

Derivate successive in più variabili

Esempio $f(x, y) = x^2 + 2x^3y^2 + y^4$

$$f_x(x, y) = 2x + 6x^2y^2$$

$$f_y(x, y) = 4x^3y + 4y^3$$

$$f_{xx}(x, y) = 2 + 12xy^2$$

$$f_{xy}(x, y) = (f_x)_y(x, y) = 12x^2y$$

$$f_{yx}(x, y) = 12x^2y$$

$$f_{yy}(x, y) = 4x^3 + 12y^2$$

Uno può andare avanti, ottenendo $f_{xxx}(x, y) = 12y^2$ e così via...

Oss. A priori, le derivate parziali k -esime di una funzione di n variabili sarebbero n^k

Notazioni

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = D_{xx}f = \partial_{xx}f$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = D_{xy}f = \partial_{xy}f$$

$$\frac{\partial^{2+7} f}{\partial y^{8+0} \partial x^{2+7}}$$

È vero che le derivate miste coincidono sempre?

→ In generale NO

→ Sotto ipotesi ragionevoli SI.

Corollario Sotto hp ragionevoli, le derivate k -esime di una funzione di 2 variabili sono $k+1$ e non 2^k
(conta solo quante volte derivo rispetto ad x)

E se possiamo in n variabili?

$$f_{x y y x y} = f_{x y y y x} = f_{y x y y x} = f_{y y x y x} = f_{y y y x x}$$

Oss. Basta dimostrare il te. di scambio in due variabili per le derivate seconde miste.

Teorema (di scambio dell'ordine di derivazione)
(Teorema di Schwarz)

Sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, sia $\delta > 0$, sia $f: (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione.

Supponiamo che

(i) $f_{xy}(x, y)$ e $f_{yx}(x, y)$ esistono in tutto il rettangolo

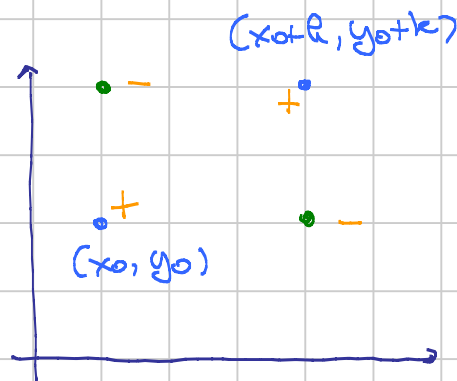
(ii) $f_{xy}(x, y)$ e $f_{yx}(x, y)$ sono continue in (x_0, y_0) .

Allora

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Dim. Considero la funzione

$$g(r, k) = f(x_0 + r, y_0 + k) + f(x_0, y_0) - f(x_0 + r, y_0) - f(x_0, y_0 + k)$$



Considero altre due funzioni di 1 variabile

$$\varphi(t) := f(t, y_0 + k) - f(t, y_0)$$

$$\varphi'(t) = f_x(t, y_0 + k) - f_x(t, y_0)$$

$$\psi(t) := f(x_0 + r, t) - f(x_0, t)$$

$$\psi'(t) = f_y(x_0 + r, t) - f_y(x_0, t)$$

$$g(r, k) = \underbrace{\varphi(x_0 + r)}_{\textcircled{1} \text{ e } \textcircled{3}} - \underbrace{\varphi(x_0)}_{\textcircled{2} \text{ e } \textcircled{4}} = r \varphi'(x_0 + c_1)$$

↑
Lagrange

$$= R [f_x(x_0+c_1, y_0+k) - f_x(x_0+c_1, y_0)]$$

=
↑

Lagrange nella
2^a variabile

$$Rk f_{xy}(x_0+c_1, y_0+c_2)$$

Analogamente

$$g(R, k) = \psi(y_0+k) - \psi(y_0) =$$

$\begin{matrix} 1 \in 4 \\ 2 \in 3 \end{matrix}$

$$= k \psi'(y_0+c_3)$$

$$= k [f_y(x_0+R, y_0+c_3) - f_y(x_0, y_0+c_3)]$$

$$= kR f_{yx}(x_0+c_4, y_0+c_3)$$

Ora osserviamo che

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{g(R, R)}{R^2} = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\cancel{R}^2 f_{xy}(x_0+\overset{0}{\uparrow}c_1, y_0+\overset{0}{\uparrow}c_2)}{\cancel{R}^2} = f_{xy}(x_0, y_0)$$

mentre usando l'altra formula viene

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{g(R, R)}{R^2} = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{R^2 f_{yx}(x_0+c_4, y_0+c_3)}{R^2} = f_{yx}(x_0, y_0).$$

— 0 — 0 —

Teorema (Altro teorema di inversione)

Stesso setting di Schwarz.

Supponiamo che

(i) $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ esistano nel rettangolo

(ii) $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ sono diff. in (x_0, y_0)

Allora

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

Dim. Come sopra si definiscono $g(a, k)$, $\varphi(t)$ e $\psi(t)$.
Come sopra arrivo a

$$g(a, k) = R [f_x(x_0 + c_1, y_0 + k) - f_x(x_0 + c_1, y_0)]$$

Ora uso la diff. di f_x e ottengo

$$f_x(x_0 + c_1, y_0 + k) = f_x(x_0, y_0) + f_{xx}(x_0, y_0)c_1 + f_{xy}(x_0, y_0)k + o(\dots)$$

$$f_x(x_0 + c_1, y_0) = f_x(x_0, y_0) + f_{xx}(x_0, y_0)c_1 + o(\dots)$$

da cui
$$g(a, k) = Rk f_{xy}(x_0, y_0) + R \cdot o(\dots)$$

Analogamente, ragionando con l'altra formula ottengo

$$g(a, k) = Rk f_{yx}(x_0, y_0) + k o(\dots)$$

Come prima concludevo calcolando in 2 modi il

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{g(a, a)}{a^2} = f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

C'è da stare attenti agli o piccolo, ma si gestiscono come sempre.

Tra i vari termini avrei

$R o(\sqrt{c_1^2 + k^2})$... quando metto $a=k$ e divido per a^2 trovo

$$\frac{R o(\sqrt{c_1^2 + R^2})}{R^2} \cdot \frac{\sqrt{c_1^2 + R^2}}{\sqrt{c_1^2 + R^2}} = \frac{\sqrt{c_1^2 + R^2}}{R} \leq \frac{\sqrt{R^4 + R^2}}{R} \leq \sqrt{2}$$

↓
0

— 0 — 0 —

Controesempi

Costruttore di controesempi: prendiamo $R(x,y)$ tale che

$$\lim_{x \rightarrow 0} R(x,0) \neq \lim_{y \rightarrow 0} R(0,y)$$

Allora $f(x,y) = xy R(x,y)$ ha $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$

Prendiamo per esempio $R(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, da cui

$$f(x,y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Si può dimostrare che f è continua e diff. in $(0,0)$ e $f_x(0,0) = f_y(0,0) = f(0,0) = 0$ (come lezione precedente è del tipo $\frac{p^4}{p^2}$).

$$f_x(x,y) = y R(x,y) + xy R_x(x,y) \quad \text{quindi}$$

$$f_x(0,y) = y R(0,y) \quad \text{da cui}$$

$$f_{xy}(0,0) \underset{\text{def.}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_x(0,t) - f_x(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} R(0,t) = -1$$

Analogamente $f_y(x,y) = x R(x,y) + xy R_y(x,y)$
da cui

$$f_y(x,0) = x R(x,0)$$

e quindi

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_y(t,0) - f_y(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} R(t,0) = 1$$

— 0 — 0 —