min



Esempio 1 $f(x,y) = \sin x \cdot \arctan y$ $(x_0, y_0) = (0,0)$

$f(x,y) = xy + o(x^2 + y^2) \Rightarrow \nabla f(0,0) = (0,0) \Rightarrow$ p.to staz.

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ indefinita $\Rightarrow (0,0)$ non è p.to di max/min $\leadsto$ sella.

Esempio 2 $f(x,y) = \cos x \cdot \cos y$ $(x_0, y_0) = (0,0)$

$f(x,y) = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{2}\right) + o(x^2 + y^2)$

$= 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + o(x^2 + y^2) \Rightarrow \nabla f(0,0) = (0,0)$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{def. neg.} \Rightarrow (0,0) \text{ p.to di max}$$

(pure globale perché $f(x,y) \leq 1$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $f(0,0) = 1$)

Esempio 3 $f(x,y) = x \cos y - y \cos x$

$$f(x,y) = x - y + o(\sqrt{x^2 + y^2}) \Rightarrow (0,0) \text{ non è stazionario}$$

Esempio 4 $f(x,y) = x \arctan y - y \arctan x$

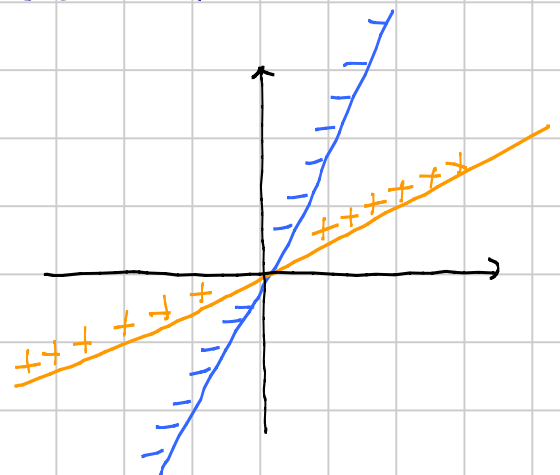
$$f(x,y) = \cancel{xy} - \cancel{yx} + o(x^2 + y^2) \Rightarrow \text{gradiente e } Hf(0,0) \text{ nulli !!}$$

Entrano in gioco i termini successivi

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x \left(y - \frac{1}{3} y^3 \right) - y \left(x - \frac{1}{3} x^3 \right) + o((x^2 + y^2)^2) \\ &= -\frac{1}{3} xy^3 + \frac{1}{3} yx^3 = \frac{1}{3} \underbrace{xy(x^2 - y^2)}_{\text{non ha un segno}} + o(\dots) \end{aligned}$$

$$f(2t, t) = \frac{1}{3} 2t \cdot t (3t^2) + o(t^4) \rightsquigarrow \text{qui vedo min}$$

$$f(t, 2t) = -2t^4 + o(t^4) \rightsquigarrow \text{qui vedo max}$$



Esempio 5

$$f(x,y) = x^4 + y^2 + x^2y$$

$$\nabla f(0,0) = (0,0)$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$f(x,y) = x^4 + x^2y + \frac{y^2}{4} + \frac{3y^2}{4} = \left(x^2 + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$$

$\Rightarrow f(x,y) \geq 0$ sempre $\Rightarrow (0,0)$ p.to min. loc.

Esempio 6

$$f(x,y) = x^4 + y^2 + xy^2$$

$$f(x,y) = x^4 + y^2 \underbrace{(1+x)}_{\substack{\text{positivo} \\ \text{vicino a } (0,0)}}$$

$\Rightarrow f(x,y) \geq 0$ per (x,y)
vicino all'origine

