

A.A. 2017/2018
Corso di Analisi Matematica 2
Stampato integrale delle lezioni
(Volume 3)

Massimo Gobbino

Indice

Lezione 086. Successioni di funzioni: definizione di convergenza puntuale, convergenza uniforme, convergenza uniforme sui compatti. Esempi classici.	7
Lezione 087. Convergenza uniforme: teorema di scambio del limite. Continuità del limite uniforme di funzioni continue. Distanza nello spazio delle funzioni limitate che induce la convergenza uniforme.	13
Lezione 088. Convergenza uniforme: teoremi di scambio dell'integrale e della derivata.	19
Lezione 089. La convergenza puntuale implica la convergenza uniforme sotto ipotesi di monotonia (sia ad x fisso sia ad n fisso): enunciati, dimostrazioni, controesempi che mostrano l'ottimalità delle ipotesi.	25
Lezione 090. Esempi di studio della convergenza di successioni di funzioni. Esempi in cui la convergenza puntuale implica la convergenza uniforme: spazi di polinomi di grado limitato, spazi di funzioni equilipschitziane.	30
Lezione 091. Serie di funzioni. Convergenza totale: definizione e rapporti con la convergenza uniforme. M-test di Weierstrass. Serie di funzioni a segno alterno. Convergenza totale come convergenza delle norme in uno spazio di Banach.	35
Lezione 092. Primi esercizi sulle serie di funzioni.	41
Lezione 093. Serie di potenze: definizioni, enunciato dei principali risultati, esempi pratici del loro utilizzo per il calcolo di speciali serie numeriche.	47
Lezione 094. Serie di potenze: dimostrazione dei risultati principali (struttura dell'insieme convergenza, formula per il calcolo del raggio di convergenza, teorema di Abel, ulteriore regolarità e derivazione per serie).	53
Lezione 095. Criterio di convergenza per le serie di Taylor. Convergenza delle serie di Taylor delle funzioni elementari: esponenziale, seno, coseno, logaritmo, arcotangente, potenza ad esponente reale.	60
Lezione 096. Esempi di studio dell'andamento asintotico di serie di funzioni quando non valgono i teoremi di scambio. Utilizzo del confronto serie-integrali.	66
Lezione 097. Calcolo alla Eulero della somma dei quadrati dei reciproci degli interi, esempi di calcolo della somma di serie di potenze, ulteriori esempi di studio di serie di potenze.	72

Lezione 098. Funzioni analitiche: definizione e proprietà algebriche. Stima delle derivate successive di una serie di potenze. Analiticità delle serie di potenze. Analiticità della funzione $1/x$ e delle funzioni elementari.	78
Lezione 099. Prodotto di Cauchy di serie numeriche. Teorema sul prodotto tra una serie convergente ed una assolutamente convergente. Esempio dell'esponenziale. Analiticità del prodotto di funzioni analitiche.	84
Lezione 100. L'insieme degli zeri di una funzione analitica è discreto. Disuguaglianze di tipo Lojasevic. Risoluzione per serie di un'equazione differenziale.	89
Lezione 101. Introduzione alle equazioni differenziali: riepilogo notazioni, equivalenza tra formulazione differenziale e integrale di un problema di Cauchy, operatore di Volterra, enunciato del teorema di esistenza ed unicità (teorema CLPL: Cauchy-Lipschitz-Picard-Lindelof), enunciato del teorema di sola esistenza (teorema di Peano). Esempio di non unicità e di non esistenza globale.	94
Lezione 102. Parte di esistenza del teorema CLPL: dimostrazione 1 (via contrazioni classica, con tempo di vita dipendente dalla costante di Lipschitz) e dimostrazione 2 (via contrazioni rispetto ad una norma pesata, con tempo di vita ottimale). Studio generale degli spazi di funzioni con norme pesate.	99
Lezione 103. Parte di esistenza del teorema CLPL: dimostrazione 3 (mediante le iterate di Picard, con tempo di vita ottimale) e dimostrazione 4 (via contrattività di una opportuna iterata della mappa di Volterra, ancora con tempo di vita ottimale). . .	106
Lezione 104. Teorema di Ascoli-Arzelà (versione standard su un intervallo della retta reale): enunciato e dimostrazione. Caso di funzioni definite su tutta la retta. . . .	112
Lezione 105. Teorema di Ascoli-Arzelà (versione metrica e variante con sola convergenza sui compatti). Dimostrazione del teorema di Peano mediante problemi approssimanti Lipschitz.	118
Lezione 106. Dimostrazione del teorema di Peano mediante approssimanti alla Tonelli (problemi con ritardo). Strategie generali per l'approssimazione di funzioni continue mediante funzioni Lipschitz.	123
Lezione 107. Parte di unicità del teorema CLPL: dimostrazione 1 (via lemma di Gronwall) e dimostrazione 2 (via unicità del punto fisso per una contrazione). . . .	129
Lezione 108. Esistenza di una soluzione massimale (sia nel caso lipschitz, sia nel caso solo continuo). Teorema di alternativa per una soluzione massimale (esistenza globale, blow up, break down). Primo teorema di esistenza globale (rhs globalmente limitato).	134
Lezione 109. Teorema dell'asintoto. Primi esempi di studio qualitativo per equazioni differenziali autonome.	140

Lezione 110. Soprasoluzioni e sottosoluzioni: definizioni e teorema di confronto (sia nel caso continuo, sia nel caso lipschitz). Parte di unicità del teorema CLPL: dimostrazione 3 (via norma al quadrato della differenza). Secondo teorema di esistenza globale (rhs con crescita sublineare).	147
Lezione 111. Esempi di studio qualitativo di soluzioni di equazioni differenziali autonome.	154
Lezione 112. Primi esempi di studio qualitativo di equazioni non autonome.	159
Lezione 113. Primo esempio di studio qualitativo di un'equazione differenziale non autonoma con valori soglia.	164
Lezione 114. Ulteriore esempio di studio qualitativo di soluzioni di equazioni differenziali con valori soglia.	169
Lezione 115. Ulteriori esempi di studio qualitativo di soluzioni di equazioni differenziali.	174
Lezione 116. Dipendenza continua dal dato iniziale: passaggio al limite nel caso con rhs continuo e stima (dall'alto e dal basso) della differenza nel caso con rhs lipschitziano. Condizioni di tipo Osgood per esistenza globale e unicità.	179
Lezione 117. Ulteriori esempi di studio qualitativo di soluzioni di equazioni differenziali. Stime iterate.	185
Lezione 118. Equazioni di ordine 2: spazio delle fasi, introduzione al metodo energetico, energy landscape, primi esempi.	190
Lezione 119. Equazioni di ordine 2: esistenza di soluzioni periodiche, calcolo del periodo e sua dipendenza dal livello energetico, oscillatore armonico e pendolo non linearizzato.	195
Lezione 120. Ulteriori esempi di studio di soluzioni di equazioni ordine 2: soluzioni periodiche, esistenza globale vs blow up, fenomeno della buca di potenziale.	200
Lezione 121. Sistemi di equazioni differenziali lineari autonome a coefficienti costanti: teoria generale. Esponenziale di una matrice: definizione, calcolo, proprietà vere e false.	205
Lezione 122. Sistemi di equazioni differenziali lineari omogenee: studio della stabilità e stabilità asintotica dell'origine nel caso 2×2 (via forma canonica della matrice).	210
Lezione 123. Sistemi di equazioni differenziali lineari omogenee: studio dell'asintotica stabilità con metodi energetici. Introduzione al teorema di linearizzazione.	215
Lezione 124. Teorema di linearizzazione: idea generale, enunciato e dimostrazione energetica nel caso di linearizzato diagonalizzabile con autovalori reali negativi. Esempi di applicazione. Equazione del pendolo smorzato.	220
Lezione 125. Modelli matematici in biologia: crescita esponenziale, equazione logistica, epidemia SIS, epidemia SIR, modello preda-predatore (Volterra-Lotka).	226
Lezione 126. Modelli matematici in biologia: modello preda-predatore con autolimitazione, modello per due specie in competizione.	231

Lezione 127. Calcolo degli integrali di Fresnel mediante forme differenziali esatte. Determinante Wronskiano e teorema di oscillazione per equazioni lineari di ordine due.	236
Lezione 128. Esempio di teorema di convergenza dominata per integrali impropri. Continuità e derivabilità di integrali impropri dipendenti da parametro via convergenza dominata. Esempio legato alla Gamma di Eulero. Strategia per il calcolo dell'integrale di Dirichlet.	242
Lezione 129. Dimostrazione delle proprietà necessarie per il calcolo dell'integrale di Dirichlet. Omeomorfismo tra linee di livello ed esistenza di livelli critici. Dimensione di uno spazio metrico e accenno alla curva di Peano.	249

ANALISI 2

LEZIONE 086

Note Title

19/03/2018

SUCCESSIONI DI FUNZIONI

Sia S un insieme e Y uno spazio metrico.
Una successione di funzioni è del tipo

$$f_n: S \rightarrow Y.$$

Def. Si dice che

- f_n converge puntualmente ad $f_\infty: S \rightarrow Y$ se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f_\infty(x) \quad \forall x \in S$$

In simboli

$$\forall x \in S \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq m_0 \quad d_Y(f_n(x), f_\infty(x)) \leq \varepsilon$$

- f_n converge uniformemente ad $f_\infty: S \rightarrow Y$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_0 \in \mathbb{N} \quad \forall x \in S \quad \forall n \geq m_0 \quad d_Y(f_n(x), f_\infty(x)) \leq \varepsilon$$

Oss. fondamentale Conv. unif. $\Rightarrow$ conv. puntuale

Nella convergenza puntuale m_0 dipende da ε e da x , nella uniforme dipende solo da ε .

— o — o —

L'ESEMPIO $S := [0, 1]$, $Y := \mathbb{R}$ $f_n(x) = x^n$

Analisi ti dice che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f_\infty(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

↑
limite
puntuale

(Quando calcolo un limite puntuale, x è un parametro)

Dico che $f_\infty(x)$ NON è limite uniforme su $[0, 1]$.

Se lo fosse, vorrebbe dire che $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|f_n(x) - f_\infty(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [0, 1], \text{ cioè}$$

$$f_\infty(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \leq f_\infty(x) + \varepsilon$$

cioè il grafico di $f_n(x)$ sta in una striscia di ampiezza ε intorno al grafico di $f_\infty(x)$, il che è palesemente falso.

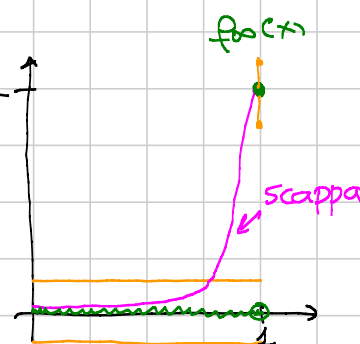
Piccola variante: $f_n \rightarrow f_\infty$ in $[0, \frac{99}{100}]$ uniformemente?

Sì perché basta dimostrare che

$$0 \leq f_n(x) \leq \varepsilon \quad \forall x \in [0, \frac{99}{100}]$$

per n abb. grande. Per monotonia basta controllare $(\frac{99}{100})^n \leq \varepsilon$.

— o — o —



Brutta notizia 1: il limite puntuale di funzioni continue non è obbligato ad essere continuo

Achtung! Precisare sempre DOVE si ha o non si ha conv. unif. La stessa fm può conv. unif. a f_0 in qualche insieme e non in qualche altro.

Interpretazioni diverse Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e siano $f_n: A \rightarrow \mathbb{R}$ e $f_0: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Allora $f_n \rightarrow f_0$ unif. in A se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall x \in A \quad \underline{f_0(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \leq f_0(x) + \varepsilon}$$

$f_n(x)$ sta nella striscia di ampiezza ε centrata in $f_0(x)$

cioè se e solo se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \{ |f_n(x) - f_0(x)| : x \in A \} = 0$$

Oss.

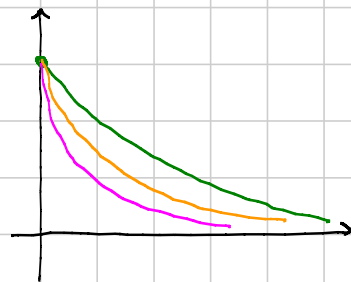
- ① La convergenza puntuale è un concetto locale e dipende solo da una nozione di convergenza, cioè posso definirla ogni qual volta ho deciso cosa vuol dire che $y_n \rightarrow y_0$ in arrivo.
- ② La convergenza unif. è un concetto globale e metrico, cioè serve una distanza in arrivo per definirla.

— o — o —

Esempio 2 $f_n : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ $f_n(x) = e^{-nx}$

Idea

$$f_n(x) \rightarrow f_\infty(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x=0 \\ 0 & \text{se } x>0 \end{cases}$$



La convergenza è

- puntuale in $[0, +\infty)$
- NON uniforme in $[0, +\infty)$
- uniforme in $[a, +\infty)$ per ogni $a > 0$
- NON uniforme in $(0, +\infty)$

$$\sup \{ |f_n(x) - f_\infty(x)| : x \in (0, +\infty) \} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\sup \{ \quad \quad \quad : x \in [a, +\infty) \} = e^{-na} \rightarrow 0$$

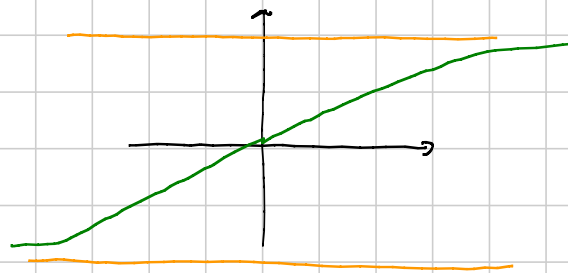
Esempio 3 $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f_n(x) = \arctan(mx)$
 $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g_n(x) = \arctan(\frac{x}{n})$

$$f_n(x) \rightarrow f_\infty(x) := \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{\pi}{2} & x > 0 \end{cases}$$

- puntuale in $\mathbb{R}$
- NON uniforme in $\mathbb{R}$
- uniforme in $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$ per ogni $a > 0$.

$$g_n(x) \rightarrow g_\infty(x) \equiv 0$$

- puntuale in $\mathbb{R}$
- NON uniforme in $\mathbb{R}$
- uniforme sui compatti



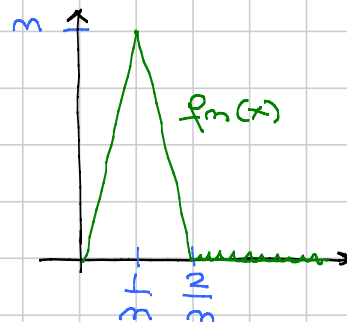
Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e siano $f_n: A \rightarrow \mathbb{R}$ e $f_\infty: A \rightarrow \mathbb{R}$.
Si dice che $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. sui compatti se

$$f_n \rightarrow f_\infty \text{ su } K \text{ per ogni } K \subseteq A \text{ compatto.}$$

Esempio 4 $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x) \rightarrow f_\infty(x) \equiv 0 \text{ puntualmente}$$

NON conv. unif. in $[0,1]$, ma
conv. unif. sui compatti di $(0,1]$



Brutta notizia 2 Nell'esempio precedente

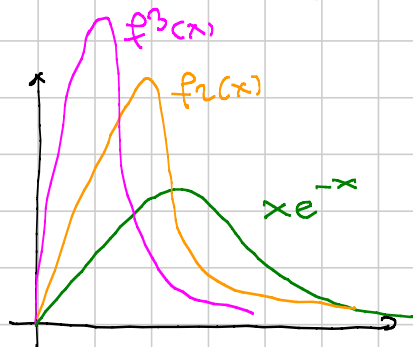
$$\int_0^1 f_n(x) dx = 1 \rightarrow 1$$

$$\int_0^1 f_\infty(x) dx = 0$$

L'integrale non passa al limite.

Esempio 5 $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$

Vedere che succede praticamente la stessa cosa



Esempio 6 $f_n: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$

$f_n(x) \rightarrow f_0(x) := |x|$ puntualmente in $[-1, 1]$

Brutta notizia 3: con il limite puntuale, se anche salviamo la continuità, possiamo perdere la derivabilità.

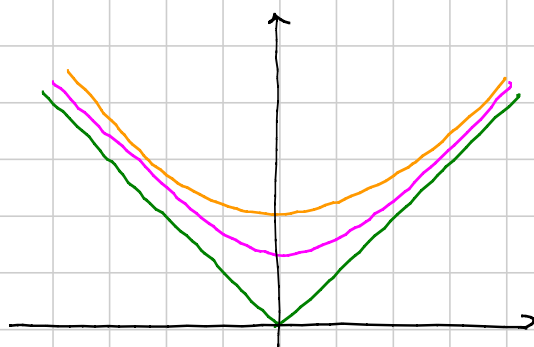
Sarà uniforme la convergenza? sì, unif. in $[-1, 1]$.

$$\begin{aligned} f_n(x) - f_0(x) &= \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| && \text{("razionalizzato")} \\ &= \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} \end{aligned}$$

quindi $0 \leq f_n(x) - f_0(x) \leq \frac{1}{n} \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{☺}$

↑
metto $x=0$
al denom.

questo dim. che $\sup \{ |f_n(x) - f_0(x)| : x \in [-1, 1] \} \rightarrow 0$



La conv. è pure unif. su tutto $\mathbb{R}$.

ANALISI

2

-

LEZIONE 087

Titolo nota

21/03/2018

TEOREMI DI SCAMBIO

- Del limite
- dell'integrale
- della derivata

Teo. scambio del limite

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme, sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un p.to di accumulazione di A (con piccole modifiche vale anche per $x_0 = \pm\infty$). Sia $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ una succ. di funz., sia $f_0 : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

- (i) $f_n \rightarrow f_0$ unif. su A
- (ii) per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = l_n \in \mathbb{R}$$

Allora

(1) esiste $l_\infty := \lim_{n \rightarrow +\infty} l_n$

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f_0(x) = l_\infty$ (il limite della funzione limite è limite dei limiti)

Oss. Possiamo scriverlo come

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right)$$

Achtung! Serve la conv. unif., altrimenti è falso.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n \right) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} x^n \right)$$

$\begin{matrix} \text{"} \\ 0 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \text{"} \\ 1 \end{matrix}$

$x^n \not\rightarrow 0$ unif. su $[0,1)$ ma solo puntualmente

Dim. **Step 1** Dimostro che $\{l_n\}$ è di Cauchy, da cui l'esistenza di l_∞ .

- Mi viene dato $\varepsilon > 0$
- Per def. di conv. unif. trovo $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|f_\infty(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in A \quad \forall n \geq n_0$$

- Osservo che per ogni $n \geq n_0$ e per ogni $m \geq n_0$ vale

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f_\infty(x)| + |f_\infty(x) - f_m(x)| \\ &\leq \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon = \varepsilon \quad \forall x \in A \end{aligned}$$

- Passando al limite per $x \rightarrow x_0$ trovo

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq \varepsilon \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \\ |l_n - l_m| &\leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall m \geq n_0. \end{aligned}$$

Step 2 Dimostro che $\lim_{x \rightarrow x_0} f_\infty(x) = l_\infty$

Mi serve che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall x \in [(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A] \setminus \{x_0\} \text{ vale}$$

$$|f_\infty(x) - l_\infty| \leq \varepsilon$$

Brutta copia $|f_\infty(x) - l_\infty| \leq |f_\infty(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - l_n| + |l_n - l_\infty|$

piccolo per $n \gg 1$
piccolo per $x \sim x_0$
piccolo per $n \gg 1$

Facciamo le cose in ordine.

• Mi viene dato $\varepsilon > 0$

• Fisso $m_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $|l_m - l_\infty| \leq \frac{1}{4} \varepsilon \quad \forall m \geq m_0$

• Fisso $m_1 \in \mathbb{N}$ t.c. $|f_\infty(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{4} \varepsilon \quad \forall m \geq m_1, \forall x \in A$

• Scelgo un qualunque $m_2 \in \mathbb{N}$ t.c. $m_2 \geq m_0, m_2 \geq m_1$,
e prendo $\delta > 0$ t.c.

$$|f_{m_2}(x) - l_{m_2}| \leq \frac{1}{4} \varepsilon \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \setminus \{x_0\}$$

• Per quello specifico valore di m_2 scrivo la triangolazione della brutta copia e ottengo

$$|f_\infty(x) - l_\infty| \leq \frac{3}{4} \varepsilon \leq \varepsilon \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \setminus \{x_0\}.$$

Oss. Nella dim. di (2) la scelta di n è un passo necessario per avere δ , che è l'unica cosa che ci interessa.

Stesso teorema in variante metrica

$\mathbb{X}$ sp. metrico, $A \subseteq \mathbb{X}$, $x_0 \in \mathbb{X}$ p.to di acc. per A

$f_n: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$, $f_\infty: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$.

Supponiamo $\mathbb{Y}$ COMPLETO.

Allora vale lo scambio come sopra

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right)$$

$\uparrow$ limiti in $\mathbb{Y}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{l_n}$

Dim. (1) $\{f_n\}$ è di Cauchy in $\mathcal{Y}$, che è completo
 (2) triangolo finale come sopra.

Oss. Su X non serve davvero una metrica: basta una topologia o una nozione di convergenza

Prop. (Doppio scambio)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, sia $f_n: A \rightarrow \mathbb{R}$ una succ., sia $\{x_n\} \subseteq A$ una succ., sia $f_\infty: A \rightarrow \mathbb{R}$, sia $x_\infty \in A$.

Supponiamo che

- (i) $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. in A
- (ii) $x_n \rightarrow x_\infty$ (l'ultimo sta in A)
- (iii) f_∞ continua in x_∞ .

Allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f_\infty(x_\infty).$$

Dim. Brutta copia:

$$|f_\infty(x_\infty) - f_n(x_n)| \leq |f_\infty(x_\infty) - f_\infty(x_n)| + |f_\infty(x_n) - f_n(x_n)|$$

piccolo se $x_n \sim x_\infty$
piccolo per C.U.

- Mi viene dato $\varepsilon > 0$
 - Scelgo $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $|f_\infty(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2} \varepsilon \quad \forall n \geq n_0, \forall x \in A$
 - Scelgo $\delta > 0$ t.c. $|f_\infty(x_\infty) - f_\infty(x)| \leq \frac{1}{2} \varepsilon \quad \forall x \in (x_\infty - \delta, x_\infty + \delta)$
 - Scelgo $n_1 \in \mathbb{N}$ t.c. $|x_\infty - x_n| < \delta \quad \forall n \geq n_1$
- Mettendo tutto insieme trova

$$|f_\infty(x_\infty) - f_n(x_n)| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq \max\{n_0, n_1\}$$

Esercizio Trovare controesempi quando la convergenza è solo puntuale, oppure quando è unif. ma $f_\infty(x)$ non è continua.

Corollario Se $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. in A , e tutte le f_n sono continue, allora f_∞ è continua, quindi "limite uniforme di funzioni continue è continuo".

Dim. Prendo un qualunque $x_0 \in A$ e ho che

$$\begin{aligned}
 f_\infty(x_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) && \text{(qui basta puntuale)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right) && \text{(usato } f_n \text{ cont. in } x_0) \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) && \text{(usato teo. scambio)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} f_\infty(x). && \text{(usato } f_n(x) \rightarrow f_\infty(x))
 \end{aligned}$$

Interpretazione astratta della conv. uniforme

$A \subseteq \mathbb{R} \quad f: A \rightarrow \mathbb{R} \quad g: A \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{Pongo}$

$$d(f, g) := \sup \{ |f(x) - g(x)| : x \in A \}$$

Questa è una distanza se mi restringo alle funzioni limitate.

Indipendentemente dall'essere limitate, vale che

$$f_n \rightarrow f_\infty \text{ unif. in } A \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n, f_\infty) = 0.$$

Il discorso vale più in generale in spazi metrici

Def. (X, d_X) e (Y, d_Y) metrici. Poniamo

$$\mathcal{Y}_b(X, Y) = \{f: X \rightarrow Y \text{ limitate}\}.$$

↑ bounded

Dati f e g in $\mathcal{Y}_b(X, Y)$ si pone

$$d(f, g) := \sup \{d_Y(f(x), g(x)) : x \in X\}.$$

Valgono i seguenti fatti

- $d(f, g)$ è una distanza
- $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. in $X \Leftrightarrow d(f_n, f_\infty) \rightarrow 0$
- $\mathcal{Y}_b(X, Y)$ con la distanza $d(f, g)$ è uno spazio metrico ed è completo se e solo se lo è Y

[Se $\{f_n\}$ è succ. di Cauchy di funzioni, allora per ogni $x \in X$ si ha che $\{f_n(x)\}$ è succ. di C. di el. di Y , quindi $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)$ per ogni $x \in X$ e si tratta di dim. che il limite è uniforme].

- Se X è compatto e Y è completo, allora $C^0(X, Y)$, rispetto alla distanza $d(f, g)$, è uno sp. metrico completo.

[X comp. garantisce che le funz. cont. sono limitate, e il tes. scambio garantisce la continuità del limite].

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 088

Note Title

21/03/2018

Teorema di scambio dell'integrale

Sia $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una succ. di funzioni e sia $f_\infty : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.
Supponiamo che

- (i) $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. in $[a, b]$
- (ii) per ogni $n \in \mathbb{N}$ la funzione $f_n(x)$ è integrabile alla Riemann / Darboux in $[a, b]$ (integrale proprio)

Allora

- (1) f_∞ è int. alla Riemann in $[a, b]$
- (2) vale che

$$\int_a^b f_\infty(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

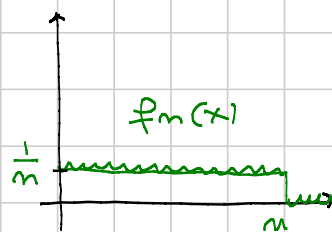
(l'integrale del limite è il limite degli integrali)

Achtung! Come visto in precedenza, la conv. puntuale non basta.

Inoltre serve che gli int. siano propri, altrimenti l'unif. conv. non basta.

Ad esempio

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{per } x \in [0, n] \\ 0 & \text{per } x > n \end{cases}$$



Allora $f_n(x) \rightarrow 0$ unif. in $[0, +\infty)$, ma

$$\int_0^{+\infty} f_n(x) dx \not\rightarrow \int_0^{+\infty} f_\infty(x) dx$$

"
"

1
0

Dim. Tentativo

$$\begin{aligned}
 \left| \int_a^b f_\infty(x) - \int_a^b f_n(x) \right| &= \left| \int_a^b (f_\infty(x) - f_n(x)) dx \right| \\
 &\leq \int_a^b \underbrace{|f_\infty(x) - f_n(x)|}_{\leq \varepsilon \text{ per } n \text{ grande}} dx \\
 &\leq \varepsilon (b-a)
 \end{aligned}$$

Forse può andare bene, ma PRIMA devo dim. che $f_\infty(x)$ è integrabile.

Step 1 Dimostro che f_∞ è integrabile, cioè per ogni $\varepsilon > 0$ esistono step function φ e ψ in $[a,b]$ tali che

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) &\leq f_\infty(x) \leq \psi(x) \quad \forall x \in [a,b] \\
 \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x)) dx &\leq \varepsilon.
 \end{aligned}$$

- Mi viene dato $\varepsilon > 0$
- Trovo $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|f_\infty(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \quad \forall x \in [a,b], \forall n \geq n_0$$

- Uso l'integrabilità di $f_{n_0}(x)$ e trovo φ_0 e ψ_0 step func. tali che

$$\begin{aligned}
 \varphi_0(x) &\leq f_{n_0}(x) \leq \psi_0(x) \quad \forall x \in [a,b] \\
 \int_a^b (\psi_0(x) - \varphi_0(x)) dx &\leq \frac{1}{2} \varepsilon
 \end{aligned}$$

- "Alzo ψ e abbasso φ ", cioè pongo

$$\psi(x) := \psi_0(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\varphi(x) := \varphi_0(x) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \quad "$$

- Verifico che φ e ψ vanno bene per $f_\infty(x)$.
Ci sono due verifiche

$$\begin{aligned} \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x)) dx &= \int_a^b \underbrace{(\psi_0(x) - \varphi_0(x))}_{\frac{1}{2}\varepsilon} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{2(b-a)}}_{\frac{1}{2}\varepsilon} dx \\ &\leq \varepsilon. \quad \text{☺} \end{aligned}$$

Verifico che $f_\infty(x) \leq \psi(x)$ per ogni $x \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} f_\infty(x) &= \underbrace{f_{m_0}(x)}_{\downarrow} + \underbrace{f_\infty(x) - f_{m_0}(x)}_{\downarrow} \\ &\leq \psi_0(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \end{aligned}$$

Allo stesso modo ottengo $f_\infty(x) \geq \varphi(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.

Step 2 Ora la brutta copia funziona. Se voglio fare il fine: per ogni $\varepsilon > 0$ scelgo $m_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|f_\infty(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{(b-a)} \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall m \geq m_0$$

e con i passaggi della brutta ottengo

$$\left| \int_a^b f_\infty(x) dx - \int_a^b f_m(x) dx \right| \leq \varepsilon \quad \forall m \geq m_0$$

— o — o —

Estensione Lo stesso enunciato vale per integrali multipli con $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ intendendo che $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ è misurabile e limitato

$$\int_{\Omega} f_n(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} f_{\infty}(x) dx$$

sotto ipotesi di conv. unif. in Ω .

— o — o —

Teorema di scambio della derivata

Siano $f_n: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ (potrei prenderlo chiuso ma dovei interpretare la derivata agli estremi)
una succ. di funzioni.

Supponiamo che

- (i) per ogni $n \in \mathbb{N}$ la funzione f_n è di classe C^1 in (a,b)
- (ii) esiste $g_{\infty}: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$f_n' \rightarrow g_{\infty} \quad \text{unif. in } (a,b) \quad (\text{conv. unif. delle derivate})$$

(iii) esiste $x_0 \in (a,b)$ tale che

$$f_n(x_0) \rightarrow a_{\infty} \quad (\text{conv. puntuale delle funz. in un solo punto})$$

Allora, posto

$$f_{\infty}(x) := a_{\infty} + \int_{a_{\infty}}^x g_{\infty}(t) dt \quad \forall x \in (a,b)$$

si ha che

- (1) f_{∞} è di classe C^1 in (a,b) e $f_{\infty}' = g_{\infty}$
- (2) $f_n \rightarrow f_{\infty}$ unif. in (a,b)
(la derivata del limite è il limite delle derivate)

Dem. (1) Osservo che g_∞ è continua in (a,b) essendo
 limite unif. delle f_n' che sono continue.
 Quindi $f_\infty \in C^1$ per teo. fond. calcolo integrale

(2) Osservo che per ogni $x \in (a,b)$ vale

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f_n'(t) dt \quad (\text{teo. fond. calc. int.})$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$a_\infty + \int_{x_0}^x g_\infty(t) dt = f_\infty(x)$$

Per passare al limite ho usato l'ipotesi (iii) sul primo
 termine, ed il teo. di scambio dell'integrale sul secondo
 termine dopo aver osservato che

$$f_n' \rightarrow g_\infty \quad \text{unif. in } [x_0, x]$$

(fatto generale: se $\varphi_n \rightarrow \varphi_\infty$ unif. in A , allora
 $\varphi_n \rightarrow \varphi_\infty$ unif. in B per ogni $B \subseteq A$)

Finora ho dim. solo che $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)$ puntualmente.
 Per averla uniforme devo scrivere

$$|f_\infty(x) - f_n(x)| = \left| a_\infty + \int_{x_0}^x g_\infty(t) dt - f_n(x_0) - \int_{x_0}^x f_n'(t) dt \right|$$

$$\leq |a_\infty - f_n(x_0)| + \int_{x_0}^x |g_\infty(t) - f_n'(t)| dt$$

$$\leq \underbrace{|a_\infty - f_n(x_0)|}_0 + \int_a^b \underbrace{|g_\infty(t) - f_n'(t)|}_0 dt$$

Quindi per n grande il LHS è piccolo cuolip, da x .

Corollario Se supponiamo

(1) $f_n \rightarrow f_\infty$ puntualmente

(2) $f_n' \rightarrow g_\infty$ unif.

allora

$\rightarrow f_\infty$ è derivabile e $f_\infty' = g_\infty$

$\rightarrow f_n \rightarrow f_\infty$ pure uniformemente.

Oss. In dimensione più alta vale lo stesso per ogni derivata parziale, cioè se

(i) $f_n \rightarrow f_\infty$ punt. in Ω

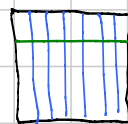
(ii) $\frac{\partial f_n}{\partial x_i} \rightarrow g_\infty$ unif in Ω

← aperto

Allora $\frac{\partial f_\infty}{\partial x_i}$ esiste ed è proprio g_∞ .

Dim Restringersi alle varie rette in direzione x_i

Oss. L'enunciato con ipotesi di conv. in un solo punto va rivisto componendo convergenza in ogni pto di ogni retta



Esercizio Nelle ipotesi del corollario, dimostrare la convergenza unif. dei rapp. increment., cioè

$$\frac{f_n(x_0 + \Delta) - f_n(x_0)}{\Delta} \xrightarrow{\text{unif}} \frac{f_\infty(x_0 + \Delta) - f_\infty(x_0)}{\Delta}$$

dove definiti. A quel p.to usare il teo. scambio dei limiti per $\Delta \rightarrow 0$.

— 0 — 0 —

ANALISI

2

-

LEZIONE 089

Note Title

22/03/2018

Convergenza puntuale $\Rightarrow$ conv. uniforme sotto ipotesi di monotonia

Teorema (Dini's theorem in mondo \{Pisa\})

Sia (X, d) metrico, sia $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ succ. di funz.

Sia $f_\infty: X \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) $f_n \rightarrow f_\infty$ puntualmente in X

(ii) X compatto

(iii) f_n continua per ogni $n \in \mathbb{N}$

(iv) f_∞ continua

(v) per ogni $x \in X$ la succ. di numeri $\{f_n(x)\}$ è monotona debil.
(anche in verso diverso a seconda di x).

Allora

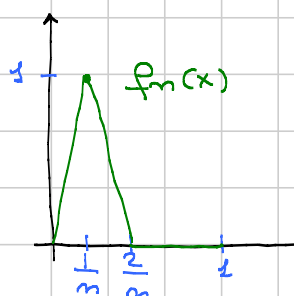
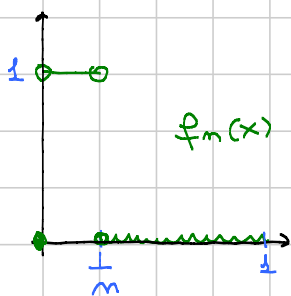
$f_n \rightarrow f_\infty$ unif. in X .

Oss. Le ipotesi servono davvero

Senza (ii): $X := [0, 1)$, $f_n(x) = x^n$

Senza (iv): $X := [0, 1]$, $f_n(x) = x^n$, $f_\infty =$ suo lim. puntuale

Senza (iii): $X := [0, 1]$, $f_\infty(x) \equiv 0$, $f_n(x)$ come a sx



Senza (v): vedi esempio a dx. Si noti che in ogni punto x la succ. $\{f_n(x)\}$ è definitivamente monotona in n .

Il prob. è che il definitiv. è x -dependent.

Dim. Occorre fare le scelte in ordine.

- Mi viene dato $\varepsilon > 0$
- Per ogni $x \in X$, trovo un indice $m_x \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|f_\infty(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{4} \varepsilon \quad \forall m \geq m_x \quad (\text{usato (i)})$$

- Trovo $\delta_x > 0$ t.c.

$$|f_\infty(y) - f_\infty(x)| \leq \frac{1}{4} \varepsilon \quad \forall y \in B_{\delta_x}(x) \quad (\text{iv})$$

- A meno di rimpicciolire δ_x accade anche che

$$|f_{m_x}(y) - f_{m_x}(x)| \leq \frac{1}{4} \varepsilon \quad \forall y \in B_{\delta_x}(x) \quad (\text{iii) con } m = m_x$$

Molto facilmente ottengo

$$|f_{m_x}(y) - f_\infty(y)| \leq \frac{3}{4} \varepsilon \quad \forall y \in B_{\delta_x}(x)$$

Dico che vale di più, e cioè che

$$|f_m(y) - f_\infty(y)| \leq \frac{3}{4} \varepsilon \quad \forall y \in B_{\delta_x}(x), \forall m \geq m_x$$

Questo dall'ipotesi (v). Occorre distinguere 2 casi

→ se per un certo y la $\{f_n(y)\}$ è deb. cresc., allora

$$|f_m(y) - f_\infty(y)| = \underset{\substack{\uparrow \\ f_\infty(y) \geq f_m(y)}}{f_\infty(y) - f_m(y)} \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{monot.}}}{f_\infty(y) - f_{m_x}(y)} \leq \frac{3}{4} \varepsilon$$

→ se per un certo y la $\{f_n(y)\}$ è decr. allora

$$|f_n(y) - f_\infty(y)| = f_n(y) - f_\infty(y) \leq f_{m_x}(y) - f_\infty(y) \leq \frac{3}{4} \varepsilon.$$

Riassunto: abbiamo dimostrato che

$$\forall x \in X \exists m_x \in \mathbb{N} \exists \delta_x > 0 \text{ t.c.}$$

$$|f_n(y) - f_\infty(y)| \leq \varepsilon \quad \forall y \in B_{\delta_x}(x) \quad \forall n \geq m_x$$

Ora $\{B_{\delta_x}(x)\}_{x \in X}$ sono un ricoprimento aperto di X , dal quale posso estrarne un sottoricoprimento finito

$$X = B_{\delta_1}(x_1) \cup \dots \cup B_{\delta_k}(x_k)$$

Basta prendere $m_0 := \max\{m_{x_1}, \dots, m_{x_k}\}$ e abbiamo la tesi

$$\underbrace{|f_n(y) - f_\infty(y)|}_{\leq \varepsilon} \underbrace{\quad}_{\leq \varepsilon} \underbrace{\quad}_{\leq \varepsilon} \quad \forall y \in X \quad \forall n \geq m_0.$$

Teorema (succ. di funzioni monotone)
con estremi

Sia $f_n: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $f_\infty: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) $f_n \rightarrow f_\infty$ in $[a,b]$

(ii) f_∞ continua

(iii) per ogni $n \in \mathbb{N}$ la funzione f_n è monotona, anche in verso n -dependente.

Allora

$$f_n \rightarrow f_\infty \text{ unif. in } [a,b]$$

Oss. Serie $[a,b]$ con estremi: solito in $[0,1]$

Serie (ii) per il solito motivo

Non è vero in $[0, +\infty)$: $f_n(x) = \arctan(\frac{x}{n})$

Dim. In ordine.

- Mi viene dato $\varepsilon > 0$
- La f_0 è unif. cont. in $[a, b]$, quindi prendo il δ corrispondente a $\frac{1}{4} \varepsilon$.
- Trovo una δ -rete in $[a, b]$, cioè dei p.ti $x_1, \dots, x_k$

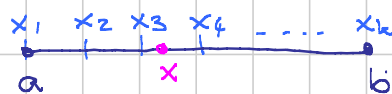
tale che ogni altro $x \in [a, b]$ dista $\leq \delta$ da uno di questi

- Per ogni $i = 1, \dots, k$ trovo n_i tale

$$|f_n(x_i) - f_0(x_i)| \leq \frac{1}{4} \varepsilon \quad \forall n \geq n_i$$

- Prendo $n_0 := \max\{n_1, \dots, n_k\}$ e spero vada bene, cioè

$$|f_n(x) - f_0(x)| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in \mathbb{X}$$



Prendo $x \in [x_i, x_{i+1}]$ e prendo $n \geq n_0$. A seconda della monotonia di $f_n(x)$ metto in mezzo x_i oppure x_{i+1}

→ Supponiamo $f_n(x) \nearrow$

$$f_n(x) - f_0(x) \leq f_n(x_{i+1}) - f_0(x)$$

$$= \underbrace{f_n(x_{i+1}) - f_0(x_{i+1})}_{\leq \frac{1}{4} \varepsilon} + \underbrace{f_0(x_{i+1}) - f_0(x)}_{\leq \frac{1}{4} \varepsilon}$$

perché $n \geq n_{i+1}$

$$\leq \varepsilon$$

Analogamente

$$f_n(x) - f_\infty(x) \geq f_n(x_i) - f_\infty(x)$$

$$= \underbrace{f_n(x_i) - f_\infty(x_i)}_{\geq -\frac{1}{4}\varepsilon \quad (n \geq m_i)} + \underbrace{f_\infty(x_i) - f_\infty(x)}_{\geq -\frac{1}{4}\varepsilon \quad \text{C.O.C.}}$$

$$\geq -\varepsilon$$

Quindi $f_n(x) - f_\infty(x)$ è compreso tra $-\varepsilon$ ed ε .

→ Se per quel dato n si ha che $f_n(x) \searrow$, la dicit. è la stessa invertendo il ruolo di i e $i+1$.

— o — o —

Oss. Nei due teoremi di monotonia, se non si assume che X o $[a,b]$ siano compatti, la tesi diventa $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. sui compatti.

Pensiamo come esempio a $f_n(x) = \arctan\left(\frac{x}{n}\right)$ su tutto $\mathbb{R}$

Qui valgono entrambi i teoremi e si ha conv. unif. sui cpt., ma non su tutto $\mathbb{R}$.

Il tipo di monotonia in n dipende da x !!

Oss. Nel tes 2, se f_n è $\nearrow$ per ∞ valori di n e $\searrow$ per ∞ valore di n , allora f_∞ è costante.

(esercizio)

ANALISI 2

—

LEZIONE 090

Note Title

22/03/2018

Esempio 1 $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$

Converge unif. a 0 su tutto $\mathbb{R}$

$$|f_n(x) - \underbrace{f_0(x)}_0| = \frac{|\sin(nx)|}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Quindi $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f_0(x)| \rightarrow 0.$

Esempio 2 $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x > 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \\ +\infty & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

Converge puntualmente in $[0, +\infty)$.

La convergenza non può essere unif. in $[0, +\infty)$, perché altrimenti il limite $f_0(x)$ sarebbe continuo.

La conv. è unif. su tutte le semirette $[a, +\infty)$ con $a > 0$ (e quindi anche sui $\text{cpt} \subseteq (0, +\infty)$)

$$\sup \{ |f_n(x) - \underbrace{f_0(x)}_0| : x \geq a \} = \sup_{x \geq a} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n^a} \rightarrow 0$$

Nota bene: f_n non conv. unif. a f_0 in $(0, +\infty)$

$$\sup_{x > 0} |f_n(x) - \underbrace{f_0(x)}_0| = \sup_{x \rightarrow 0} \frac{1}{n^x} = 1 \not\rightarrow 0.$$

— 0 — 0 —

Esempio 3 $f_n(x) = nx e^{-nx}$

Per $x < 0$ tende a $-\infty$

Per $x \geq 0$ tende a $f_\infty(x) \equiv 0$

Quindi conv. punt. in $[0, +\infty)$

La conv. non è unif. in $[0, +\infty)$ perché



$$\sup_{x \geq 0} |f_n(x) - f_\infty(x)| = \sup_{x \geq 0} nx e^{-nx} = \sup_{y \geq 0} ye^{-y} = m > 0$$

(Devo calcolare il sup a n fisso e fare il limite per $n \rightarrow +\infty$ del sup)

Moralmente: si tratta della funzione ye^{-y} schiacciata verso l'origine, quindi il sup è lo stesso $\forall n$.

Si ha conv. uniforme su tutte le semirette $[a, +\infty)$ con $a > 0$.

Fissato $a > 0$, per n abbastanza grande il sup sarà il valore in a , quindi

$$\sup_{x \geq a} |f_n(x) - f_\infty(x)| = na e^{-na} \rightarrow 0 \text{ per } a > 0.$$

Esempio 4 $f_n(x) = \frac{nx}{x+n^2} \quad x \geq 0$

$f_n(x) \rightarrow f_\infty(x) \equiv 0$ puntualmente in $[0, +\infty)$

Per decidere se è uniforme, studio la funzione

$$f'_n(x) = \frac{\cancel{nx} + n^3 - n\cancel{x}}{(x+n^2)^2} \geq 0, \text{ quindi}$$

$$\sup_{x \geq 0} |f_n(x) - f_\infty(x)| = n \rightarrow 0$$

$\uparrow$
 limite
 all'infinito

Quindi non c'è conv. unif. in $[0, +\infty)$.

C'è invece conv. unif. in $[0, a]$ per ogni $a > 0$ e quindi anche sui cpt.

$$\sup_{x \in [0, a]} |f_n(x) - f_0(x)| = f_n(a) = \frac{na}{a+n^2} \rightarrow 0$$

Alternativa: vale il teorema di Weierstrass rispetto ad x .

Esempio 5 Sia $p_n(x)$ una succ. di polinomi di grado ≤ 3 . Supponiamo che converga puntualmente in 4 pti a scelta, ad esempio

$p_n(2018)$ $p_n(0)$ $p_n(\pi)$ $p_n(-\sqrt{3})$
Allora

$p_n(x)$ conv. unif. sui cpt
ad un limite $p_\infty(x)$ che è ancora un polinomio di grado ≤ 3 .

Idea: conv. puntuale in 4 pti
 $\Updownarrow$
conv. dei coefficienti
 $\Updownarrow$
conv. unif. sui cpt.

Dim 2ª implicazione $p_n(x) = a_n + b_n x + c_n x^2 + d_n x^3$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 a_∞ b_∞ c_∞ d_∞

$$|p_n(x) - p_\infty(x)| \leq |a_n - a_\infty| + |b_n - b_\infty| \cdot |x| + |c_n - c_\infty| \cdot x^2 + \dots$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0 0

Limite sui cpt. Limite sui cpt.

Dim. buona 1^a implicazione VANDERMONDE

Noti i valori di un pol. di grado ≤ 3 in 4 pti, posso ricavare i coeff. inventando una matrice.

Quando i termini noti convergono, convergono le sol., cioè i coeff.

Dim. alternativa Sia V lo sp. dei pol. di grado ≤ 3 .

Dato $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ e dato $K \subseteq \mathbb{R}$ compatto, posso
 $\uparrow$
 con almeno 4 pti

$$m_1(p) := \max \{ |a|, |b|, |c|, |d| \}$$

$$m_2(p) := \max \{ |p(x)| : x \in K \}$$

$$m_3(p) := \max \{ |p(x)| : x \in \{2018, 0, \pi, -\sqrt{3}\} \}$$

Si osserva che

- m_1, m_2, m_3 sono norme in V
- V ha dim. finita, quindi tutte le norme sono equiv.
- le 3 convergenze citate sopra sono le convergenze rispetto alle 3 norme.

Nel verificare che m_2 ed m_3 sono norme serve che un polinomio che si annulla in almeno 4 pti è $\equiv 0$ se ha grado ≤ 3 .

Esempio 5 Sia (X, d) metrico cpt. Siano $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ equilipschitziane, cioè

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq L d(x, y) \quad \forall (x, y) \in X^2$$

$\uparrow$
stesso L .

Se $f_n \rightarrow f_0$ puntualmente, allora $f_n \rightarrow f_0$ unif.

Seve compatto: $f_n(x) = \frac{x}{n}$ $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $L=1$

Idea: $f_n(x) - f_\infty(x)$ è piccola in ogni pto per n grande, ma quanto grande è x-dependent.

Rigorosamente

- dimostro che $f_\infty(x)$ è L-lip., quindi $|f_n - f_\infty|$ è 2L-lip.
- Dato $\varepsilon > 0$ scelgo una $\frac{\varepsilon}{2L}$ rete in $\mathbb{X}$: $x_1, \dots, x_k$
- Scelgo $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|f_n(x_i) - f_\infty(x_i)| \leq \frac{1}{2} \varepsilon \quad \forall i=1, \dots, k$$

Dico che quel valore di n_0 va bene con ε per ogni x

Idea: dato $x \in \mathbb{X}$ trovo x_i t.c. $d(x, x_i) \leq \frac{\varepsilon}{2L}$ e quindi

$$|f_n(x_i) - f_n(x)| \leq L d(x, x_i) \leq \frac{1}{2} \varepsilon$$

Concludo con una triangolazione (forse era meglio avere 4 al denominatore)

— o — o —

Oss. Basta la totale limitatezza 😊.

ANALISI 2

LEZIONE 091

Note Title

26/03/2018

SERIE DI FUNZIONI

Rinuncio

Setting: S insieme, $f_n: S \rightarrow \mathbb{R}$ succ. di funz.

Una serie di funzioni si presenta come

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad \forall x \in S$$

Fissato $x \in S$, diventa una serie di numeri

Costruisco le somme parziali

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^n f_k(x) \quad \forall x \in S \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e dico che la serie conv. punt. / unif. a $S_{\infty}(x)$ se

$$S_n(x) \rightarrow S_{\infty}(x)$$

puntualmente / unif.

Operativamente: $\rightarrow$ la conv. punt. è esercizio di Analisi 1
(basta pensare x come un parametro) $\rightarrow$ la conv. unif. è un grosso problema se uno non conosce esplicitamente $S_{\infty}(x)$.Def. (convergenza TOTALE (NORMAL convergence))Una serie si dice totalmente convergente se converge

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup \{ |f_n(x)| : x \in S \}$$

numeri reali (event. $+\infty$) e quindi questa converge o diverge

Def. (M-test di Weierstrass) Una serie soddisfa questo test se esiste una succ. $\{M_n\}$ di numeri reali tali che

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad \forall x \in S \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n < +\infty$$

Lemma (quasi ovvio) Una serie è totalmente conv. se e solo se verifica il M-test.

Dim $\Rightarrow$ Basta prendere $M_n := \sup \{ |f_n(x)| : x \in S \}$

$\Leftarrow$ Per ogni n vale $\sup \{ \dots \} \leq M_n$ e quindi la serie dei sup converge.

Teorema Per una serie di funzioni vale

conv. totale $\Rightarrow$ conv. unif. $\Rightarrow$ conv. puntuale
 $\uparrow$
 fatto generale per
 le succ. applicato a $S_n(x)$

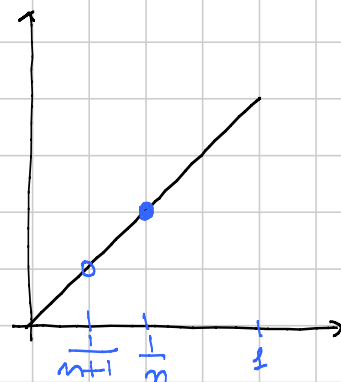
Achtung! Non valgono i viceversa, quindi può esserci conv. unif. senza conv. totale.

Esempio $S = [0, 1]$ $S_\infty(x) := x$

Poniamo $f_n(x) := \begin{cases} x & \text{se } \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Non c'è conv. tot. perché $\sup_{x \in [0,1]} f_n(x) = \frac{1}{n}$

$S_\infty(x) - S_n(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, \frac{1}{n+1}] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ e $S_\infty(x) - S_n(x) \rightarrow 0$ unif.



Prop. (Cond. nec. per conv. unif. di una serie)

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \text{ conv. unif.} \Rightarrow \underbrace{\sup \{ |f_n(x)| : x \in S \} \rightarrow 0}_{\text{cond. necessaria per la conv. della serie dei sup}}$$

Dim Stessa di Analisi 1

$$\begin{array}{ccc} f_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x) & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_{\infty}(x) - S_{\infty}(x) & & \end{array}$$

Deduciamo che $f_n(x) \rightarrow 0$ uniformemente, e questo è equivalente alla tesi.

— 0 — 0 —

Dim (che convergenza totale $\Rightarrow$ conv. unif.)

Dimostriamo tutanto che conv. tot. $\Rightarrow$ conv. puntuale assoluta

Fissato $x \in S$ vale che

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sup \{ |f_n(x)| : x \in S \}$$

da cui la conclusione per confronto.

Questo mi permette di definire $S_{\infty}(x)$. Ora per Analisi 1 sappiamo che

$$\begin{aligned} S_{\infty}(x) - S_n(x) &= \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \quad \text{e quindi} \\ |S_{\infty}(x) - S_n(x)| &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \\ &\leq \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} \sup \{ |f_k(x)| : x \in S \}}_{\text{non dipende da } x} \end{aligned}$$

Rigorosamente:

- mi viene dato $\varepsilon > 0$
- scelgo $m_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $RHS \leq \varepsilon$ per ogni $n \geq m_0$ (uso hp)
- ottengo che

$$|S_\infty(x) - S_n(x)| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq m_0 \quad \forall x \in S$$

e questo dice che

$$S_n \xrightarrow{0} S_\infty \quad \text{unif. in } S.$$

Teorema (serie "Leibnitziane") Supponiamo di avere una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varphi_n(x) \quad x \in S.$$

Supponiamo che

- (i) $\varphi_n(x) \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed $x \in S$ (segno alterno)
- (ii) $\varphi_{n+1}(x) \leq \varphi_n(x)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed $x \in S$.

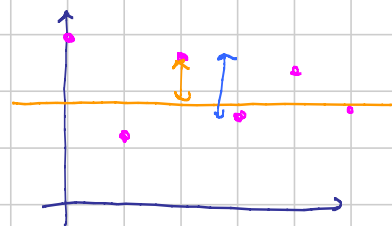
Allora

$$\text{la serie converge unif.} \Leftrightarrow \sup \{|\varphi_n(x)| : x \in S\} \rightarrow 0$$

Dim. $\Rightarrow$ Praticamente è la cond. nec. di prima

$\Leftarrow$ La puntuale è il Leibnitz classico. Serve la unif.
Dalla dim. di Analisi 1 segue che

$$|S_\infty(x) - S_n(x)| \leq \varphi_{n+1}(x)$$



Ora basta fare il sup a dx e sx
(e ripassare la dim. di analisi 1 :)).

$$\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---}$$

Teorema (Convergenza totale in spazi di Banach)

Sia V uno sp. di Banach (vettoriale con norma che lo rende completo).

Sia $\{v_m\} \subseteq V$ una succ. di vettori.

Allora

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \|v_n\| \text{ conv.}}_{\text{serie di numeri in } \mathbb{R}} \Rightarrow \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} v_n \text{ conv.}}_{\text{serie di vettori in } V}$$

Dim. Pongo

$$S_m := \sum_{k=0}^m v_k$$

$$\hat{S}_m := \sum_{k=0}^m \|v_k\|$$

(indici sistemati dopo video)

Per ogni $m > n$ vale

$$\begin{aligned} \|S_m - S_n\| &= \|v_{n+1} + \dots + v_m\| \\ &\leq \|v_{n+1}\| + \dots + \|v_m\| \\ &= |\hat{S}_m - \hat{S}_n| \end{aligned}$$

↑ superfluo

Ora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|v_n\| \text{ conv.} \Rightarrow \{\hat{S}_m\} \text{ è di Cauchy in } \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \{S_m\} \text{ è di Cauchy in } V$$

disug. presente

$$\Rightarrow S_m \text{ converge in } V \text{ ad un certo } S_\infty$$

completezza

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} v_n \text{ converge in } V.$$

Osservazione Consideriamo

$$V := \text{Bounded}(S, \mathbb{R})$$

funzioni $f: S \rightarrow \mathbb{R}$
limitate

Questo è uno sp. di Banach rispetto alla norma

$$\|f\| := \sup \{|f(x)| : x \in S\}.$$

La convergenza uniforme è la conv. rispetto a questa norma.

La conv. totale è la conv. della serie delle norme.

Quindi conv. tot. $\Rightarrow$ conv. unif. è anche una conseguenza del teo. astratto precedente. Questo fornisce una def. alternativa e spiega la terminologia

normed convergence = conv. delle norme.

Oss. Il teorema astratto vale in particolare con $V = \mathbb{C}$.

Oss. I discorsi di questa pagina valgono per

$$\text{Bounded}(S, W)$$

$\uparrow$ Banach

(verificare).

ANALISI 2

LEZIONE 092

Note Title

26/03/2018

Esempio 1

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{n^2}\right)$$

→ Dimostrare che definisce una $f \in C^0(\mathbb{R})$

Conv. puntuale per ogni $x \in \mathbb{R}$ per assoluta conv. + confronto asintotico con $\frac{1}{n^2}$.

Per la continuità serve conv. unif.

C'è conv. unif. su tutto $\mathbb{R}$? NO! Se ci fosse, per cond. nec.

$$\sup \left\{ \left| \sin\left(\frac{x}{n^2}\right) \right| : x \in \mathbb{R} \right\} \rightarrow 0$$

Ma il sup è sempre 1 😞

Speriamo nella conv. unif. sui compatti. Prendo $[-A, A]$ e calcolo

$$|f_n(x)| = \left| \sin\left(\frac{x}{n^2}\right) \right| \leq \frac{|x|}{n^2} \leq \frac{A}{n^2} \quad \forall x \in [-A, A]$$

$\uparrow$
 $|\sin t| \leq |t|$

$\stackrel{\text{Mn}}{\leq}$

In $[-A, A]$ vale M-test, e quindi ho conv. unif.

→ ho continuità in $[-A, A]$ e quindi cont. in $\mathbb{R}$

(achtung! La cont. si riuola, e' unif. conv. no)

→ Dimostrare che $f \in C^1(\mathbb{R})$

Provo con la serie delle derivate

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{n^2}\right) \cdot \frac{1}{n^2}$$

Questa conv. unif. su tutto $\mathbb{R}$ perché

$$\sup \{ |f_n'(x)| : x \in \mathbb{R} \} \leq \frac{1}{n^2}$$

e quindi ho conv. tot. su tutto $\mathbb{R}$.

Ora applico teo. scambio della derivata

→ In modo analogo si ottiene $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Esempio 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = f(x)$$

→ Dimostrare che $f \in C^0((1, +\infty))$

Conv. puntuale è Analisi 1.

Ho conv. unif. su $(1, +\infty)$? BOH!

$$\sup \left\{ \frac{1}{n^x} : x > 1 \right\} = \frac{1}{n}$$

Quindi $\sum \sup = +\infty \Rightarrow$ niente conv. uniforme $\Rightarrow$ BOH

Ho conv. unif. sulle semirette $[A, +\infty)$ con $A > 1$. Infatti

$$\sup \left\{ \frac{1}{n^x} : x \geq A \right\} = \frac{1}{n^A}$$

In $[A, +\infty)$ ho conv. tot., quindi conv. unif., quindi continuità. Riucollando ho continuità su $(1, +\infty)$.

→ Calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Fa 1 (per colpa di $f(x)$ che tende a 1)

Avevo conv. unif. sulle semirette uso teo. di scambio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} = 1$$

||
tranne che per $n=1$

→ Calcolare $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

Non posso usare il teorema di scambio !!!! ☹️

Sfrutto che $f_n(x) \geq 0$. Allora per ogni $x > 1$ e ogni $n \geq 1$ vale

$$f(x) \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} = S_n(x)$$

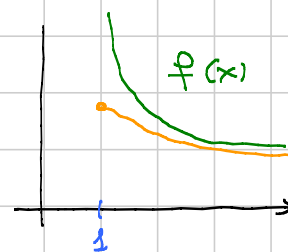
Faccio liminf a dx e sx:

$$\liminf_{x \rightarrow 1^+} f(x) \geq \liminf_{x \rightarrow 1^+} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Essendo vero per ogni $n \in \mathbb{N}$ deduco che

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

→ Ma c'è conv. unif. su $(1, +\infty)$?



No! Ora sappiamo che $f(x)$ non è limitata su $(1, +\infty)$, mentre tutte le $S_n(x)$ lo sono.

FATTO GENERALE Se φ_n sono limitate in S (con limitazione dipendente da n) e φ_∞ è NON limitata in S , allora φ_n NON può tendere unif. a φ_∞ in S .

[Per ogni $m \in \mathbb{N}$ abbiamo $\sup_{x \in S} |\varphi_\infty(x) - \varphi_m(x)| = +\infty$]

Esempio 3 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \log(1+x^{2^n})$

→ Dimostrare che $f \in C^1((-1,1))$

Dimostriamo conv. totale in $[-A, A]$ per ogni $A \in (0,1)$ anche per la serie delle derivate

$$|f_n(x)| \leq |x^{2^n}| \leq A^{2^n}$$

$\uparrow$
 $\log(1+t) \leq t$
 per ogni $t \geq 0$

M_n

$\sum M_n$ è una geometrica di ragione $A^2 \in (0,1)$, quindi converge.

Da qui al solito modo abbiamo $f \in C^0((-1,1))$.

$$|f'_n(x)| = \left| \frac{2^n x^{2^n-1}}{1+x^{2^n}} \right| \leq 2^n A^{2^n-1}$$

e concludo osservando che $\sum n A^{2^n-1} < +\infty$

→ Calcolare $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

Non posso usare teo. scambio, ma come prima

$$f(x) \geq \sum_{k=1}^n \log(1+x^{2^k}) \quad \forall x \in (-1,1) \quad \forall n \geq 1$$

Faccio $\liminf$ a dx e sx

$$\liminf_{x \rightarrow 1^-} f(x) \geq \liminf_{x \rightarrow 1^-} \sum_{k=1}^n \log(1+x^{2k}) = n \log 2$$

$$\leadsto \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

$\rightarrow$ C'è conv. unif. su $(-1, 1)$

NO! Per il fatto generale ($f(x)$ non è limitata, $S_n(x)$ sì).

Esempio 4 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{nx} - 1}{n+3} \quad x > 0$

$\rightarrow$ Puntuale

$$f_n(x) = \frac{e^{\frac{1}{n} \log(nx)} - 1}{n+3} \quad \begin{matrix} e^t \sim 1+t \\ \sim \frac{\log n}{n^2} \end{matrix}$$

$\leadsto$ conv. puntualmente per ogni $x > 0$.

$\rightarrow$ Conv. unif. sugli intervalli $[A, B]$ con $A > 0$.

Speriamo nella totale

$$|f_n(x)| = \frac{|e^{\frac{1}{n} \log(nx)} - 1|}{n+3}$$

Ora mi serve una disug. del tipo $|e^t - 1| \leq Lt$ per $t \in [-M, M]$.

Detto meglio: per ogni $M > 0$ esiste $L > 0$ t.c.

$$|e^t - 1| \leq L|t| \quad \forall t \in [-M, M]$$

Basta dim. che quando $x \in [A, B]$ abbiamo che $t \in [-M, M]$

con M opportuno.

$$|t| = \frac{|\log(mx)|}{n} \leq \frac{|\log x|}{n} + \underbrace{\frac{|\log m|}{n}}_{\text{limitato se } x \in [A, B]}$$

In ogni intervallo $[A, B]$ con $A > 0$ vale

$$|f_n(x)| \leq L \frac{|\log(mx)|}{n} \frac{1}{n+3} \leq \frac{\text{cost.} \cdot \log m}{n(n+3)}$$

e quindi abbiamo conv. totale $\rightarrow$ conv. in $(0, +\infty)$.

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

(Solito trucco di usare la somma parziale)

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \text{ non è ovvio}$$

(Se potessi scambiare sarebbe $-\infty$).

(Esercizio 😊)

(Occhio: se $f_n(x)$ non hanno un segno in un intorno di 0!!!)

— 0 — 0 —

[Hint per l'esercizio: aggiungere e togliere $\sqrt[n]{n}$ al numeratore]

ANALISI 2

—

LEZIONE 093

Note Title

28/03/2018

SERIE DI POTENZE

Una serie di potenze è una serie di funzioni del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

↑
coefficienti
(numeri reali)

(brutalmente: polinomio di grado infinito)

Domande: → per quali x converge?
 → in che senso converge?
 → a che cosa converge?

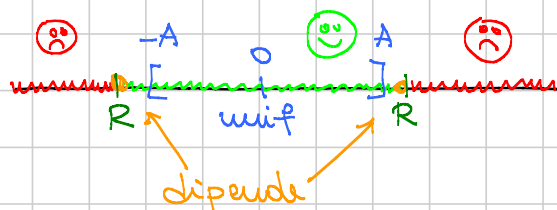
Teorema 1 (Raggio di convergenza)

Esiste $R \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ tale che

(i) se $|x| < R$ allora la serie converge, anzi converge assolutamente, anzi converge totalmente (dunque unif.) su tutti gli intervalli del tipo $[-A, A]$ con $A < R$
↑
stretto

(ii) se $|x| > R$ allora la serie non converge, anzi non verifica nemmeno la cond. nec., anzi il termine generale non è nemmeno limitato

(iii) se $|x| = R$, cioè $x = \pm R$, allora BOH (indipendentemente se $\pm R$ può avere comp. diversi).

Riassunto

- Oss. 1 - Per $x=0$ una serie di potenze converge sempre e ha come somma C_0 .
- 2 - Se $R=0$ la serie converge solo per $x=0$.
- 3 - Se $R=+\infty$ la serie conv. sempre e conv. unif. (anzi totalmente) sui compatti.

Teorema 2 (Formula per il calcolo di R)

Sia
$$L := \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

Allora $R = \frac{1}{L}$ (con ovvio significato se $L=0$ e $L=+\infty$)

Teorema 3 (Abel)

Supponiamo che una serie di potenze converga anche per $x=R$ (non sarebbe obbligata).

Allora converge unif. in $[0, R]$ (e quindi anche in $[-A, R]$ con $A < R$)

Stesso discorso in $x = -R$.

(In particolare: se converge in $x = \pm R$, allora conv. unif. in tutto $[-R, R]$)

Teorema 4 (Ulteriore regolarità) che indico con $f(x)$

La somma di una serie di potenze è una funzione C^∞ in $(-R, R)$ e le sue derivate si calcolano "derivando la serie".

In particolare

$$f^{(k)}(0) = k! C_k$$

Una serie di pot. è la serie di Taylor di se stessa

Esempio 1 Vari comportamenti al bordo

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

 $(-1, 1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

 $[-1, 1)$ ↑
Leibnitz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

 $[-1, 1]$

Esempio 2 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \forall x \in (-1, 1)$

Si tratta di una geometria

$$\sum_{n=k}^{\infty} x^n = \frac{x^k}{1-x} \quad \forall x \in (-1, 1)$$

Basta raccogliere x^k .

Esempio 3 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n} \quad C_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Converge in $(-1, 1]$ per analisi 1 $\leadsto R = 1$ La conv. è unif. in $[0, 1]$

→ Motivo 1: Abel

→ Motivo 2: serie alla Leibnitz

[Non si possono usare teo. di monotonia perché occorre già sapere che il limite è continuo].

Per il teo. 4 so che la somma $f(x)$ è di classe C^∞ e

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{n-1} = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} \\ &\quad \uparrow \text{teo. scambio} \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \\ &\quad \uparrow \text{shift involti} \\ &= - \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

APERTO

 $\forall x \in (-1, 1)$

Quindi $f(x)$ è la primitiva di $-\frac{1}{1+x}$ che si annulla per $x=0$, quindi

$$f(x) = -\log(1+x) \quad \forall x \in (-1,1)$$

Per Abel ho conv. unif. fino ad 1, quindi $f(x)$ è continua fino ad 1, quindi

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -\log(1+x) = -\log 2$$

$$\stackrel{=}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Ho così dimostrato che

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \log 2$$

Esempio 4 Dimostriamo che

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

Considero la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

- Converge per $x \in (-1, 1]$ (quindi $R=1$)
 ↑ in realtà pure in -1 (è disponi 😊) dopo video
- Converge unif. in $[0, 1]$ per Abel o Leibnitz, quindi $f(x)$ è continua in $[0, 1]$.
- Per $x \in (-1, 1)$ calcolo la derivata per serie

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}$$

Quindi $f(x)$ è la primitiva di $\frac{1}{1+x^2}$ con $f(0)=0$, quindi

$$f(x) = \arctan x \quad \forall x \in (-1,1)$$

• Per continuità lo stesso vale per $x=1$.

Esempio 5 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+2} \frac{1}{5^n}$

Voglio calcolare la somma.

• Pongo $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+2} x^n$ (sperando poi di mettere $x = \frac{1}{5}$)

• Analisi 1: converge $\forall x \in (-1,1)$

• Per il teo 4 è di classe C^∞ in $(-1,1)$.

• Cerco di farla diventare una geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2-2}{n+2} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - 2 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}}_{g(x)}$$

$\frac{1}{1-x}$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2} = \frac{1}{x^2} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2}}_{\varphi(x)} \quad \forall x \in (0,1)$$

$$\varphi'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} \quad \text{e } \varphi(0)=0$$

Quindi

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{t}{1-t} dt = \int_0^x \frac{t-1+1}{1-t} dt = -x - \log(1-x)$$

Da qui si conclude

$$\leadsto g(x) = - \frac{x + \log(1-x)}{x^2}$$

$\forall x \in (0,1)$
per sicurezza, ma
non ci sono prob. numerici
in $x=0$

$$\leadsto f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{x + \log(1-x)}{x^2}$$

• Non resta che sostituire $x = \frac{1}{5}$

$$f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{5}{4} - 5 - 25 \log \frac{4}{5}$$

Idea Cercare di portare una serie di potenze verso geometria
che o serie di Taylor di funzioni note.

ANALISI 2 — LEZIONE 094

Note Title

28/03/2018

Dim. teo. 1 (raggio di convergenza)

Lemma Supponiamo che per un certo $x_0 \neq 0$ si abbia che la succ.

$$C_n x_0^n$$

è limitata.

Allora per ogni $0 < A < |x_0|$ si ha che

(i) la serie converge assolutamente su $[-A, A]$

(ii) " " " " totalmente su $[-A, A]$

Dim. Per ipotesi esiste una costante M tale

$$|C_n| \cdot |x_0|^n \leq M$$

cioè

$$|C_n| \leq \frac{M}{|x_0|^n}$$



Per ogni $x \in [-A, A]$ vale la stima

$$|C_n x^n| \leq |C_n| \cdot |x|^n \leq \underbrace{\frac{M}{|x_0|^n} \cdot A^n}_{M_n} = M \cdot \left| \frac{A}{x_0} \right|^n$$

Osservo che $\sum M_n$ conv. (geom. con ragione < 1) da cui la tesi.



Dim. del teo. 1 Definisco

$$R := \sup \{ x \geq 0 : C_n x^n \text{ è limitato} \}$$

contiene almeno $x=0$

Ci sarebbero 3 casi: $\rightarrow R=0$
 $\rightarrow R=+\infty$ } esercizio
 $\rightarrow R \in (0, +\infty)$

Trattiamo l'ultimo caso. Ci sono due tesi da dire.

- La serie di pot. conv. tot. in $[-A, A]$ per ogni $A < R$

Per caratterizzazione del sup,
trovo $x_0 \in (A, R)$ in cui
 $C_n x_0^n$



è limitata. A quel pto applico il Lemma e ho
la tesi.

- La serie non converge per $|x| > R$ e anzi il suo termine generale non è limitato.

Questo segue univocamente dalla caratt. del sup.

Per ogni $x > R$, questo non ricade nell'insieme in cui il termine gen. è limitato.

Oss.: se ci fosse $x < -R$ in cui il termine generale è limitato, allora lo sarebbe pure in $-x > R$

Ci sta sotto che

$$C_n x^n \text{ è limit.} \Leftrightarrow C_n (-x)^n \text{ è limit.}$$

— o — o —

Dim. teo. 2 Sia $L := \limsup \sqrt[n]{|c_n|}$

Ci sarebbero 3 casi, ma facciamo quello vero, cioè

$$L \in (0, +\infty). \quad (\text{gli altri 2 sono esercizi})$$

Devo dimostrare 2 cose

- Per $|x| < \frac{1}{L}$ ho convergenza. Per il solito Lemma basta dim. che

$c_n x^n$
è limitato.

Dico addirittura che tende a 0. Applico criterio radice

$$\sqrt[n]{|c_n x^n|} = |x| \cdot \sqrt[n]{|c_n|}$$

$$\text{Ora } \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n x^n|} = |x| \cdot L < 1$$

$\leadsto |c_n x^n| \rightarrow 0 \leadsto$ è limitato

- Per $|x| > \frac{1}{L}$ ho che $c_n |x|^n$ non è limitato.

Questo è semplice ma non banale (non posso usare il criterio della radice).

Per una delle tante caratt. del $\limsup$, esiste $n_k \rightarrow +\infty$ t.c.

$$\sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} \rightarrow L \quad \text{per } k \rightarrow +\infty$$

Considero

$$\sqrt[n_k]{|c_{n_k}| \cdot |x|^{n_k}} \rightarrow |x| \cdot L > 1$$

$$\begin{array}{c} 1 \quad M \quad |x| \cdot L \\ \hline + \quad + \quad + \end{array}$$

Quindi def. $\sqrt[n_k]{|c_{n_k}| \cdot |x|^{n_k}} \geq M > 1$

Ma allora

$$|c_n| \cdot |x|^{n_k} \geq M^{n_k}$$

$\downarrow$
+∞

Quindi $|c_n| \cdot |x|^n$ non è limitata.
— o — o —

Lemma di Abel (Lemma di sommazione parziale)

Siano a_n e b_n due successioni. Siano A_n le somme parziali degli a_n , cioè $A_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$. Allora per ogni $m > n$ vale

$$\sum_{k=n+1}^m a_k b_k = A_m b_{m+1} - A_n b_{n+1} - \sum_{k=n+1}^m A_k (b_{k+1} - b_k)$$

Dim. telescopica:

$$A_m b_{m+1} - A_n b_{n+1} = \sum_{k=n+1}^m A_k b_{k+1} - A_{k-1} b_k$$

$$= \underbrace{\sum_{k=n+1}^m A_k b_{k+1} - A_k b_k}_{A_k (b_{k+1} - b_k)} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^m A_k b_k - A_{k-1} b_k}_{b_k (A_k - A_{k-1})}$$

$b_k a_k$

Dim. teo. 3Passo 1 Semplificazioni

- Posso assumere $x = R$ (se fosse $x = -R$ posso $x = -y$ e scarico i - sui coeff.)
- Posso assumere $R = 1$ (altrimenti posso $x = Ry$ e scarico le potenze di R sui coeff.)
- Posso assumere che $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ (la serie per $x=1$) converga a 0 (altrimenti cambio c_0).

Achtung! Non so se $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ converge !!!

Passo 2 Chiamo i coeff. an invece di c_n .Passo 3 Dimostro che $\sum a_n x^n$ conv. unif. in $[0, 1]$
(in generale la totale è falsa)

Dimostro che è di Cauchy (la succ. delle somme part.)

Applico Abel: per ogni $m > n$ vale

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^m a_k x^k &= A_m x^{m+1} - \underset{\uparrow b_k}{A_n x^{n+1}} - \sum_{k=n+1}^m A_k (x^{k+1} - x^k) \\ &= A_m x^{m+1} - A_n x^{n+1} - (x-1) \sum_{k=n+1}^m A_k x^k \end{aligned}$$

Metto i valori assoluti e trovo

$$\begin{aligned} |S_m(x) - S_n(x)| &\leq |A_m| \cdot |x|^{m+1} + |A_n| \cdot |x|^{n+1} \\ &\quad + (1-x) \sum_{k=n+1}^m |A_k| \cdot |x|^k \end{aligned}$$

$x \in [0, 1] \rightarrow$

Avendo supposto che $\sum a_n = 0$, sappiamo che $A_n \rightarrow 0$.

• Mi viene dato $\varepsilon > 0$

• Selgo $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $|A_n| \leq \frac{1}{4}\varepsilon$ per ogni $n \geq n_0$

• Per ogni $m > n \geq n_0$ il conto prec. mi dice che

$$|S_m(x) - S_n(x)| \leq \frac{1}{4}\varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon + (1-x) \frac{1}{4}\varepsilon \sum_{k=n+1}^m x^k \leq \frac{3}{4}\varepsilon$$

$$\quad \quad \quad \cancel{(1-x)} \frac{1}{4}\varepsilon \frac{x^k}{\cancel{1-x}}$$

$$\leq \frac{1}{4}\varepsilon$$

Quindi è di Cauchy $(S_n(x))$ e dunque conv. unif. su $[0, 1]$.

Esercizio Supponendo che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$

dimostrare che $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = +\infty$

Dim. teo. 4 Consideriamo la serie delle derivate

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^{n-1}$$

Dico che ha lo stesso raggio di conv. di quella iniziale.

Se lo dim. ho finito perché su ogni $(-A, A)$ con $A < R$ valgono i teoremi di scambio della derivata.

A meno di shift degli indici, devo calcolare

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n \cdot |c_n|} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|c_n|}) = L$$

grazie al fatto che uno dei 2 è un limite.

Stessa cosa se faccio derivata 20-esima
 $\underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad}$

Oss. Il raggio resta lo stesso, ma il comportamento
 per $x = \pm R$ può cambiare (solo in peggio)

Fatto generale: se $\sum n a_n$ converge, allora $\sum a_n$ conv.

$$\sum a_n = \sum \underbrace{n a_n}_{\substack{\downarrow \\ \text{succ. con} \\ \text{primitiva} \\ \text{limitata}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\substack{\downarrow \\ \text{tende a 0} \\ \text{decrescendo}}}$$

↪ criterio di Dirichlet.

ANALISI 2 - LEZIONE 095

Note Title

29/03/2018

Come calcolo la somma di una serie di potenze?

Risposta: spero che sia la serie di Taylor di una funzione nota, cioè del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

Sotto opportune ipotesi le serie di Taylor convergono alla funzione stessa per gli x per cui convergono.

Teorema (criterio di analiticità)

↑ termine misterioso

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, sia $r > 0$, sia f di classe C^∞ in (x_0-r, x_0+r) . Supponiamo che esista una costante M tale che

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \frac{n!}{r^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in (x_0-r, x_0+r)$$

Allora vale

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \quad \forall x \in (x_0-r, x_0+r)$$

cioè $f(x)$ è somma della sua serie di Taylor

Dim Sia $S_n(x)$ le somme parziali, cioè i Taylor di ordine n di $f(x)$. Allora per Taylor-Lagrange

$$f(x) = S_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

dove c è p.to misterioso in (x_0-r, x_0+r) e dipende da x

Grazie all'ipotesi

$$\begin{aligned}
 |f(x) - S_n(x)| &\leq \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} |x-x_0|^{n+1} \\
 &\leq \frac{1}{(n+1)!} M \frac{(n+1)!}{n^{n+1}} \cdot |x-x_0|^{n+1} \\
 &= M \underbrace{\left| \frac{x-x_0}{n} \right|^{n+1}}_{\downarrow 0}
 \end{aligned}$$

Fissato $x \in (x_0-r, x_0+r)$ abbiamo che $S_n(x) \rightarrow f(x)$.
La conv. è uniforme, anzi totale, sui compatti del tipo

$$[x_0-a, x_0+a] \quad \text{con} \quad \underbrace{0 \quad \quad 0}_{\quad \quad \quad}$$

Esempio 1 Le funzioni e^x , $\sin x$, $\cos x$ ricadono nel teorema per ogni $r > 0$.

→ Nel caso di $\sin x$ e $\cos x$

$$|f^{(n)}(x)| \leq 1 \leq M_r \frac{n!}{r^n}$$

↑
Per ogni n esiste M_r t.c.

Conseguenza: le serie di Taylor di $\sin x$ e $\cos x$ convergono alle funz. stesse unif. su tutti i compatti di $\mathbb{R}$

Oss. Non convergono unif. su $\mathbb{R}$ (le $S_n(x)$ NON sono mai limitate, mentre $\sin x$ e $\cos x$ lo sono)

→ Nel caso di e^x

$$|f^{(n)}(x)| = e^x \leq M_r \frac{n!}{r^n} \quad \forall x \in (-r, r)$$

Conseguenza: anche la serie di Taylor di e^x conv. unif. sui compatti di $\mathbb{R}$, ma non su tutto $\mathbb{R}$ (il sup di $e^x - S_n(x)$ su tutto $\mathbb{R}$ è sempre $+\infty$)

Esempio 2 $\log(1+x)$ è somma della sua serie di Taylor per ogni $x \in (-1, 1]$.

Voglio evitare uso derivate! Parto dalla serie geometrica con ragione $-x$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x} \quad \forall x \in (-1, 1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

Considero la serie di Taylor $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} =: f(x)$

Sappiamo che ha $R=1$ e la sua derivata è

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1}$$

↑
teo. scambio

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$$

↑
shift
indici

Sappiamo che $f(0)=0$ e $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ per ogni $x \in (-1, 1)$.

Quindi $f(x) = \log(1+x)$ per ogni $x \in (-1, 1)$.

Grazie a Abel o Leibnitz la cosa si estende a $x \in (-1, 1]$.

Oss. Non si estende oltre. Per $x \leq -1$ questo è ovvio pensando a $\log(1+x)$. Per $x > 1$ la funzione limite non avrebbe problemi, ma la serie di Taylor sì!

Esempio 3 $\arctan x$ è somma della sua serie di Taylor per ogni $x \in [-1, 1]$.

Faccio una sola derivata

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Osservo che $R=1$, quindi

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in (-1, 1)$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 teo. scambio geometrica

Come prima $f(0)=0$ e $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ per ogni $x \in (-1, 1)$

quindi $f(x) = \arctan x$ per ogni $x \in (-1, 1)$. Per Abel o Leibnitz si estende a $[-1, 1]$.

Oss. $\arctan x$ non ha problemi da nessuna parte in apparenza. In realtà il problema si vede sulla derivata ed è in $\pm i$, che guarda caso distano 1 da 0.

Futuro: il giorno in cui sviluppo $\arctan x$ in $x_0 = 3$, il raggio di convergenza sarà la distanza di 3 da i !!!

Esempio 4 $(1+x)^\alpha$ è somma della sua serie di Taylor in $(-1, 1)$ cioè

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \forall x \in (-1, 1)$$

$\uparrow$
 $\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Idea: chiamo $\varphi(x)$ il RHS e dimostro che

$$\frac{\varphi(x)}{(1+x)^\alpha} = 1 \quad \forall x \in (-1, 1)$$

La frazione vale 1 per $x=0$. Basta dim. che ha derivata nulla

$$\begin{aligned} \left[\frac{\varphi(x)}{(1+x)^\alpha} \right]' &= \frac{\varphi'(x) (1+x)^\alpha - \alpha (1+x)^{\alpha-1} \varphi(x)}{(1+x)^{2\alpha}} \\ &= \frac{\varphi'(x) (1+x) - \alpha \varphi(x)}{(1+x)^{\alpha+1}} \end{aligned}$$

Hi basta dim. che

$$\varphi'(x) (1+x) = \alpha \varphi(x) \quad \forall x \in (-1, 1)$$

Ora

$$\begin{aligned} (1+x) \varphi'(x) &= (1+x) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \right]' && \text{(teo. scambio)} \\ &= (1+x) \sum_{n=0}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1} \\ &= \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \binom{\alpha}{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1) \binom{\alpha}{n+1} + n \binom{\alpha}{n} \right] x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha \binom{\alpha}{n} x^n \\ &= \alpha \varphi(x) \quad \text{☺} \end{aligned}$$

Conto di binomiali (che giustifica il passaggio sopra)

$$(n+1) \binom{\alpha}{n+1} + n \binom{\alpha}{n} =$$

$$= \cancel{(n+1)} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n)}{\cancel{(n+1)!} n!} + n \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!}$$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} [\alpha - n + n] = \alpha \binom{\alpha}{n}.$$

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 096

Note Title

29/03/2018

L'ESERCIZIO[Aggiunto dopo video: meglio partire da $n=1$]

Consideriamo la serie di funzioni

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^a}{1+n^2 x^2} \quad x > 0$$

dove $a > 0$ è un parametro realeRiscaldamento: $f \in C^0((0, +\infty))$ per ogni $a > 0$.Convergenza puntuale ok grazie ad n^2 .Spero in una totale su $[A, B]$ per ogni $0 < A < B$

$$|f_n(x)| \leq \frac{B^a}{1+n^2 A^2} \quad \forall x \in [A, B]$$

$\uparrow$
 num + grande
 denom + piccolo

Conclusione grazie a M-test.

Riscaldamento 2: $f \in C^1((0, +\infty))$ per ogni $a > 0$

$$f'_n(x) = \frac{a x^{a-1} (1+n^2 x^2) - 2n^2 x \cdot x^a}{(1+n^2 x^2)^2}$$

$$= \frac{a + (a-2)n^2 x^2}{(1+n^2 x^2)^2} x^{a-1}$$

$$|f'_n(x)| \leq \frac{a + |a-2|n^2 x^2}{(1+n^2 x^2)^2} x^{a-1} \leq \frac{a + |a-2|n^2 B^2}{(1+n^2 A^2)^2} B^{a-1}$$

Conclusione come sopra.

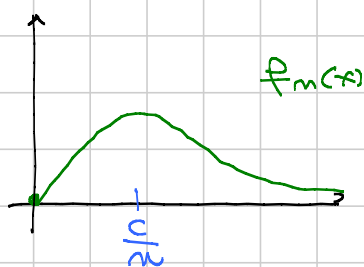
Passaggio intermedio: come sono fatte le $f_n(x)$.

Dipende da a :

→ se $a > 2$ sono monod. cresc. e tendono a $+\infty$

→ se $a = 2$ sono monod. cresc. e tendono a $\frac{1}{n^2}$

→ se $a < 2$ allora prima crescono e poi decrescono a 0



Il p.to di max risolve

$$(2-a)n^2x^2 = a$$

Domanda seria 1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

- Se $a > 2$, allora $f(x) \geq f_2(x)$ e questa tende a $+\infty$ quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- Se $a = 2$, se potessi scambiare avrei

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \left(= \frac{\pi^2}{6} \right) \end{aligned}$$

Posso scambiare perché ho $\mathbb{Q}$ totale in $(0, +\infty)$: rifatti

$$\sup_{x>0} |f_n(x)| = \frac{1}{n^2}$$

↑ essendo ↑ il sup è il limite a $+\infty$

- Se $a < 2$ e potessi scambiare avrei

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{1+n^2 x^2}}_{=0} = 0$$

Posso scambiare? Mi basta la totale in $[4, +\infty)$

Dallo studio di sopra segue che definitivamente

$$\sup_{x \geq 4} |f_n(x)| = f_n(4) \rightsquigarrow \text{totale} \rightsquigarrow \text{ok scambio}$$

Domanda seria 2 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

Se posso scambiare ottengo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^n}{1+n^2 x^2} = 0$$

Posso scambiare? Tranquillo per $a \geq 2$.

Provo la totale in $(0,1)$

$$\sup_{x \in (0,1)} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{c}{n}\right) = \frac{c^a}{n^a} \frac{1}{1+c^2}$$

$\uparrow$ dipende solo da a
 $\uparrow$ per n grande

- Per $a > 1$ posso scambiare e quindi $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.

- Per $a = 1$ troviamo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{1+n^2 x^2}$$

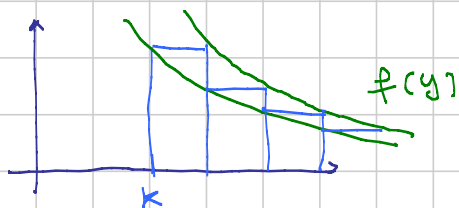
Riprendiamo il confronto serie - integrali di analisi 1

Brutal mode:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{1+n^2 x^2} = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+y^2 x^2} dy = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+d^2 y^2} dy$$

↑
effetto psicologico
di togliere la x !!

$$= [\arctan(dy)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$



Se $f(y)$ è positiva e decrescente, allora

$$\int_k^{+\infty} f(y) dy \leq \sum_{n=k}^{+\infty} f(n) \leq f(k) + \int_k^{+\infty} f(y) dy$$

Applicato nel vostro caso

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+y^2 x^2} dy \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{1+n^2 x^2} \leq \underset{\substack{\uparrow \\ f(0)}}{x} + \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+y^2 x^2} dy$$

$\frac{\pi}{2} \qquad \qquad \qquad \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\pi}{2} \leq f(x) \leq x + \frac{\pi}{2} \quad \leadsto \text{carabinieri}$$

• $a < 1$ non si scambia, ma si osserva che

$$f(x) = \frac{1}{\underbrace{x^{1-a}}_{+\infty}} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{x}{1+n^2 x^2}}_{\frac{\pi}{2}}$$

Da qui deduco che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ con parte princ. $\frac{\pi}{2} \frac{1}{x^{1-a}}$

Se volessi fare $\int_0^{2.5} f(x) dx$, saprei che converge perché
 ha problemi in $x=0$, ma esponente ≤ 1 .

Esercizio $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$

Già visto: converge per $x > 1$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

Voglio sapere se converge

$$\int_1^3 f(x) dx$$

Vorrei la parte principale di $f(x)$ in $x \sim 1$.

Brutal mode: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$

$$= \int_1^{+\infty} y^{-x} dy$$

$$= \left[\frac{1}{1-x} y^{-x+1} \right]_1^{+\infty}$$

$$= \left[\frac{1}{1-x} \frac{1}{y^{x-1}} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-1}$$

Questo suggerisce che

$$f(x) \sim \frac{1}{x-1} \quad \text{per } x \rightarrow 1^+$$

e quindi l'integrale improprio diverge.

Rigoroso: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \geq \int_1^{+\infty} \frac{1}{y^x} dy = \frac{1}{x-1}$.

Posso usare il confronto perché $\frac{1}{y^x}$ è decr. in y .

Stabilire se converge

$$\int_2^{+\infty} f(x) dx$$

Già visto che $f(x) \rightarrow 1$ per $x \rightarrow +\infty$ (si poteva scambiare) per colpa di $n=1$

Rilancio interessante: $g(x) := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^x} = 2^{-x} + 3^{-x} + \dots$

Dico che $g(x) \sim 2^{-x}$ per $x \rightarrow +\infty$

Considero $2^x g(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^x$

Dico che converge totalmente in $[13, +\infty)$, cosa che si verifica facilmente, da cui posso scambiare e trovare che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x g(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^x = 1$$

per colpa di $n=2$
(gli altri sono 0)

— 0 — 0 —

ANALISI 2

—

LEZIONE 097

Note Title

29/03/2018

Come calcolare

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

È un esercizio di Analisi 3, ma...

ultra brutal mode (by Euler).

Sia $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ un polinomioSiano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ le radici. Allora

$$\sum \lambda_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \sum \lambda_i \lambda_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\begin{aligned} \sum \lambda_i^2 &= \left(\sum \lambda_i \right)^2 - 2 \left(\sum \lambda_i \lambda_j \right) = \frac{a_{n-1}^2}{a_n^2} - 2 \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ &= \frac{a_{n-1}^2 - 2 a_n a_{n-2}}{a_n^2} \end{aligned}$$

$$\sum \left(\frac{1}{\lambda_i} \right)^2 = ? \quad \text{Se } x \text{ risolve } p(x) = 0, \text{ allora } \frac{1}{x} \text{ risolve } p\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Morale $\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$ sono le radici di

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots$$

$$\text{e quindi } \sum \frac{1}{\lambda_i^2} = \frac{a_1^2 - 2 a_0 a_2}{a_0^2} \quad \text{☺}$$

Facciamo finta che valga per le serie di potenze

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{6} x^2 + \dots$$

Le radici di $f(x)$ sono $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Quindi

$$\sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} \frac{1}{k^2 \pi^2} = \frac{1}{\pi^2} \cdot 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{a_1^2 - 2a_0 a_2}{a_0^2} = \frac{2}{6}$$

Da cui $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ 😊

Idea: provare con il cubo (per il quale non c'è una formula) e vedere cosa succede.

Varianti della geometria

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \forall x \in (-1, 1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \quad \forall x \in (-1, 1)$$

è come se partissi da $n=k$ perché prima viene $\Rightarrow$ il binomiale

Dim. Deriviamo k volte la geometria usando lo scambio

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{1-x} \right)^{(k)} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)^{(k)} \\ &\stackrel{\text{reduzione}}{\parallel} \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} k! \binom{n}{k} x^{n-k} \\ &= k! \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} \end{aligned}$$

Semplificando $k!$ abbiamo la tesi

Esercizio Calcolare

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n^2 - 2n) x^n$$

La prima la scrivo come

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = x \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{1} x^{n-1}}_{k=1} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Per la seconda osservo che

$$n^2 = \binom{n}{2} \cdot 2 + \binom{n}{1} \quad \text{da cui}$$

$$\frac{n(n-1)}{2} \cdot 2$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n &= x^2 2 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{2} x^{n-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{1} x^{n-1} \\ &= 2x^2 \frac{1}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

Allo stesso modo si fa la 3ª.

Oss. Una pensa $1, n, n^2, n^3$ come base dello spazio dei polinomi, ma in questo caso una base + comoda è

$$\begin{array}{ccccccc} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \dots & & \\ & & \text{---} & 0 & \text{---} & 0 & \text{---} \end{array}$$

Esercizio Calcolare il raggio di conv. di

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^{n^2}$$

$$\sqrt[n]{C_n} = \sqrt[n]{n!} \rightarrow +\infty = L \text{ quindi } R = \frac{1}{L} = 0$$

NO!!! sarebbe così se ci fosse $n! x^n$

Detto per bene

$$C_n := \begin{cases} k! & \text{se } n = k^2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Devo fare

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{C_n} = \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ \uparrow \\ \text{altrove fa 0}}} \sqrt[k^2]{k!} = 1 \leadsto R = \frac{1}{1} = 1$$

$$\left[1 \leq k! \leq k^k \leadsto \underset{0}{1} \leq \underset{0}{\sqrt[k^2]{k!}} \leq \underset{0}{\sqrt[k]{k}} \leadsto \text{convergenti} \right]$$

Esercizio Calcolare

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{(2n)!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{7^n}{(2n)!}$$

Sono 2 casi particolari di

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$$

che conv. unif. sui compatti di $\mathbb{R}$ (perché $R = +\infty$)

[Euristiche nel video ...]

Se $x \geq 0$, pongo $x = y^2$ e trovo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n}}{(2n)!} = \cosh y = \cosh \sqrt{x}$$

Per $x \leq 0$, pongo $x = -y^2$ e trovo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-y^2)^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} = \cos y = \cos(\sqrt{-x})$$

Esercizio $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 + 4n + 3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+1)} x^n$

$$\frac{1}{(n+3)(n+1)} = \frac{A}{n+3} + \frac{B}{n+1} \quad \text{per opportuni } A \text{ e } B$$

Quindi mi riduco a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+3} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

$$\frac{1}{x^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{n+3}$$

Da posso vedere come serie di Taylor di $-\log(1-x)$
a cui mancano un po' di termini iniziali
(oppure derivo e mi ritrovo una geometrica).

Esercizio

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 + \frac{x^2}{n^2} \right)$$

Facile: $f(x)$ è continua in $(0, +\infty)$ anche in $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(x) \geq f_{2x}(x) \downarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \quad \text{perché è continua ovunque}$$

Domanda: ordine di infinito per $x \rightarrow +\infty$

Brutal mode: $f(x) \sim \int_1^{+\infty} \log \left(1 + \frac{x^2}{y^2} \right) dy$

$$\frac{x}{y} = z \rightsquigarrow y = \frac{x}{z}$$

$$\rightsquigarrow dy = -\frac{x}{z^2} dz$$

$$= \int_x^0 \log(1+z^2) \left(-\frac{x}{z^2} \right) dz$$

$$= x \underbrace{\int_0^x \frac{\log(1+z^2)}{z^2} dz}_{\downarrow}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+z^2)}{z^2} dz$$

integrale improprio
convergente

Quindi $f(x) \sim Ix$ per $x \rightarrow +\infty$, dove I è il valore dell'integrale improprio, che volendo si calcola.

Rigoroso: confronto serie - integrali.

Dalla regola di Stirling: $I = \pi$.

— 0 — 0 —

ANALISI 2

LEZIONE 098

Note Title

05/04/2018

FUNZIONI ANALITICHE

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un aperto (non vuoto). Una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice analitica in A se è di classe C^∞ in A e per ogni $x_0 \in A$ esiste $r > 0$ t.c. $(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq A$ e la serie di Taylor con centro in x_0 converge ad $f(x)$ in $(x_0 - r, x_0 + r)$, cioè

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$$

L'insieme delle funzioni analitiche in A si indica con

$$C^\omega(A)$$

← omega minuscolo

Oss. Esistono funzioni C^∞ che non sono analitiche: posso scrivere la serie di Taylor ma questa o non converge, o converge a roba $\neq f(x)$.

[Basta prendere "eppm si muove", tipo $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ estesa ponendo $f(0) = 0$. La sua serie di Taylor in 0 è identicamente nulla $\leadsto$ non analitica in nessun aperto A che contiene 0].

Proprietà

- $C^\omega(A)$ è uno sp. vett. (facile: le derivate di una comb. lin. sono comb. lin. delle derivate)
- prodotto di funzioni analitiche è analitico (lo dimostreremo e non è ovvio)
- le funzioni "classiche" ($\sin x$, e^x , $\cos x$, $\arctan x$...) sono analitiche dove non hanno problemi

- derivate / primitive di funzioni analitiche sono analitiche (facile: shift degli indici sulle serie di Taylor)
- composizione di funzioni analitiche è analitica (vero ma per nulla ovvio e non lo dimosteremo)
- rapporto di funt. analitiche è analitico dove denomi $\neq 0$ (ovvio se dim. che $\frac{1}{x}$ è analitica su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e so che la comp. è analitica)
- le serie di potenze sono funzioni analitiche (meno ovvio di quanto sembra)

Proposizione Sia $R > 0$ e supponiamo che

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \forall x \in (-R, R) \quad \text{raggio di conv.}$$

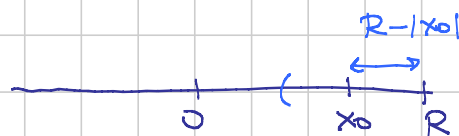
Allora $f \in C^{\infty}((-R, R))$

Dim. Abbiamo già visto, derivando per serie, che

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Da questo segue che la serie di Taylor in $x_0 = 0$ converge ad $f(x)$. Mi serve che valga la stessa cosa per ogni $x_0 \in (-R, R)$.

Step 1 Preso $x_0 \in (-R, R)$ dimostriamo che la serie di Taylor con centro in x_0 converge con il massimo raggio possibile, cioè $R - |x_0|$



Stimo le derivate di $f(x)$. Fisso $|x_0| < r < R$

$$\begin{array}{c} |x_0| \quad r \quad R \\ \hline \end{array}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n \text{ converge}$$

Quindi esiste M_r t.c. $|c_n| \cdot r^n \leq M_r$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n \geq k} \underbrace{k! \binom{n}{k} x^{n-k}}_{\text{derivata } k\text{-esima di } x^n} c_n$$

da cui

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(x)| &\leq \sum_{n \geq k} |c_n| \cdot k! \binom{n}{k} |x|^{n-k} \\ &\leq k! \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} M_r \frac{1}{r^n} x^{n-k} \\ &= M_r k! \frac{1}{r^k} \underbrace{\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} \left(\frac{|x|}{r}\right)^{n-k}}_{\substack{\text{si calcola} \\ \downarrow}} \\ &= M_r k! \frac{1}{r^k} \frac{1}{\left(1 - \frac{|x|}{r}\right)^{k+1}} \quad \forall x \in (-r, r) \end{aligned}$$

Metto $x = x_0$ e ottengo

$$\underbrace{\frac{|f^{(k)}(x_0)|}{k!}}_{\substack{\text{coeff. della serie} \\ \text{di Taylor centrata in } x_0}} \leq \frac{M_r}{r^k} \frac{1}{\left(1 - \frac{|x_0|}{r}\right)^{k+1}}$$

Per avere il raggio di conv. faccio il limite della radice k -esima e questo viene

$$\frac{1}{r} \frac{1}{1 - \frac{|x_0|}{r}} = \frac{1}{r - |x_0|} \quad \Rightarrow \text{reciproco è } r - |x_0|$$

Potremo scegliere r in $(|x_0|, R)$, il miglior raggio garantito è $R - |x_0|$.

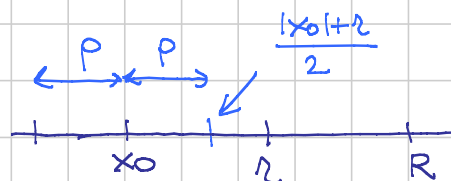
Step 2 Resta da dim. che la serie converge proprio a $f(x)$, anche a meno di restringere l' intorno di x_0 .
Per far questo basta usare il criterio di convergenza di qualche les. precedente, cioè verificare che esiste $\rho > 0$ t.c.

$$|f^{(k)}(x)| \leq M_p \frac{k!}{\rho^k} \quad \forall x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Dalla stima precedente sulla derivata basta verificare che

$$M_2 \frac{\cancel{k!}}{2^k \left(1 - \frac{|x|}{2}\right)^{k+1}} \leq M_p \frac{\cancel{k!}}{\rho^k} \quad \forall x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$$

e qui posso scegliere r e ρ



Gli x più pericolosi sono quelli grandi

$$M_2 \frac{1}{2^k \left(1 - \frac{|x_0| + r}{2}\right)^{k+1}} \leq M_p \left(\frac{2}{2 - |x_0|}\right)^k$$

e ora basta fare il conto e trova

Oss. La prop. precedente sistema l' analiticità delle funzioni elementari

[La serie di Taylor di $\sin x$ centrata in $x_0 = 0$ converge in $(-3000, 3000)$, quindi converge in un intorno anche quella centrata in $x_0 = 2018$]

Esercizio Dimostrare che $f(x) = \frac{1}{x}$ è analitica per $x \neq 0$.

Prendo $x_0 \neq 0$. Calcolo le derivate

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{k!}{x^{k+1}}$$

Quando mi metto in x_0 il coeff. della serie di potenze è

$$c_k = (-1)^k \frac{k!}{x_0^{k+1}} \cdot \frac{1}{k!} \leadsto \limsup \sqrt[k]{|c_k|} = \frac{1}{|x_0|}$$

$$\leadsto R = |x_0|$$

Devo accertarmi che converga proprio a $\frac{1}{x}$, eventualmente in un intorno più piccolo.

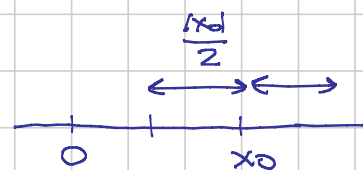


3° modo Spero di trovare $\rho > 0$ e M_ρ t.c.

$$|f^{(k)}(x)| \leq M_\rho \frac{k!}{\rho^k} \quad \forall x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Gli x più pericolosi sono quelli + piccolì, quindi mi serve

$$\frac{k!}{(|x_0| - \rho)^{k+1}} \leq M_\rho \frac{k!}{\rho^k}$$



Prendendo $\rho = \frac{|x_0|}{2}$ troviamo

$$\frac{1}{\rho^{k+1}} \leq M_\rho \frac{1}{\rho^k} \quad \text{vera con } M_\rho = \frac{1}{\rho}$$

La serie converge in $(0, 2x_0)$, ma la garanzia di convergenza a $f(x)$ solo in $(\frac{x_0}{2}, \frac{3}{2}x_0)$

2° modo Riciclo la geometria

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{x} &= \frac{1}{x_0 + x - x_0} = \frac{1}{x_0} \frac{1}{1 + \frac{x - x_0}{x_0}} \\
 &= \frac{1}{x_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x - x_0}{x_0} \right)^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x_0^{n+1}} (x - x_0)^n \\
 &\quad \uparrow \\
 &\quad \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}
 \end{aligned}$$

L'uguaglianza vale quando $\frac{x - x_0}{x_0} \in (-1, 1)$, cioè

quando $x \in (0, 2x_0)$, cioè proprio nel massimo raggio possibile.

— o — o —

Oss. Questo mostra che $\log x$ è analitica in $(0, +\infty)$.

$$(A+B)^2 \geq 4AB \Rightarrow A+B \geq 2\sqrt{AB} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{AB}} \geq \frac{2}{A+B}$$

$$A = k+1, \quad B = n-k+1$$

Teorema Supponiamo che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converga assolutamente e che $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converga. Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right)$$

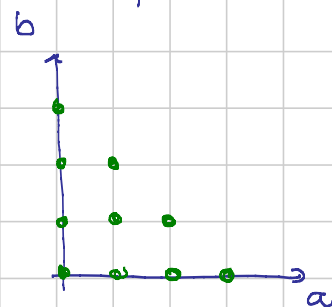
Dim. Considero le somme parziali della serie prodotto

$$\sum_{k=0}^n c_k = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0$$

$$= \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k$$

$$= \sum_{k=0}^n a_{n-k} (b_k - b_{\infty}) + \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_{\infty}$$

$$= \sum_{k=0}^n \underbrace{a_{n-k}}_{\substack{\text{piccolo se} \\ k \text{ è piccolo e} \\ n \text{ è grande}}} \underbrace{(b_k - b_{\infty})}_{\substack{\text{piccolo per} \\ k \text{ grande}}} + \underbrace{b_{\infty} a_n}_{\substack{\downarrow \\ b_{\infty} a_{\infty}}}$$



$$A_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

$$B_n = b_0 + b_1 + \dots + b_n$$

Più formalmente.

• Fisso $\hat{A} := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$
finito per ipotesi

$\hat{B} := \sup\{|B_n| : n \geq 1\}$
finito perché $B_n \rightarrow B_{\infty}$

• Mi viene dato $\varepsilon > 0$

• Scelgo $m_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{n \geq m_0} |a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2(2^{\hat{B}} + 1)}$$

$\uparrow$ paura che sia $\hat{B} = 0$

• Scelgo $l_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|B_n - B_\infty| \leq \frac{\varepsilon}{2(\hat{A} + 1)} \quad \forall n \geq l_0$$

• Pongo $m_0 := m_0 + l_0$ e dico che per $n \geq m_0$ la sommatoria che mi interessa è $\leq \varepsilon$.

Infatti

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n a_{n-k} (B_k - B_\infty) \right| &\leq \sum_{k=0}^n |a_{n-k}| \cdot |B_k - B_\infty| \\ &= \sum_{k=0}^{l_0} |a_{n-k}| \cdot |B_k - B_\infty| + \sum_{k=l_0+1}^n |a_{n-k}| \cdot |B_k - B_\infty| \end{aligned}$$

Per ipotesi la 2ª è

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{k=l_0+1}^n |a_{n-k}| \cdot \frac{\varepsilon}{2(\hat{A} + 1)} = \frac{\varepsilon}{2(\hat{A} + 1)} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \\ &= \frac{\varepsilon \hat{A}}{2(\hat{A} + 1)} \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Per ipotesi la 1ª è

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{k=0}^{l_0} |a_{n-k}| \underbrace{2^{\hat{B}}}_{|B_k - B_\infty| \leq 2^{\hat{B}}} \leq 2^{\hat{B}} \sum_{\substack{k \geq n-l_0 \\ \geq m_0}} |a_k| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(2^{\hat{B}} + 1)} \cdot 2^{\hat{B}} \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Teorema Il prodotto di funzioni analitiche è analitico, all'interno di una zona di analiticità comune

Lemma (Derivata del prodotto)

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

Dim. Stessa evoluzione del binomio di Newton.

Dim. teorema Prendiamo x_0 e zona di analiticità ed $\epsilon > 0$ tale che

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \quad \forall x \in (x_0-\epsilon, x_0+\epsilon)$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \quad \text{''}$$

Pongo $\varphi(x) := f(x) \cdot g(x)$ e dico che $\varphi(x) = \text{prod. serie}$

Perché le serie convergono assolutamente, deduciamo

$$\varphi(x) = \text{prodotto serie}$$

$$= \text{serie prodotto alla Cauchy}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \frac{g^{(n-k)}(x_0)}{(n-k)!} (x-x_0)^k (x-x_0)^{n-k} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x-x_0)^n \underbrace{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0)}_{\varphi^{(n)}(x_0)}$$

Oss. In modo "analogo" si farebbe la analiticità della composizione, ma serve la formula per la derivata n -esima

Esempio classico

$$\begin{aligned}
 e^x \cdot e^y &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \right) \\
 &\stackrel{\text{prod. Cauchy}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^n = e^{x+y}
 \end{aligned}$$

Oss 1 Uno potrebbe definire l'esponenziale come somma della serie ed ottenere a posteriori la proprietà

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

Oss 2 Tutto questo si può fare sui complessi arrivando a

$$e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi}$$

↑
scrivendolo come serie e separando
parte reale / immaginaria viene

$\cos b + i \sin b$

— 0 — 0 —

ANALISI 2

—

LEZIONE 100

Note Title

16/04/2018

RIGIDITÀ DELLE FUNZIONI ANALITICHETeorema Sia $f \in C^\omega(\mathbb{R})$ (funzione analitica)Allora $\mathcal{Z}$ insieme

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$$

ha solo 2 possibilità:

→ è tutto $\mathbb{R}$

→ è costituito solo da p.ti isolati. (non ha p.ti di accum.)

Cor.1 Se $f \in C^\omega(\mathbb{R})$ si annulla su un insieme che ha un p.to di accumulazione, allora $f(x) \equiv 0$.Cor.2 Se $f \in C^\omega(\mathbb{R})$ e $g \in C^\omega(\mathbb{R})$ coincidono su una successione $\{x_n\}$ convergente, allora

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dim. Applico thm. 1 alla differenzaOss.① Non basta che $f(x) = g(x)$ per infiniti valori di x [$\sin x$ e $2 \sin x$ coincidono in $\pi \mathbb{Z}$]② Se f e $g \in C^\omega(A)$ con A aperto, allora non basta che $f(x_n) = g(x_n)$ con $x_n \rightarrow x_\infty \notin A$ [$\sin \frac{1}{x}$ e $2 \sin \frac{1}{x}$ con $A = (0, +\infty)$]③ Generalizzare teo. ad aperto A .

Dim. 1^o. Supponiamo $f(x) \not\equiv 0$. Sia $f(x_0) = 0$.
Per analiticità sviluppo $f(x)$ in un intorno di x_0

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$$

$$= c_k (x-x_0)^k + c_{k+1} (x-x_0)^{k+1} + \dots$$

$\uparrow$ primo coeff. non nullo $\uparrow$ può anche essere nullo

$$= (x-x_0)^k \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k} (x-x_0)^n}_{\text{somma di serie di potenze, quindi continua che indico con } g(x)}$$

Ora $g(x)$ è continua e $g(x_0) = c_k \neq 0$, quindi $g(x) \neq 0$ in un intorno di x_0 .

Quindi abbiamo dim che

→ o esiste un intorno di x_0 in cui $f \equiv 0$

→ o esiste un intorno di x_0 in cui f si annulla solo in x_0 .

Per dire le cose per bene devo prendere il luogo di zeri, considerare il complementare, prendere un pto sulla frontiera e concludere.

— o — o —

Esercizio (Disuguaglianza alla KOJASEVIC)

Sia f analitica in $\mathbb{R}$.

Supponiamo che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Allora per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste una costante K_M tale che

$$|f'(x)| \leq K_M [f(x)]^{1/2} \quad \forall x \in [-M, M]$$

CONTRO NATURA: stimo la derivata
con la funzione

Dim. Se $f(x) \equiv 0$, allora non è difficile ☺.

Altrimenti per ogni M avremo che $f(x)$ si annulla solo un # finito di volte in $[-M, M]$. Al di fuori di questi pti definisco

$$\varphi(x) := \frac{|f'(x)|}{|f(x)|^{1/2}}$$

Per mostrare che $\varphi(x)$ è limitata sup, basta fare il $\lim(\sup)$ nei pti $x_1, \dots, x_n$ in cui si annulla il denom. Prendo x_i e sviluppo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-x_i)^n = C_{2k} (x-x_i)^{2k} + \dots$$

↑
ordine PARI e > 0 per studio locale (uso $f(x) \geq 0$)

$$= C_{2k} (x-x_i)^{2k} \{ 1 + \text{roba che si annulla in } x_i \}$$

$$= C_{2k} (x-x_i)^{2k} g(x)$$

↑ $\neq 0$ in un intorno di x_i

$$f'(x) = 2k C_{2k} (x-x_i)^{2k-1} \delta(x)$$

↑ continua

$$\frac{|f'(x)|}{|f(x)|^{1/2}} = \frac{2k C_{2k} |x-x_i|^{2k-1} |\delta(x)|}{\sqrt{C_{2k}} |x-x_i|^k [g(x)]^{1/2}}$$

Se semplifico, resta sopra $|x-x_i|^{k-1}$ e l'esponente è ≥ 0 e quindi il $\lim$ per $x \rightarrow x_i$ è finito (se $k=1$) oppure 0

Esercizio (non facile) Mostrare che Logasievic non vale per funzioni $C^\infty(\mathbb{R})$.

Esercizio Dimostrare che esiste un'unica funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ analitica (anzi INTERA) tale che

$$t u''(t) = u(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$u(0) = 0, \quad \dot{u}(0) = 2018$$

Def. Una funzione si dice INTERA se il raggio di convergenza della sua serie di Taylor in un pto (dunque in ogni pto) è $+\infty$ (ed è analitica)

Oss. L'equazione non è in forma normale e portarla crea problemi.

Risoluzione per serie Cerco una soluzione del tipo

$$u(t) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

Derivando per serie (posto che sia possibile) trovo

$$u''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) t^{n-2}$$

$$t u''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) t^{n-1}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) t^{n-1}$$

$$\stackrel{\text{shift indici}}{\uparrow} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n+1} (n+1)n t^n \stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \stackrel{\text{Equazione}}{\uparrow}$$

Uguagliando i coeff., segue che

- $G = 0$ (per "fortuna" abbiamo scelto $u(0)$, ma questa era cond. nec. per poter risolvere)

- $c_{n+1}(n+1)n = c_n$ per ogni $n \geq 1$
da cui

$$c_{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} c_n \quad \forall n \geq 1$$

Restano due cose

→ trovare c_1 (uso qui che $u(0) = 2018 \sim c_1 = 2018$)

→ stimare il raggio di conv. della serie di potenze

Con i soliti metodi (rapporto → radice) si verifica che

$$\sqrt[n]{c_n} \rightarrow 0 \quad \text{e quindi} \quad R = \frac{1}{L} = +\infty.$$

Da questo momento tu poi i calcoli fatti prima sono rigrosi.

— o — o —

Esercizio Dimostrare che, se la succ. a_n è t.c.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$$

allora la funzione

$$u(t, x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(nx) e^{-n^2 t}$$

è di classe C^∞ su tutto $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$

e risolve l'equazione alle derivate parziali $u_t = u_{xx}$.

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 101

Note Title

16/04/2018

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Setting semplificato : $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto
 $(t_0, u_0) \in \Omega$
 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua

Problema di Cauchy $\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$

Più in generale possiamo considerare dei sistemi

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$ aperto $\begin{cases} U' = f(t, U) \\ U(t_0) = U_0 \end{cases}$
 $(t_0, U_0) \in \Omega$
 $\uparrow k \text{ componenti}$
 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ cont. $U(t) = (u_1(t), \dots, u_k(t))$

Mega fatto : equazioni / sistemi di ordine qualunque
 si riducono sempre a SISTEMI di ordine 1.

Esempio $u'' + t u' + 7u^2 = \sin t$ $e^{\ddot{u}} + u^3 + \dot{u}^{27} = 0$

$$\begin{aligned} u' &= v \\ v' &= -tv - 7u^2 + \sin t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= v \\ e^{\dot{v}} &= -u^3 - v^{27} \end{aligned}$$

$$\vec{U} = f(t, U)$$

Basta fare una teoria per sistemi di ordine 1.

Se parto in forma normale mi ritrovo in forma normale.

Cosa vuol dire risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{u} = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Vuol dire trovare due cose:

- un intervallo (a, b) che contiene t_0
- una funzione $u: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che
 - u è di classe C^1
 - $(t, u(t)) \in \Omega$ per ogni $t \in (a, b)$
 - risolve l'eq. nel senso che

$$u'(t) = f(t, u(t)) \quad \forall t \in (a, b).$$

- verifica il dato iniziale
 $u(t_0) = u_0.$

Achtung! Anche l'intervallo (a, b) di definizione è tra le incognite.

— o — o —

FORMULAZIONE INTEGRALE - OPERATORE DI VOLTERRA

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

Formulazione
integrale

↑
integrale di funzione
vettoriale

Def. L'operatore di Volterra manda funzioni in funzioni ed è definito dal RHS della formulazione integrale.

Cosa vuol dire risolvere la formulazione integrale?

Vuol dire trovare due cose:

→ un intervallo (a,b) che contiene t_0

→ una funzione $u: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^k$ t.c.

- u è continua in (a,b)
- $(t, u(t)) \in \Omega$ per ogni $t \in (a,b)$
- u verifica la rel. prevista dalla form. integrale per ogni $t \in (a,b)$.

Prop. Una funzione $u: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^k$ verifica il pbm. di Cauchy nel senso diff. del termine se e solo se risolve la formulazione integrale.

Dim. Diff. $\Rightarrow$ Int. Prendo l'eq. diff. e integro in $[t_0, t]$.

Int $\Rightarrow$ Diff.

- Ponendo $t = t_0$ nella form. int. ottengo $u(t_0) = u_0$
- Il fatto che $u \in C^1$ segue dal fatto che $f(s, u(s))$ è C^0 (almeno se $f \in C^0$) e quindi posso usare il teo. fond. del calcolo integrale
- Il fatto che risolve l'eq. segue allo stesso modo
— o — o —

Teorema (Di esistenza e unicità)
(CAUCHY, LIPSCHITZ, PICARD, LINDELOF)

Supponiamo che f sia Lipschitziana in u unif. rispetto a t , cioè esiste $L \in \mathbb{R}$ tale che

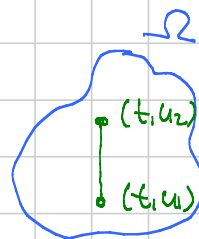
$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq L |u_1 - u_2| \quad (\text{uovne in } \mathbb{R}^k)$$

per ogni u_1 e u_2 con $(t, u_1) \in \Omega$ e $(t, u_2) \in \Omega$.

Allora

→ il problema ammette almeno una soluzione

→ due soluzioni sullo stesso intervallo (a, b) coincidono.



Teorema (di sola esistenza) (PEANO)

Supponiamo f solo continua.

Allora il problema ammette almeno una soluzione.

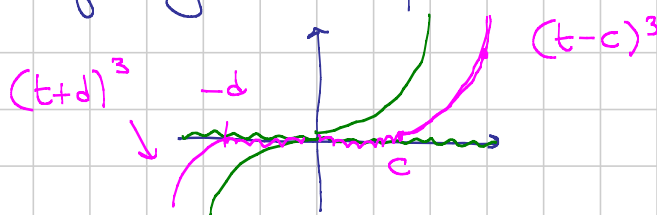
Esempio di non unicità $\begin{cases} u' = 3|u|^{2/3} \\ u(0) = 0 \end{cases}$

• Una sol. è $u(t) \equiv 0$ (definita su tutto $\mathbb{R}$)

• Un'altra sol. è

$$u(t) = t^3$$

• Pennello di PEANO: una famiglia a 2 parametri di soluzioni è



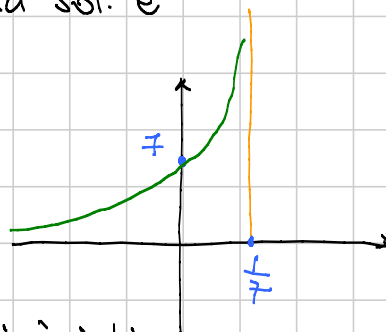
Esempio di NON ESISTENZA GLOBALE

$$\begin{cases} \dot{u} = u^2 \\ u(0) = 7 \end{cases}$$

L'insieme Ω è tutto $\mathbb{R}^2$. Tuttavia la sol. è

$$u(t) = \frac{7}{1-7t}$$

ed è definita sol per $t < \frac{1}{7}$



Il tempo di vita dipende dalle cond. iniziali.

Il break down è quando la coppia $(t, u(t))$ esce dalla zona di definizione di f , cioè l'aperto Ω .

Per dimostrare i teoremi si usa la formulazione INTEGRALE con l'operatore di Volterra.

A questo punto si può procedere in due modi

→ VIA COMPLETEZZA, cioè teorema delle contrazioni, cioè cerco un pto fisso dell'operatore di Volterra

→ VIA COMPATTEZZA, cioè mediante problemi approssimanti.

— o — o —

ANALISI 2

-

LEZIONE 102

Note Title

18/04/2018

Ponte di esistenza del teorema di esistenza e unicità $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$ aperto $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ continua $(t_0, u_0) \in \Omega$ $\uparrow$ k variabili

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

$$\exists L \in \mathbb{R} \quad \forall (t, u_1) \in \Omega \quad \forall (t, u_2) \in \Omega$$

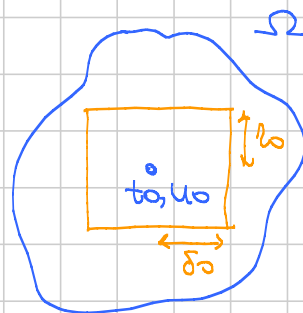
$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq L |u_1 - u_2|$$

Quattro dimostrazioni:

- Cauchy - lipschitz classica (via contrazioni)
- " " " " con norme pesate
- Iterazione di Picard
- Iterata n -esima dell'operatore di Volterra

Consideriamo un rettangolo

$$R = [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \times [u_0 - r_0, u_0 + r_0] \\ \subseteq \Omega$$

più in generale $R = [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \times \overline{B}_{r_0}(u_0)$

Consideriamo infine

$$M := \max \{ |f(t, u)| : (t, u) \in R \}$$

 $\downarrow$ compatto

Formulazione integrale

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

Cerco di risolvere questa per $t \in [t_0, t_0 + \delta]$

(allo stesso modo si risolve in $t \in [t_0 - \delta, t_0]$) ↑ da scegliere

Dimostrazione alla Cauchy - lipschitz

Supponiamo che $\delta > 0$ verifichi 3 disuguaglianze:

$$\delta \leq \delta_0 \quad \delta \leq \frac{r_0}{M} \quad \delta < \frac{1}{L}$$

↑ non scappo da $\mathbb{R}$

Allora esiste (almeno) una soluzione in $[t_0, t_0 + \delta]$.

Considero l'operatore di Volterra

$$[\Phi(u)](t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta]$$

e considero insieme

$$X_{\delta, r} := \{u: [t_0, t_0 + \delta] \rightarrow \overline{B}_{r_0}(u_0) \text{ continue}\}$$

Dico che

① $X_{\delta, r}$ è uno spazio metrico completo rispetto alla

$$d(u, v) := \sup \{|u(t) - v(t)| : t \in [t_0, t_0 + \delta]\}$$

② $\Phi : X_{\delta, r} \rightarrow X_{\delta, r}$

③ Φ è contrazione

A questo p.to Φ ha un p.to fisso (unico) u , e questa risolve la form. int. su $[t_0, t_0 + \delta]$.

① Fatta tante volte

② Mi serve che $\Phi(u) \in X_{\delta, r}$. La continuità è ovvia essendo un integrale. Serve solo dim. che

$$|[\Phi(u)](t) - u_0| \leq r_0 \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta]$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} |[\Phi(u)](t) - u_0| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t \underbrace{|f(s, u(s))|}_{\leq M \text{ perché siamo in } R} ds \\ &\leq \int_{t_0}^t M ds \\ &= M(t - t_0) \leq M\delta \leq r_0 \\ &\quad \uparrow \text{scelta di } \delta \end{aligned}$$

③ Dimostriamo che Φ è contrazione

$$\begin{aligned} |[\Phi(u)](t) - [\Phi(v)](t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| ds \\ &\leq L \int_{t_0}^t |u(s) - v(s)| ds \end{aligned}$$

$$\leq L \int_{t_0}^t \text{dist}(u, v) ds$$

$$\leq L \text{dist}(u, v) \delta \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta]$$

Facendo il sup del LHS per $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ ottengo

$$\text{dist}(\phi(u), \phi(v)) \leq \boxed{L\delta} d(u, v)$$

"
 $L'\delta < 1$ per ipotesi su δ

e quindi Φ è una contrazione in $X_{\delta, L}$.

— o — o —

Oss. (su cui torneremo) Non pensare nemmeno di aver dimostrato l'unicità. Potrebbero esserci soluzioni che non stanno in $X_{\delta, L}$.

— o — o —

Dimostrazione con norme pesate

Supponiamo che δ verifichi $\delta > 0$ e

$$\delta \leq \delta_0$$

$$\delta \leq \frac{r_0}{M}$$

e basta

Allora esiste una soluzione in $[t_0, t_0 + \delta]$. (meno ipotesi, stessa tesi)

Consideriamo lo spazio $X_{\delta, L, A}$ che è lo stesso insieme di prima, ma distanta

$$\text{dist}_A(u, v) := \sup \{ |u(t) - v(t)| e^{-\lambda t} : t \in [t_0, t_0 + \delta] \}$$

↑
peso nella norma

Claim

- ① $X_{\delta, \lambda, \lambda}$ è metrico completo per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$
- ② $\Phi : X_{\delta, \lambda, \lambda} \rightarrow X_{\delta, \lambda, \lambda}$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$
- ③ Se $\lambda > L$, allora Φ è una contrazione 😊

Dimostriamo i claim

- ① Facile esercizio (basta che il peso sia positivo)
- ② Non c'è nulla da dimostrare
- ③ Come prima

$$\begin{aligned}
 |[\Phi(u)](t) - [\Phi(v)](t)| &\leq L \int_{t_0}^t |u(s) - v(s)| ds \\
 &\quad \uparrow \text{come prima} \\
 &\leq L \int_{t_0}^t \text{dist}_{\lambda}(u, v) e^{\lambda s} ds \\
 &= L \text{dist}_{\lambda}(u, v) \frac{1}{\lambda} (e^{\lambda t} - e^{\lambda t_0}) \\
 &\leq \frac{L}{\lambda} \text{dist}_{\lambda}(u, v) e^{\lambda t}
 \end{aligned}$$

Ora porto $e^{\lambda t}$ al LHS e faccio il sup per $t \in [t_0, t_0 + \delta]$.
Ottengo

$$\text{dist}_{\lambda}(\Phi(u), \Phi(v)) \leq \frac{L}{\lambda} \text{dist}_{\lambda}(u, v)$$

Se $\lambda > L$ abbiamo una contrazione.

Esercizio sulle norme pesate

Sia S un insieme, sia (X, d) un metrico completo, sia

$\text{Bounded}(S, X)$

l'insieme delle funzioni $u: S \rightarrow X$ limitate.

Sia $\varphi: S \rightarrow (0, +\infty)$ (strett. pos.) e limitata, e sia

$$\text{dist}_\varphi(u, v) := \sup \{ d(u(s), v(s)) \underbrace{\varphi(s)}_{\text{peso}} : s \in S \}$$

Allora $\text{Bounded}(S, X)$ è un metrico completo rispetto a $\text{dist}_\varphi(u, v)$.

Dim. che si tratti di una distanza è quasi ovvio.
(c'è a voce nel video)

Si tratta ora di mostrare la completezza.

Sia $\{u_n\}$ una succ. di Cauchy in $\text{Bounded}(S, X)$.

Per ogni $s \in S$ vale che

$$d(u_n(s), u_m(s)) \varphi(s) \leq \text{dist}_\varphi(u_n, u_m)$$

e quindi

$$d(u_n(s), u_m(s)) \leq \frac{1}{\varphi(s)} \text{dist}_\varphi(u_n, u_m)$$

Essendo $\{u_n\}$ di Cauchy deduciamo che $\{u_n(s)\}$ è di Cauchy in X , quindi converge ad un certo $u_\infty(s)$.

Abbiamo così dim. che $u_n(s) \rightarrow u_\infty(s)$ puntualmente

Resta da dimostrare la convergenza rispetto a dist_φ .

- Mi viene dato $\varepsilon > 0$

- Prendo $m_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\text{dist}_\varphi(u_n, u_m) \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq m_0$

- Deduco come sopra che

$$d(u_n(s), u_m(s)) \cdot \varphi(s) \leq \varepsilon \quad \forall n \geq m_0 \quad \forall m \geq m_0 \\ \forall s \in S$$

- Passo al limite per $m \rightarrow +\infty$ e ottengo

$$d(u_n(s), u_\infty(s)) \cdot \varphi(s) \leq \varepsilon \quad \forall n \geq m_0 \quad \forall s \in S$$

- Faccio il sup al variare di s in S e ottengo

$$\text{dist}_\varphi(u_n, u_\infty) \leq \varepsilon \quad \forall n \geq m_0$$

che è quello che volevo.

— o — o —

Oss. All'interno della dim 2 la convergenza in $X_{S,1,1}$ è equivalente alla conv. unif. classica visto che il peso è limitato dal basso e dall'alto.

ANALISI 2

-

LEZIONE 103

Note Title

18/04/2018

Tenta dimostrazione: iterate di PICARD

Supponiamo che $\delta > 0$ soddisfi:

$$\delta \leq \delta_0$$

$$\delta \leq \frac{\eta_0}{M}$$

Allora esiste soluzione della form. int. su $[t_0, t_0 + \delta]$.Punto di partenza: sia Φ l'operatore di Volterra e sia $X_{\delta, r}$ l'insieme di prima, in modo tale che

$$\Phi: X_{\delta, r} \rightarrow X_{\delta, r}$$

Dico che vale questa stima

$$|[\Phi(u)](t) - [\Phi(v)](t)| \leq L \operatorname{dist}(u, v) (t - t_0)$$

$$\forall t \in [t_0, t_0 + \delta] \quad \forall (u, v) \in X_{\delta, r}^2$$

Solito conto:

$$\begin{aligned} \text{LHS} &\leq L \int_{t_0}^t |u(s) - v(s)| ds \leq L \int_{t_0}^t \operatorname{dist}(u, v) ds \\ &\leq L \cdot \operatorname{dist}(u, v) \cdot (t - t_0) \end{aligned}$$

Introduciamo le ITERATE DI PICARD: poniamo $u_0(t) \equiv u_0$ e poi per ricorrenza

$$u_{n+1}(t) := u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_n(s)) ds = [\Phi(u_n)](t)$$

Si verifica che tutte le $u_n \in X_{\delta, n}$.

Claim: vale la stima

$$|u_{n+1}(t) - u_n(t)| \leq \text{dist}(u_0, u_1) \frac{L^n (t-t_0)^n}{n!} \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta] \\ \forall n \in \mathbb{N}$$

La dimostriamo per induzione.

Per $n=0$ è ovvia.

Supponiamola vera per n . Allora

$$|u_{n+2}(t) - u_{n+1}(t)| = \left| \int_{t_0}^t (f(s, u_{n+1}(s)) - f(s, u_n(s))) ds \right|$$

$$\leq \int_{t_0}^t |f(s, u_{n+1}(s)) - f(s, u_n(s))| ds$$

$$\leq L \int_{t_0}^t |u_{n+1}(s) - u_n(s)| ds$$

$$\stackrel{\text{hp ind.}}{\leq} L \frac{L^n \text{dist}(u_1, u_0)}{n!} \underbrace{\int_{t_0}^t |s - t_0|^n ds}_{\frac{1}{n+1} (t - t_0)^{n+1}}$$

$$= L^{n+1} \text{dist}(u_1, u_0) \frac{1}{(n+1)!} (t - t_0)^{n+1} \quad \text{☺}$$

Dalla disuguaglianza deduco che

$$\text{dist}(u_{n+1}, u_n) \leq \text{dist}(u_1, u_0) \frac{L^n \delta^n}{n!}$$

Da questa deduco che $\{u_n\}$ è di Cauchy rispetto a dist.

Infatti per ogni $m > n$ vale

$$\text{dist}(u_m, u_n) \overset{\Delta}{\leq} \sum_{i=n}^{m-1} \text{dist}(u_{i+1}, u_i)$$

$$\leq \text{dist}(u_n, u_0) \sum_{i=n}^{m-1} \frac{L^i \delta^i}{i!}$$

$$\leq \text{dist}(u_1, u_0) \underbrace{\sum_{i=n}^{\infty} \frac{L^i \delta^i}{i!}}_{\text{coda di serie convergente, e quindi } \leq \varepsilon \text{ per } n \text{ abb. grande}}$$

Essendo $\{u_n\}$ di Cauchy, sappiamo che $u_n \rightarrow u_\infty$ unif. in $[t_0, t_0 + \delta]$.

Per concludere basta passare al limite

$$\begin{array}{ccc} u_{n+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_n(s)) ds & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ u_\infty(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_\infty(s)) ds & & \end{array}$$

Si conclude più di poter passare al limite. Al LHS è ovvio (basta la puntuale).

Al RHS servirebbe che $f(s, u_n(s)) \rightarrow f(s, u_\infty(s))$ unif. in $[t_0, t_0 + \delta]$, e di questo parleremo + avanti.

Oss. La dim. di PICARD è la stessa del tes. delle contrazioⁿⁱ, solo che è più efficiente nel dimostrare che la succ. $\{u_n\}$ è di Cauchy.

Quarta dimostrazione Stesse scelte minimaliste

$$\delta \leq \delta_0$$

$$\delta \leq \frac{\delta_0}{M}$$

Consideriamo le iterate n -esime dell'operatore di Volterra.

Allora vale la stima $(\phi^{(n)} = \phi \circ \dots \circ \phi)$

$$\text{dist}(\phi^{(n)}(u), \phi^{(n)}(v)) \leq \frac{L^n \delta^n}{n!} \text{dist}(u, v)$$

Se la dimostro, allora per n grande ho che $\phi^{(n)}$ è una contrazione, dunque ha un unico pto fisso. Da questo si deduce che ϕ ha un unico pto fisso

Lemma Sia X un insieme e sia $\phi: X \rightarrow X$ una funzione.

Supponiamo che esista $M \geq 1$ t.c. $\phi^{(M)}$ ha un unico pto fisso.

Allora ϕ ha un unico pto fisso.

Dim Unicità Ogni pto fisso di ϕ lo è pure per $\phi^{(n)}$

Esistenza Sia x_0 il pto fisso di $\phi^{(n)}$. Poniamo $\phi(x_0) = y_0$. Dico che $y_0 = x_0$. Osservo che

$$\phi^{(n)}(y_0) = \phi^{(n+1)}(x_0) = \phi(\phi^{(n)}(x_0)) = \phi(x_0) = y_0$$

$\uparrow$
 x_0 fix di $\phi^{(n)}$

Essendo il pto fisso di $\phi^{(n)}$ unico, allora per forza $x_0 = y_0$.

Per completare la quanta dimostrazione basta dimostrare che

$$\text{dist}(\phi^{(n)}(u), \phi^{(n)}(v)) \leq \frac{L^n \delta^n}{n!} \text{dist}(u, v)$$

Procediamo per induzione. Il caso $n=1$ segue dalle solite

$$|[\phi(u)](t) - [\phi(v)](t)| \leq L \text{dist}(u, v) \underbrace{(t-t_0)}_{\leq \delta}$$

da cui otteniamo

$$|[\phi^{(n)}(u)](t) - [\phi^{(n)}(v)](t)| \leq \text{dist}(u, v) \frac{L^n \overbrace{(t-t_0)^n}^{\leq \delta^n}}{n!}$$

da cui quella voluta

Passiamo da n ad $(n+1)$:

$$\begin{aligned} |[\phi^{(n+1)}(u)](t) - [\phi^{(n+1)}(v)](t)| &\leq \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, \phi^{(n)}(u)(s)) - f(s, \phi^{(n)}(v)(s))| ds \\ &\leq L \int_{t_0}^t |\phi^{(n)}(u)(s) - \phi^{(n)}(v)(s)| ds \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{hp ind.}}{\leq} L \text{dist}(u, v) \frac{L^n}{n!} \int_{t_0}^t (s-t_0)^n ds$$

$$= L^{n+1} \text{dist}(u, v) \frac{1}{(n+1)!} (t-t_0)^{n+1}.$$

— o — o —

Esercizio (Passaggio al limite di integrali)

$$R := [t_0, t_0 + \delta] \times \overline{B}_{r_0}(u_0)$$

$$f: R \rightarrow \mathbb{R}^k \text{ continua}$$

$$u_n(t) \rightarrow u_\infty(t) \text{ unif. in } [t_0, t_0 + \delta]$$

Tutte le $u_n(t)$ sono a valori in $\overline{B}_{r_0}(u_0)$

$$\text{Allora } f(t, u_n(t)) \rightarrow f(t, u_\infty(t)) \text{ unif. in } [t_0, t_0 + \delta]$$

Dim. Il p.to fondamentale è che f è unif. continua.

- Mi viene dato $\varepsilon > 0$
- Scelgo $\hat{\delta} > 0$ che mi fornisce ε nell'unif. cont. di f
- Scelgo $m_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\text{dist}(u_n, u_\infty) \leq \hat{\delta}$ per ogni $n \geq m_0$
- Dico che per ogni $n \geq m_0$ vale

$$|f(t, u_\infty(t)) - f(t, u_n(t))| \leq \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta]$$

Questo è vero perché la distanza in $\mathbb{R}^{k+1}$ tra $(t, u_\infty(t))$ e $(t, u_n(t))$ è $\leq \hat{\delta}$ e quindi le corrispondenti f sono a distanza $\leq \varepsilon$.

Oss. Ho usato solo che f è unif. cont. nella 2ª variabile
le unif. rispetto alla 1ª.

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 104

Note Title

19/04/2018

TEOREMA DI ASCOLI-ARZELÀ*↑ Qui solo in Italia*

Versione diseducativa Sia $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, e sia $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una succ. di funzioni.

Supponiamo che la succ. sia

(i) **EQUILIMITATA** cioè

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [a, b] \quad |f_n(x)| \leq M$$

(ii) **EQUICONTINUA** cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad \exists \delta > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall y \in [a, b]$$

↑ dipende da x e ε, ma non da n

$$|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon$$

Allora esiste una sottosuccessione che converge unif., cioè esiste succ. $\{n_k\}$ strett. cresc. di interi positivi ed esiste $f_\infty : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$f_{n_k} \rightarrow f_\infty \quad \text{unif. in } [a, b] \text{ per } k \rightarrow +\infty$$

Inoltre f_∞ è continua con la stessa relazione ε/δ delle altre.

Dim.

Passo 0 Identifico un sottoinsieme $D \subseteq [a, b]$ che sia denso e numerabile.

Denso: $\forall x \in [a, b] \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists d \in D \text{ t.c. } |d - x| \leq \varepsilon$

Numerabile: $D = \{d_1, d_2, d_3, \dots\}$

Basta prendere $D := [a, b] \cap \mathbb{Q}$.

Passo 1 Esiste $\{m_k\}$ succ. strett. cresc. di interi positivi tali che $\{f_{m_k}(d)\}$ è succ. conv. per ogni $d \in D$.

Qui si utilizza un procedimento diagonale

- Considero d_1 e prendo $\{f_m(d_1)\}$. Questa succ. è limitata per l'ipotesi (i), quindi ammette s. succ. convergente

$$f_{m_{1,k}}(d_1) \longrightarrow f_{\infty}(d_1) \quad N_1 = \text{indici di questa s. succ.}$$

- Prendo d_2 e considero $\{f_{m_{1,k}}(d_2)\}$. Anche questa ammette s. succ. conv., ^{indici di prima} quindi

$$f_{m_{2,k}}(d_2) \longrightarrow f_{\infty}(d_2) \quad N_1 \geq N_2 = \text{indici di questa s. succ.}$$

- Faccio la stessa cosa con $d_3, d_4, \dots$ e così via. In questo modo, per ogni i trovo

$$f_{m_{i,k}}(d_i) \longrightarrow f_{\infty}(d_i) \quad \text{per } k \rightarrow \infty$$

$$N = N_0 \geq N_1 \geq N_2 \geq N_3 \geq \dots$$

Dico che la sottosucc. $m_{k,k}$ soddisfa tutte le proprietà, essendo s. succ. di tutte le precedenti

1	2	3	4	5	6	7	8	8	10	11	12	13	14	
1		3	4		6	7	8			11		13	14	$\leadsto$ conv. in d_1
1			4			7	8					13	14	$\leadsto$ conv. in d_2
			4			7	8					13		$\leadsto$ conv. in d_3

Alla fine del passo 1 abbiamo una s. succ. $f_{m_k}(x)$ t. c.

$$f_{m_k}(d) \rightarrow f_\infty(d) \quad \forall d \in D$$

Passo 2 Facciamo vedere che $\{f_{m_k}(x)\}$ converge $\forall x \in [a,b]$
 $\uparrow$
 la stessa di prima

Basta dimostrare che è di Cauchy.

- Mi viene dato $\varepsilon > 0$
- Scelgo $\delta > 0$ che mi fa tornare $\frac{1}{4}\varepsilon$ nella equicontinuità in x
- Scelgo $d \in D$ tale che $|x - d| \leq \delta$
- Scelgo $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|f_{m_k}(d) - f_{m_R}(d)| \leq \frac{1}{4}\varepsilon \quad \forall k \geq k_0 \quad \forall R \geq k_0$$

(posso perché $f_{m_k}(d)$ è succ. di Cauchy essendo conv.)

Ora per la triangolare

$$\begin{aligned}
|f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x)| &\leq |f_{n_k}(x) - f_{n_k}(d)| \leq \frac{1}{4}\varepsilon \text{ per equicont.} \\
&+ |f_{n_k}(d) - f_{n_l}(d)| \leq \frac{1}{4}\varepsilon \text{ se } k \geq k_0 \text{ e } l \geq k_0 \\
&+ |f_{n_l}(d) - f_{n_l}(x)| \leq \frac{1}{4}\varepsilon \text{ per equicont.} \\
&\leq \varepsilon \quad \text{se } k \geq k_0 \text{ e } l \geq k_0
\end{aligned}$$

Alla fine dello step 2 abbiamo dimostrato che

$$f_{n_k}(x) \rightarrow f_\infty(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad \text{conv. puntuale}$$

Step 3 Mostriamo che $f_\infty(x)$ è continua con la stessa relazione ε/δ delle $f_n(x)$.

Fisso $\varepsilon > 0$ ed $x \in [a, b]$ e prendo il $\delta > 0$ dell'equicont. Allora in particolare

$$|f_{n_k}(x) - f_{n_k}(y)| \leq \varepsilon \quad \text{se } |x - y| \leq \delta$$

Passando al limite per $k \rightarrow +\infty$ trovo

$$|f_\infty(x) - f_\infty(y)| \leq \varepsilon \quad \text{se } |x - y| \leq \delta.$$

Step 4 Mostriamo che $f_{n_k}(x) \rightarrow f_\infty(x)$ unif. in $[a, b]$.

• Mi viene dato $\varepsilon > 0$

• Per ogni $x \in [a, b]$, prendo il $\delta > 0$ che mi produce $\frac{1}{4}\varepsilon$ nell'equicontinuità delle f_n , e anche nella continuità di $f_\infty(x)$.

Ora δ dipende da x e quindi lo chiamo $\delta(x)$.
 Osservo che

$$\{B_{\delta(x)}(x) : x \in [a, b]\}$$

è un ricoprimento aperto di $[a, b]$, da cui posso estrarne un s. ricopr. finito

$$[a, b] = B_{\delta_1}(x_1) \cup \dots \cup B_{\delta_m}(x_m)$$

- Scelgo $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|f_\infty(x_i) - f_{n_k}(x_i)| \leq \frac{1}{4} \varepsilon \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

(qui è fondamentale essersi ridotti ad un numero finito di punti)

Dico che con questo k_0 ho concluso.

Dato un qualunque $x \in [a, b]$, scelgo i tale che $x \in B_{\delta_i}(x_i)$ (sono un ricoprimento) e per la triangolare

$$\begin{aligned} |f_{n_k}(x) - f_\infty(x)| &\leq |f_{n_k}(x) - f_{n_k}(x_i)| \leq \frac{1}{4} \varepsilon \quad \text{perché } |x - x_i| \leq \delta_i \\ &\quad + |f_{n_k}(x_i) - f_\infty(x_i)| \leq \frac{1}{4} \varepsilon \quad \text{per } k \geq k_0 \\ &\quad + |f_\infty(x_i) - f_\infty(x)| \leq \frac{1}{4} \varepsilon \quad \text{perché } |x - x_i| \leq \delta_i \end{aligned}$$

Ho quindi dimostrato che

$$|f_{n_k}(x) - f_\infty(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall k \geq k_0.$$

— o — o —

Oss. Se $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sono equicontinue ed equilim.,
NON è detto che esista s.succ. conv. unif. su $\mathbb{R}$

[Ad esempio : $f_n(x) = \arctan(\frac{x}{n})$. Stanno tutte tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ e sono tutte lip. con costante ≤ 1 .

Tuttavia convergono puntualmente ma non unif. a 0]

Teorema Se $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sono equicontinue ed equilimitate, allora esiste s.succ. $f_{n_k}(x)$ che converge unif. sui compatti.

[Dim.] Occorre fare un procedimento diagonale

- Fisso $[-1,1]$ e qui trovo s.succ. $f_{n_{1,k}}$ che conv. unif. in $[-1,1]$
- Fisso $[-2,2]$ e trovo s.succ. della prec. che conv. unif. in $[-2,2]$
- ... stessa cosa in $[-k,k]$

Con il procedimento diagonale ne trovo una che conv. unif. in $[-k,k]$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Esercizio Sia $f_n : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una succ. equicont.

Dimostrare che è equi-unif.-cont., cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in [a,b] \forall y \in [a,b] \forall n \in \mathbb{N}$$

$\uparrow$ dipende solo da ε

$$|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon$$

[specie di Heine-Cantor]

ANALISI 2 — LEZIONE 105

Note Title

19/04/2018

Teorema di Ascoli - Arzelà (versione metrica)

Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici, e sia $f_n : X \rightarrow Y$ una succ. di funzioni.

Supponiamo che

(i) (X, d_X) compatto (ciò che Y è completo)

(ii) (Compattezza ad x fissato)

per ogni $x \in X$ esiste $K_x \subseteq Y$ compatto tale che

$$f_n(x) \in K_x \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(occhio: K_x può dipendere da x)

(iii) (equicontinuità)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in X \quad \exists \delta > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall y \in X$$

$$d_X(x, y) \leq \delta \Rightarrow d_Y(f_n(x), f_n(y)) \leq \varepsilon.$$

Allora esiste s.succ. conv. unif.

Dim.

Passo 0 Sesse $D \subseteq X$ denso e numerabile. Come faccio?

Prendo, per ogni $k \in \mathbb{N}$, una $\frac{1}{k}$ -rete (o una $\frac{1}{k!}$ rete) e prendo i centri delle palle. La loro unione è un denso numerabile.

Fatto generale: ogni metrico tot. limitato soddisfa il 1° assioma di numerabilità.

Passo 1 Esiste sottosucc. $f_{m_k}(x)$ t.c.

$$f_{m_k}(d) \rightarrow f_\infty(d) \quad \forall d \in D$$

Dim. come prima usando compattezza a d fisso + proced. diagonale

Passo 2 La stessa f_{m_k} di prima soddisfa

$$f_{m_k}(x) \rightarrow f_\infty(x) \quad \forall x \in X$$

Come prima dimostro che $\{f_{m_k}(x)\}$ è di Cauchy in Y . Grazie alla compattezza ad x fisso so che ha una s. succ. convergente, quindi converge tutta (senza bisogno di completezza)

Passo 3 e 4 Stessa dimostrazione del caso classico.

— o — o —

Esercizio 1 Se (X, d) non è compatto, possiamo ottenere la conv. unif. sui cpt. di una sottosucc. a patto di sapere che X ammette un'esaustione di compatti, cioè che posso scrivere X come unione numerabile di compatti

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_n$$

↑ compatti

(wlog possiamo assumere $K_{n+1} \supseteq K_n$)

[Ad un certo punto serve che ogni K compatto è contenuto in qualche K_n]

[Controllare se serve che $K_n \subseteq \text{Int}(K_{n+1})$]

Esercizio 2 Sotto le ipotesi di A.A. metrico esiste $K \subseteq Y$ compatto tale che

$$f_n(x) \in K \quad \forall x \in X \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

— o — o —

Dimostrazioni del teorema di PEANO (sola esistenza per problema di Cauchy)

① Punto fisso di SCHAUDER (senza BROUWER, per i quali serve omologia o coomologia)

② Per approssimazione via A.A.

2.1 $\leadsto$ approx. Dip.

2.2 $\leadsto$ approx. con ritardo (alla TONELLI)

2.3 $\leadsto$ approx. discreta (alla EULERO esplicito)

Lemma misterioso Mettiamoci nel solito setting del problema di Cauchy

($t_0 \in \mathbb{R}$, $u_0 \in \mathbb{R}^k$, $R = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B}_\delta(u_0)$,

$f: R \rightarrow \mathbb{R}^k$ continua e

$$|f(t, u)| \leq M \quad \forall (t, u) \in R$$

Allora esiste una successione di funzioni $f_n: R \rightarrow \mathbb{R}^k$ t.c.

(1) $f_n \rightarrow f$ unif. su R

(2) $|f_n(t, u)| \leq M \quad \forall (t, u) \in R \quad \forall n \in \mathbb{N}$

dipende da u

(3) le f_n sono lip. in u , cioè per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste L_n t.c.

$$|f_n(t, u_1) - f_n(t, u_2)| \leq L_n |u_1 - u_2| \quad \forall t, u_1, u_2$$

dove serve $\uparrow$

Dim. di Peano dato il Lemma

Prenolo $\delta > 0$ tale che

$$\delta \leq \delta_0$$

$$\delta \leq \frac{r_0}{M}$$

Passo 1 Considero il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'_m = f_m(t, u_m) \\ u_m(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Le f_m sono Dip. nella variabile u , quindi per il teo CLPL (parte di sola esistenza) sappiamo che esiste almeno una soluzione definita in $[t_0, t_0 + \delta]$.

[Qui è essenziale che il δ non dipenda dalla costante di Lip. di f_m , cosa che abbiamo realizzato con le due 2, 3, 4].

Passo 2 Le $u_m(t)$ verificano le ipotesi di Ascoli-Arzelà

- Compattezza a t fisso. Ovvio perché $u_m(t) \in \overline{B}_{r_0}(u_0)$.
- Equicontinuità. Segue dal fatto che le $u_m(t)$ sono tutte Lipschitziane con costante M . Infatti

$$|u'_m(t)| = |f_m(t, u_m(t))| \leq M$$

[Occhio che sto usando il Lagrange in versione disuguaglianza per funzioni vettoriali]

Passo 3 Per A.A. esiste s.succ. $u_{n_k}(t) \rightarrow u_\infty(t)$ unif. in $[t_0, t_0+\delta]$.

Ora non ci resta che passare al limite nella formulazione integrale

$$\begin{array}{ccc} u_{n_k}(t) & = & u_0 + \int_{t_0}^t f_{n_k}(s, u_{n_k}(s)) ds \\ \downarrow & & \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ u_\infty(t) & = & u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_\infty(s)) ds \end{array}$$

Per fare questo serve un lemma e poi abbiamo finito

Lemma Se $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. in R e
 $u_n \rightarrow u_\infty$ unif. in $[t_0, t_0+\delta]$

Allora $f_n(t, u_n(t)) \rightarrow f_\infty(t, u_\infty(t))$ unif. in $[t_0, t_0+\delta]$

Dim $|f_\infty(t, u_\infty(t)) - f_n(t, u_n(t))| \leq$

$$\leq |f_\infty(t, u_\infty(t)) - f_\infty(t, u_n(t))| +$$

$$+ |f_\infty(t, u_n(t)) - f_n(t, u_n(t))| \leq \frac{1}{2}\varepsilon \text{ per } n \text{ grande poich\'e } f_n \rightarrow f_\infty \text{ unif.}$$

La prima riga è $\leq \frac{1}{2}\varepsilon$ per n grande per il risultato di qualche let. prec. (serve f unif. cont.)

Oss. Dove perdo l'unicità nella d.m.? S.succ. diverse possono avere limiti u_∞ diversi.

ANALISI 2

LEZIONE 106

Note Title

29/04/2018

[File originale audio prodotto: questa è una copia riscritta dal video]

Dimostrazione di Peano via approssimazione

$$\ddot{u} = f(t, u) \quad \rightsquigarrow \quad \ddot{u}_n = f_n(t, u_n)$$

$\uparrow$ solo continua $\uparrow$ Lip.

Dimostrazione di Peano alla Tonelli (problemi con ritardo)

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} \ddot{u}_n(t) = f(t, u_n(t - \frac{1}{n})) \\ u(t) = u_0 \end{cases}$$

$\forall t \leq t_0$ $\uparrow$ ritardo
 basterebbe
 $\forall t \in [t_0 - \frac{1}{n}, t_0]$

Dim Setting come sempre $f: \underbrace{[t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \times \bar{B}_{R_0}(u_0)}_R \rightarrow \mathbb{R}^k$

$$M := \max \{ |f(t, u)| : (t, u) \in R \}$$

Scegliamo $\delta > 0$ tale che

$$\delta \leq \delta_0$$

$$\delta \leq \frac{2}{M}$$

Passo 1 Per ogni $n \in \mathbb{N}$ il problema con ritardo ammette una soluzione (unica) definita per ogni $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ e la sol. è una

$$u_n: [t_0, t_0 + \delta] \rightarrow \bar{B}_{R_0}(u_0)$$

La cosa si dimostra per inclusione finita.

- Per $t \in [t_0, t_0 + \frac{1}{n}]$ devo risolvere

$$u_n(t) = f\left(t, u_n\left(\underbrace{t - \frac{1}{n}}_{\leq t_0}\right)\right) = f(t, u_0) \text{ costante!}$$

$\leadsto$ trovo $u_n(t)$ per $t \in$ questo interv.

- Per $t \in [t_0 + \frac{1}{n}, t_0 + \frac{2}{n}]$ devo risolvere

$$u_n(t) = f\left(t, u_n\left(\underbrace{t - \frac{1}{n}}_{\in [t_0, t_0 + \frac{1}{n}]}\right)\right) \quad \leadsto \quad u_n(t) \text{ è nota e}$$

conoscendo $u_n(t_0 + \frac{1}{n})$
posso proseguire fino a
 $t_0 + \frac{2}{n}$

- e così via ...

L'unica verifica è che $u_n(t) \in \overline{B}_{r_0}(u_0)$, ma questo segue dalla form. integrale

$$|u_n(t) - u_0| \leq \int_{t_0}^t \underbrace{|f(s, u_n(s - \frac{1}{n}))|}_{\leq M} ds \leq M(t - t_0) \leq r_0 \leq \delta$$

Passo 2 Le $\{u_n(t)\}$ verificano le ipotesi di A.A.

- La cpt. a t fisso segue da $u_n(t) \in \overline{B}_{r_0}(u_0)$
- L'equicontinuità segue dalla equilip., in quanto

$$|u_n(t)| = |f(t, u_n(t - \frac{1}{n}))| \leq M$$

$\leadsto$ un sono lip. con costante M .

Passo 3 A meno di s.succ. (che non risolviamo) $u_n \rightarrow u_\infty$ unif. in $[t_0, t_0 + \delta]$.

Dico che u_0 risolve l'eq. vera senza ritardo.

Passo al limite nella formulazione integrale

$$\begin{array}{ccc}
 u_n(t) & = & u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_n(s - \frac{1}{n})) ds \\
 \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \text{?} \\
 u_\infty(t) & = & u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_\infty(s)) ds
 \end{array}$$

↑ tipo nel video

Per il passaggio (?) serve un lemma del tipo:

se $u_n(t) \rightarrow u_\infty(t)$ unif., allora $u_n(t - \frac{1}{n}) \rightarrow u_\infty(t)$ unif.

(supponendo di aver esteso le funzioni ponendole u_0 per $t \leq t_0$)

$$\begin{aligned}
 |u_\infty(t) - u_n(t - \frac{1}{n})| &\leq |u_\infty(t) - u_\infty(t - \frac{1}{n})| \\
 &\quad + |u_\infty(t - \frac{1}{n}) - u_n(t - \frac{1}{n})|
 \end{aligned}$$

La 1^a è piccola per n grande per unif. cont. di u_∞

La 2^a " " " " " per conv. unif.

— o — o —

Fineestra sul futuro

Il problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{u} = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$

ha perfettamente senso in spazi di Hilbert.

→ Il caso di f lip. si dimostra allo stesso modo.

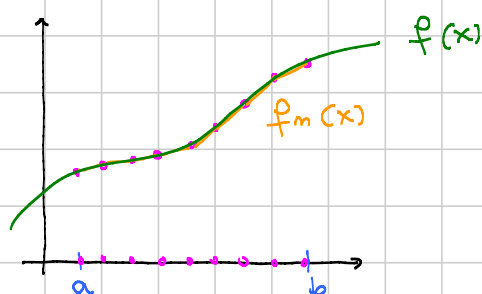
L'unico piccolo pbm. è definire l'integrale, e si fa alla Riemann.

→ Il caso f continua è FALSO in dim. infinita.

Come approx. funzioni continue con funzioni lip.

1ª strategia (funzione in $\mathbb{R}$) : unisco i punti

Sia $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Dato $n \geq 1$, divido $[a,b]$ in n parti uguali, e considero la funzione f_n affine a tratti che interpola i valori nei p.ti della suddivisione



↑ tipo nel video

Allora le f_n sono lip. e $f_n \rightarrow f$ unif. in $[a,b]$

Dim: esercizio. Prendo $\varepsilon > 0$, scelgo $\delta > 0$ che corrisponde a $\frac{1}{2}\varepsilon$ nell'unif. cont. di $f(x)$. Scelgo n_0 in modo tale che $\frac{b-a}{n_0} \leq \delta$ e dovrebbe funzionare per ogni $n \geq n_0$.

2ª strategia (funzione in $\mathbb{R}^k$, ma per ora la descrivo in $\mathbb{R}$)

Sia $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. La estendo a tutto $\mathbb{R}$ ponendo $f(x) = f(a)$ per $x \leq a$ e $f(x) = f(b)$ per $x \geq b$.

Per ogni $n \geq 1$ pongo

$$f_n(x) := n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t) dt$$

↑
è come dividere per $\frac{1}{n}$

= media integrale di f tra x e $x + \frac{1}{n}$.

Dico che $f_n \rightarrow f$ unif. in $[a,b]$ e inoltre
 $\max f_n \leq \max f$ e $\min f_n \geq \min f$

Dim. L'osservazione fondamentale è che

$$f(x) = n \int_x^{x+\frac{1}{n}} \underbrace{f(t)}_{\text{costante}} dt$$

da cui

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= \left| n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(x) dt - n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t) dt \right| \\ &\leq n \int_x^{x+\frac{1}{n}} |f(x) - f(t)| dt \end{aligned}$$

Dato $\varepsilon > 0$, scelgo il $\delta > 0$ corrispondente nell'unif. cont., prendo n tale che $\frac{1}{n\delta} \leq \delta$ e mi ritrovo che nel RHS

$$|f(x) - f(t)| \leq \varepsilon \quad \text{perché } x \text{ e } t \text{ distano meno di } \frac{1}{n}, \text{ cioè meno di } \delta$$

$$\text{da cui } |f(x) - f_n(x)| \leq n \int_x^{x+\frac{1}{n}} \varepsilon dt = n \cdot \frac{1}{n} \varepsilon = \varepsilon.$$

Questo dimostra che $f_n \rightarrow f$ unif. su $[a, b]$.

Resta da dim. che le f_n sono lip.

Per analisi 1 le $f_n(x)$ sono derivabili e la loro derivata è

$$f_n'(x) = n f\left(x + \frac{1}{n}\right) - n f(x)$$

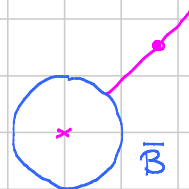
e questa è limitata essendo f limitata.

Occhio! La limitazione sulla costante di lip. dipende (per forza!) da n .

Lo stesso discorso si può generalizzare ad $\mathbb{R}^k$.

Data una f continua (ad esempio su una palla $\bar{B}$) la estendo in qualche modo a tutto $\mathbb{R}^k$ (ad esempio ponendola costante su opportune semirette)

Poi definisco



$$f_m(x) := \frac{1}{\text{meas}(B_{\frac{1}{m}}(x))} \int_{B_{\frac{1}{m}}(x)} f(t) dt$$

= media di f sulla palla con centro x e raggio $\frac{1}{m}$.

Lo stesso argomento di sopra mostra che $f_m \rightarrow f$ unif. in $\bar{B}$.

L'idea chiave è che

$$f(x) = \frac{1}{\text{meas}(B_{\frac{1}{m}}(x))} \int_{B_{\frac{1}{m}}(x)} \underset{\uparrow}{f(x)} \underset{\uparrow}{dt}$$

Oss. Lo stesso vale per le funzioni $f(t, u)$ (se voglio dip. nell'ultima variabile, integro solo rispetto a quella).

ANALISI 2

—

LEZIONE 107

Titolo nota

23/04/2018

Unicità della soluzioneSetting: $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ aperto

$$(t_0, u_0) \in \Omega$$

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$$\dot{u} = f(t, u) \quad u(t_0) = u_0$$

Supponiamo che esista $L \in \mathbb{R}$ tale che

$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq L |u_1 - u_2| \quad \forall (t, u_1) \in \Omega$$

$$\forall (t, u_2) \in \Omega$$

(lip. nella 2^a variabile)

Allora la soluzione è unica. Detto meglio: se

 $u: [t_0, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^k$ e $v: [t_0, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^k$ sono due soluzioni definite sullo stesso intervallo, allora $u(t) \equiv v(t)$.Per questo basta pure la lip. locale (cioè per ogni punto di Ω esiste un intorno in cui vale con un certo L che può dipendere dall'intorno).

Ci sono almeno 3 dimostrazioni

→ classica via Lemma di GRONWALL

→ riciclando l'unicità nelle contrazioni

→ via sopra e sottosoluzioni

Oss. Il δ nel teo. di unicità può essere più grande di quello fornito dal teo. di esistenza.

LEMMA DI GRONWALL

Siano $t_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, e sia $\varphi: [t_0, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua.

Supponiamo che esista $L \geq 0$ tale che

$$\varphi(t) \leq L \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta]$$

Allora $\varphi(t) \leq 0$ per ogni $t \in [t_0, t_0 + \delta]$.

Dim. (minore il fattore integrante per le eq. di ordine 1)

Moltiplico a dx e sx per e^{-Lt} :

$$\varphi(t) e^{-Lt} \leq L e^{-Lt} \int_{t_0}^t \varphi(s) ds$$

Porto tutto a sx:

$$\varphi(t) e^{-Lt} - L e^{-Lt} \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \leq 0$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \left(e^{-Lt} \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \right)}_{F(t)} \leq 0$$

Abbiamo dim. che $F'(t) \leq 0$ per ogni $t \in [t_0, t_0 + \delta]$, quindi $F(t)$ è debolm. decr., quindi

$$F(t) \leq F(t_0) = 0 \quad \leadsto \quad F(t) \leq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta]$$

Ma allora $\int_{t_0}^t \varphi(s) ds \leq 0$, da cui ragionando

l'ipotesi iniziale deduciamo che $\varphi(t) \leq 0$ per ogni $t \in \dots$

— 0 — 0 —

Dimostrazione dell'unicità dato Gronwall

Considero due soluz. $u(t)$ e $v(t)$ definite sullo stesso intervallo $[t_0, t_0 + \delta]$. Scrivo la form. int.

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

$$v(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds$$

Faccio la diff e metto i valori assoluti (o le norme)

$$|u(t) - v(t)| \leq \int_{t_0}^t |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| ds$$

$$\leq L \int_{t_0}^t |u(s) - v(s)| ds$$

Questa è proprio l'ipotesi di Gronwall con $\varphi(t) := |u(t) - v(t)|$

Ottengo che $\varphi(t) \leq 0$ sempre, il che vuol dire che $\varphi(t) \equiv 0$, cioè che $u(t) \equiv v(t)$.

↑ essendo ≥ 0 per forza essendo un valore assoluto.

— 0 — 0 —

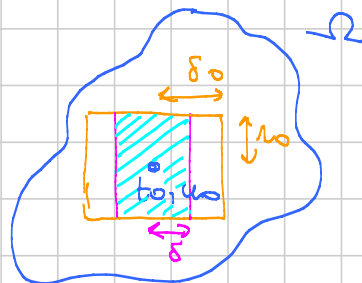
Dimostrazione via contrazioni

Le dimostrazioni del teorema CLPL che usano le contrazioni dimostrano una specie di "unicità locale" della soluzione.

$$\Omega \rightsquigarrow [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \times \bar{B}_{r_0}(u_0)$$

$$\rightsquigarrow [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \bar{B}_{r_0}(u_0)$$

↑
 δ ristretto con 2 o 3 condizioni



Prendiamo 2 soluzioni definite su un intervallo comune $[t_0, t_0 + \delta]$.

Per $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ queste soluzioni vivono in

$$[t_0, t_0 + \delta] \times \bar{B}_{r_0}(u_0)$$

e in questa zona sono pti fissi dell'oper. di Volterra (form. integrale), quindi in questo intervallo sono uniche

Che impedisce ad una sol. di uscire?

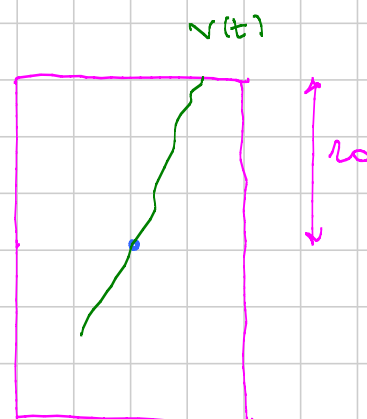
Mettiamo che sia $|v(t_1) - u_0| = r_0$

È impossibile perché

$$|v(t_1) - u_0| \leq \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{|\varphi(s, v(s))|}_{\leq M} ds$$

$$\leq \underbrace{(t_1 - t_0)}_{< \delta} M < \delta M \leq r_0$$

Quindi se $t_1 - t_0 < \delta$, allora $|v(t_1) - u_0| < r_0$



t_1 è definito come il + piccolo $t \geq t_0$ per cui si ha uscita.

Come globalizzare una dimostrazione locale?

Considero $u(t)$ e $v(t)$ definite in $[t_0, t_0 + \delta_1]$.

Suppongo per assurdo che non coincidano ovunque.

Pongo

$$t_2 := \inf \{ t \in [t_0, t_0 + \delta_1] : u(t) \neq v(t) \}$$

Oss. Questo vuol dire che prima di t_2 coincidono, ma non vuol dire che dopo t_2 sono sempre diverse.

In t_2 coincidono per forza per continuità da sx



Dopo aver osservato che $u(t_2) = v(t_2)$, piazzo una finestrella intorno al p.to $(t_2, u(t_2))$.

La scelgo in modo di poter applicare il ragionamento locale vicino a quel p.to.

Ne segue che $u(t) \equiv v(t)$ anche un po' a dx di t_2 .

Questo va contro la definizione di t_2 (per def. di inf esiste una succ. $t_n \rightarrow t_2^+$ t.c. $u(t_n) \neq v(t_n)$).

— o — o —

Esercizio (variante di Gronwall). Cosa succede se assumo

$$p(t) \leq \underbrace{L(t)}_{\substack{\uparrow \\ \text{funzione continua e } \geq 0}} \int_{t_0}^t p(s) ds \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta]$$

Non cambia nulla. Non posso sostituire L con il suo max perché non so il segno dell'integrale. Tuttavia si può riciclare la dimostrazione moltiplicando per $e^{-\Lambda(t)}$ dove $\Lambda(t)$ è una primitiva qualunque di $L(t)$.

Verificare i dettagli.

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 108

Note Title

26/04/2018

Soluzione massimale, alternativa, esistenza globaleSetting: $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ aperto

$$(t_0, u_0) \in \Omega$$

 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ continua (talvolta loc. lip. in u)

Problema di Cauchy

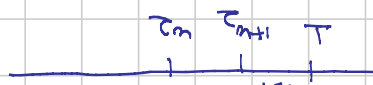
$$\begin{cases} \ddot{u} = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Teorema (Esistenza di una soluzione massimale)Nel setting descritto sopra, esiste $T > t_0$ ed esiste una soluzione
 $\uparrow$ può essere anche $+\infty$

$$u: [t_0, T) \rightarrow \mathbb{R}^k$$

che non si può prolungare oltre T (cioè non esiste $v: [t_0, T'] \rightarrow \mathbb{R}^k$ soluzione con $T' > T$ che coincide con u in $[t_0, T)$).Oss. Discorso analogo vale nel passato.Dim. Poniamo

$$T := \sup \{ \tau > t_0 : \text{esiste una soluzione in } [t_0, \tau) \}$$

Per caratterizzazione di $\sup$, sappiamo che esiste $\tau_n \rightarrow T^-$
per cui esiste sol. $u_n: [t_0, \tau_n) \rightarrow \mathbb{R}^k$ Posso anche supporre $\tau_n \uparrow T$.Vorrei tanto incollare le u_n .Posso farlo solo se sono nelle ipotesi
del te. di unicità.

Caso 1 Se f è loc. lip. in u , per riincollamento trovo una sol. definita in $[t_0, T)$.

Caso 2 Se non posso contare sull'unicità, le cose si complicano e occorre usare ZORN.

Considero l'insieme delle coppie (intervallo, sol. def. sull'int.) e considero su questo insieme l'ordinamento "ovvio": una sol. è + lunga di un'altra se ha int. + grande e in quello comune coincidono.

Ogni catena tot. ordinata ammette elemento maggiorante. perché lì davvero posso riincollare.

A questo punto Zorn fa il lavoro sporco.

— o — o —

Oss. Non è detto che la sol. prodotta da Zorn sia la più lunga possibile. Sappiamo solo che non è prolungabile.

— o — o —

Teorema (ALTERNATIVA)

Solito setting. Sia $u : [t_0, T) \rightarrow \mathbb{R}^k$ una sol. massimale (sarebbe LA sol. sol. mass. nel caso loc. lip. in u).

Allora accade almeno una di queste 3 possibilità:

(i) $T = +\infty$ (esistenza globale)

(ii) $\limsup_{t \rightarrow T^-} |u(t)| = +\infty$ (blow up se $T < +\infty$)
 $\uparrow$ norma o val. assd. a seconda di k

(iii) $\liminf_{t \rightarrow T^-} \text{dist}((t, u(t)), \Omega^c) = 0$ (break down se $T = +\infty$ e non c'è blow up)
 $\uparrow$
 complementare di Ω

Dim. Supponiamo per assurdo che non accada (i), (ii), (iii). Allora $T < +\infty$ ed esistono $A > 0$ e $B > 0$ tali che

$$|u(t)| \leq A \quad \forall t \in [t_0, T)$$

$$\text{dist}((t, u(t)), \Omega^c) \geq B > 0 \quad \forall t \in [t_0, T).$$

In particolare questo ci dice che

$$(t, u(t)) \in \Omega_{A,B} := \{(t, u) \in \Omega : |u| \leq A, \text{dist}((t, u), \Omega^c) \geq B\}$$

Ora si può concludere in 2 modi

1° modo (Passo al limite e continuo)

Visto che $(t, u(t)) \in \Omega_{A,B}$ cpt., esiste una costante M tale che

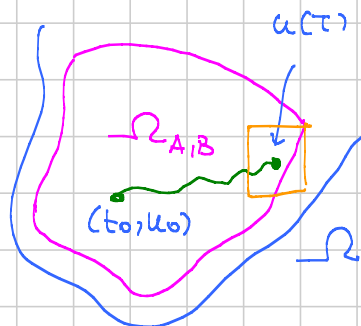
$$|\dot{u}(t)| = |f(t, u(t))| \leq M \quad \forall t \in [t_0, T)$$

Ma allora u è lip., quindi unif. cont., quindi estendibile cioè esiste

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u(t) = u(T)$$

Ora in $(T, u(T))$ posso riapplicare il teo. di esistenza perché ho una finestrella tutta contenuta in Ω .

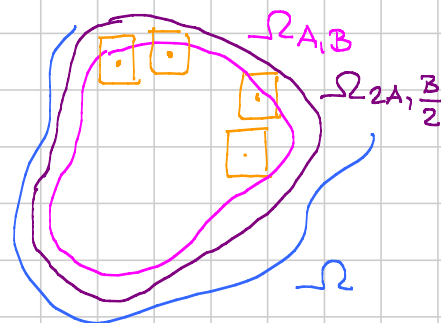
In questo modo definisco la soluzione in $[T, T+\delta]$ e quindi ho prolungato. 😊



2° modo (Osservo che i tempi di vita sono maggiori di una costante strettamente positiva)

Osservo che $\Omega_{2A, \frac{B}{2}}$ è cpt.

Per ogni $(t_0, u_0) \in \Omega_{A,B}$ ho una finestrella di dimensioni fisse contenuta in $\Omega_{2A, \frac{B}{2}}$



Per ogni punto $(t_0, u_0) \in \Omega_{A,B}$ se applico il teo. di esistenza trovo una soluzione che esiste in un intervallo lungo $\delta > 0$ uniforme (che dipende dalle dim. della finestra e dal max di $|f(t, u)|$ nella finestra, il quale è controllato dal max di $|f(t, u)|$ in $\Omega_{2A, \frac{B}{2}}$).

Allora basta mettersi vicino a T e trovo un assurdo



la sol. sta in $\Omega_{A,B}$,
quindi vive ancora per
un certo $\delta > 0$ fisso
che ci porta oltre T

— o — o —

Esistenza globale Come dimostro che $T = +\infty$?

Per il teo. di alternativa, basta escludere le altre due opzioni.

Teorema (esistenza globale) Supponiamo che $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$, cioè $f(t, u)$ è definita ovunque.

Supponiamo che $f(t, u)$ sia globalmente limitata, cioè

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |f(t, u)| \leq M \quad \forall (t, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k.$$

Allora la soluzione esiste globalmente.

Dim 1 (Usando l'alternativa)

Il break down di sicuro non c'è (i)

Devo escludere il blow up.

Sia $u: [t_0, T) \rightarrow \mathbb{R}^k$ una sol. massimale. Allora dalla formulazione integrale

$$\begin{aligned} |u(t) - u_0| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, u(s))| ds \leq M(t - t_0) \\ &\leq M(T - t_0) \end{aligned}$$

il che conclude.

Dim 2 Tornando al teorema di esistenza, avevamo una sol. su $[t_0, t_0 + \delta]$ con

$$\delta \leq \delta_0 \quad \delta \leq \frac{r_0}{M}$$

con δ_0 e r_0 dim. della finestra e $M = \max$ di $|f(t, u)|$ nella finestra.

Ora posso prendere δ_0 ed r_0 grandi quanto mi pare e M resta sempre lo stesso.

In questo modo ho dimostrato che posso avere una sol. def. su un intervallo grande a piacere. Se ho unicita' lo riunisco e ne ottengo una globale.

Altrimenti posso uscire ugualmente ripercorrendo le
dim. del teo. di sola esistenza lavorando in spazi di
funzioni continue su $[t_0, +\infty)$

(funzionano tutte: norme pesate, o Picard, o approx. con
cose Lip....).

Provare per credere.

— o — o —

ANALISI 2

—

LEZIONE 109

Note Title

26/04/2018

Teorema dell'asintoto

Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $u: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 .

Supponiamo che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = l \in \mathbb{R} \quad (\text{asintoto orizz.})$$

Allora

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} u'(t) \leq 0 \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} u'(t)$$

Oss. Possiamo riformulare la tesi dicendo che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u'(t) = \begin{cases} \nearrow \text{N.E.} \\ \searrow 0 \end{cases}$$

Oss. Può succedere che N.E. [esempio $u(t) = \frac{\sin(t^2)}{t}$]

Dim. Applico Lagrange in $[n, n+1]$

$$\underbrace{u(n+1)}_l - \underbrace{u(n)}_l = u'(c_n) \quad n < c_n < n+1$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 l l $+\infty$

$\Rightarrow u'(c_n) \rightarrow 0 \Rightarrow$ si conclude visto che $\liminf = \min$ e $\limsup = \max$

— 0 — 0 —

STUDIO QUALITATIVO

Capire come sono fatte le sol. di un pbm. di Cauchy senza risolverlo.

Esempio 1

$$u' = \arctan u \quad u(0) = \gamma$$

Passo 1

Esistenza locale e unicità: gratis perché $f(t, u)$ è (loc.) dip. in u .

Passo 2

Esistenza globale: $|f(t, u)| \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ glob. dim.

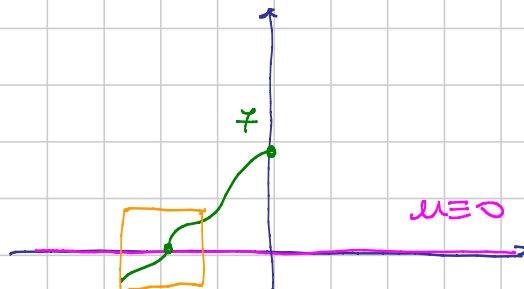
$\Rightarrow$ esistenza globale per teorema precedente.

Passo 3

$u(t) > 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Osservo che $u(t) \equiv 0$ è sol. dell'eq. (banale sostituzione)
Le soluzioni diventano barriere invalicabili.

Se $u(t)$ diventasse ≤ 0 , da qualche parte avrei $u(\tau) = 0$.
Ma questo produrrebbe una violazione di unicità.

**Passo 4**

u è strett. crescente in $\mathbb{R}$

$$u'(t) = \arctan(u(t)) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$\uparrow$ so che $\dot{u} > 0$

Passo 5

Essendo monotona, sappiamo che ammette limiti per $t \rightarrow -\infty$ e per $t \rightarrow +\infty$.
Chi sono questi limiti

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = l \in \mathbb{R}$$

Per l'equazione

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} u'(t) = \arctan l$$

denunque esiste, ma allora per il teo. asintoto deve essere 0, quindi

$$\arctan l = 0 \quad \leadsto \quad l = 0.$$

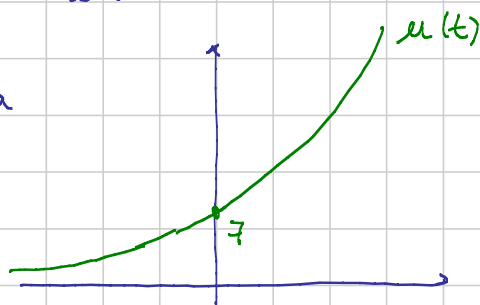
Per il limite per $t \rightarrow +\infty$, supponiamo per assurdo che sia $l \in \mathbb{R}$. Allora posso applicare il teo. asintoto e dedurre come prima che

$$\arctan l = 0 \quad \text{quindi} \quad l = 0$$

ma questo è assurdo in quanto $l \geq \gamma$.

Passo 6 Dico che $u(t)$ è convessa

1° modo $u'(t) = \arctan u(t)$
è crescente



2° modo Calcolo

$$\begin{aligned} u''(t) &= [\arctan u(t)]' = \frac{1}{1+u(t)^2} u'(t) \\ &= \frac{\arctan u(t)}{1+u(t)^2} > 0 \end{aligned}$$

Passo 7 $u \in C^\infty(\mathbb{R})$

Bootstrap !!

Passo 8 Dimostriamo che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(t)}{t} = \frac{\pi}{2}$$

Basta fare De L'Hôpital e diventa

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u'(t)}{1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan u(t) = \frac{\pi}{2}$$

$\downarrow$
 $+\infty$

Passo 9 Ci sarà l'asintoto obliquo? Servirebbe

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \underbrace{u(t) - \frac{\pi}{2}t}_{v(t)}$$

Cosa risolve $v(t)$?

$$v(t) = u(t) - \frac{\pi}{2} = \arctan u(t) - \frac{\pi}{2} = -\arctan \frac{1}{u(t)}$$

Brutalmente quindi

$$v(t) = -\arctan \frac{1}{u(t)} \sim -\arctan \frac{1}{\frac{\pi}{2}t}$$

$$\rightsquigarrow v(t) \sim -\log t \rightarrow -\infty \text{ per } t \rightarrow +\infty$$

Rigorosamente basta dim. che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{v(t)}{\frac{1}{t}} = \text{costante} \neq 0$$

e per questo basta uolt. sopra e sotto per $\frac{1}{u(t)}$ e ridursi al passo precedente. [Più dettagli a voce]

Passo 10 Come tende a 0 per $t \rightarrow -\infty$.
Esponenzialmente!

Solo brutal mode: è come fosse $u \sim u$

e quindi mi aspetto $u \sim ce^t$

↑
buona
quando $u \sim 0$

[Rigoroso forse in futuro].

Esempio 1 bis $\ddot{u} = +\arctan u$ $u(0) = -7$

Idea: se $u(t)$ è soluzione,
allora anche $-u(t)$ è solus.



Pongo $v(t) := -u(t)$ e faccio il conto

$$v'(t) = -u'(t) = -\arctan u(t) = \arctan(-u(t)) = \arctan v(t)$$

Esempio 1 ter $\ddot{u} = -\arctan u$ $u(0) = 7$

Considero $v(t) := u(-t)$

Se $u(t)$ risolve ①, allora $v(t)$
risolve ① ter



$$v'(t) = -u'(-t) = -(-\arctan u(-t)) = \arctan v(t).$$

Esempio 2 $\ddot{u} = \cos u$ $u(0) = 4$

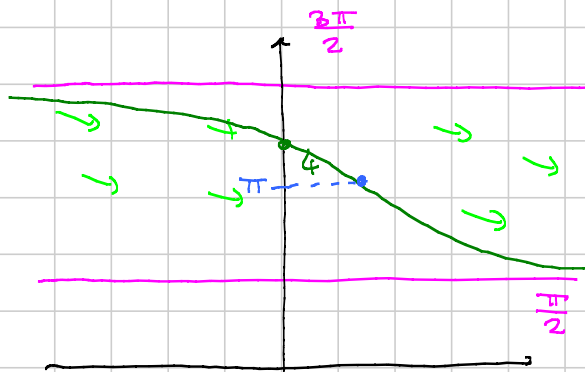
Passo 1 Esistenza GLOBALE e UNICITÀ : no problem

Passo 2 $u(t) \equiv \frac{\pi}{2}$ e $u(t) \equiv \frac{3\pi}{2}$ sono soluzioni

Quindi

$$\frac{\pi}{2} < u(t) < \frac{3\pi}{2} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Altrimenti avrei violazione
di unicità.



Passo 3 $u(t)$ è monotona decrescente in $\mathbb{R}$

$$u'(t) = \cos(u(t)) < 0 \quad \text{poiché } u(t) \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

Passo 4 $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \frac{\pi}{2}$ $\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = \frac{3\pi}{2}$

Esistono per monotonia e sono reali. (diciamo l)

Esiste il lim. della derivata ed è $\cos l$

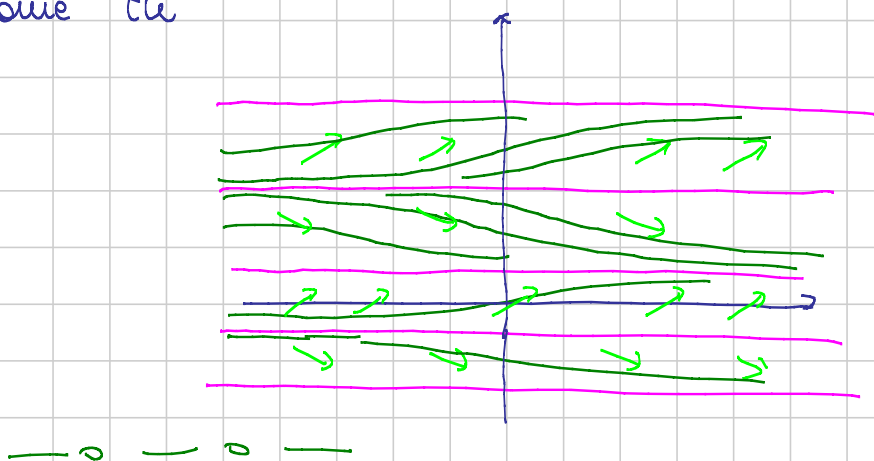
Per il teo. asintoto restano poche possibilità.

Passo 5 Studio derivata seconda

$$\begin{aligned} u''(t) &= [\cos u(t)]' = -\sin u(t) \cdot u'(t) \\ &= -\sin u(t) \cdot \cos u(t) \end{aligned}$$

Quindi $u''(t) = 0$ quando $u(t) = \pi$.

Passo 6 Al variare del dato iniziale, le soluzioni sono come in figura



ANALISI 2

-

LEZIONE 110

Note Title

02/05/2018

SOTTOSOLUZIONI E SOPRASOLUZIONISetting: $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $\uparrow$ equazioni e non sistemi $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua (almeno)Def. Una funzione $u: [t_0, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 e tale che $\uparrow$ compreso o no

$$(t, u(t)) \in \Omega \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta)$$

si dice

- soprasoluzione stretta se $u'(t) > f(t, u(t)) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta)$
- soprasol. debole se $u'(t) \geq f(t, u(t)) \quad "$
- sottosoluzione stretta se $< \quad "$
- sottosoluzione debole $\leq \quad "$

Oss. Le soluzioni di $u' = f(t, u)$ sono sia sopra, sia sottosoluzioni deboli.

Oss Se $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $g(t, u) > f(t, u)$ per ogni $(t, u) \in \Omega$ allora le soluzioni di $u' = g(t, u)$ sono soprasoluzioni strette per $u' = f(t, u)$

[Dim. ovvia]

Teorema (caso di f continua)

Siano u e v due funzioni $[t_0, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

- u è soprasolus. debole e v è sottosolus. debole
- per ogni $t \in [t_0, t_0 + \delta)$ almeno una delle 2 è stretta
- $u(t_0) > v(t_0)$

Allora

$$u(t) > v(t) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta)$$

(una soprasolus. che parte sopra resta sopra)

Dim. (Semplice ma non ovvia)

Sappiamo per ipotesi che

$$\begin{aligned} u'(t) &\geq f(t, u(t)) & \forall t \in [t_0, t_0 + \delta) \\ v'(t) &\leq f(t, v(t)) & \text{"} \end{aligned}$$

e in ogni p.to almeno una è stretta

[Questo non vuol dire che $u'(t) \geq v'(t)$ per ogni $t \in \dots$]

Pongo $w(t) := u(t) - v(t)$

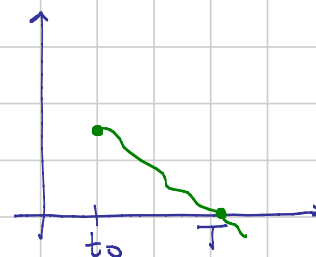
Voglio dim. che $w(t) > 0$ per ogni $t \in [t_0, t_0 + \delta)$.

Supponiamo per assurdo che non sia così. Allora posso pone

$$T := \sup \underbrace{\{ t \in [t_0, t_0 + \delta) : w(t) \leq 0 \}}_{\neq \emptyset}$$

Per definizione di cuf avremo che

- $w(t) > 0$ per $t \in [t_0, T)$
- $\exists t_n \rightarrow T^+$ t.c. $w(t_n) \leq 0$



Inoltre $T > t_0$ perché $w(t_0) > 0$ e quindi $w(t) > 0$ in un intorno destro di t_0 .

Dalla due proprietà sopra segue che $w(T) = 0$ (se faccio il limite da sx viene ≥ 0 , se lo faccio lungo la succ. tu viene ≤ 0).

Inoltre $w'(T) \leq 0$ perché se fosse $w'(T) > 0$, allora in un intorno sx di T la w sarebbe < 0 .

D'altra parte

$$\begin{aligned}
 w'(T) &= u'(T) - v'(T) > 0 \\
 &\geq f(T, u(T)) \geq -f(T, v(T))
 \end{aligned}$$

$\uparrow$ perché almeno una delle
2 è stretta
sono uguali perché
 $w(T) = 0$

Avendo ottenuto che $w'(T) \leq 0$ e $w'(T) > 0$ abbiamo un assurdo.

— 0 — 0 —

Oss. Non serve davvero supporre che $u(t_0) > v(t_0)$, basta la $u(t_0) \geq v(t_0)$.

[Se $u(t_0) = v(t_0)$, allora $w'(t_0) = u'(t_0) - v'(t_0) \geq f(t, u(t_0)) - f(t, v(t_0)) > 0$ perché una è stretta]

Quindi ancora una volta

$w(t) > 0$ in un intorno dx di t_0].

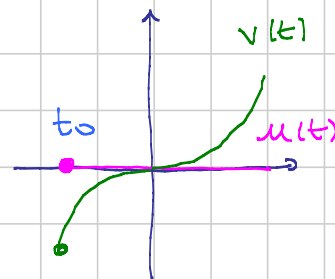
Oss. Se f è solo continua serve DAVVERO suppone che in ogni pto una delle 2 sia stretta, anche se $u(t_0) > v(t_0)$

Solito esempio con $\tilde{u} = 3|u|^{2/3}$

$u(t) \equiv 0$ parte sopra ed è
soprasoluz. debole

$v(t) = t^3$ parte sotto ed è
sottosoluz. debole

Dopo un po' si scambiano.



Teorema (Caso f lip. in u)

Sia u e v due funzioni $: [t_0, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$

Supponiamo che

(i) u è soprasoluzione debole e v è sottosoluz. debole

(ii) $u(t_0) \geq v(t_0)$

Allora

$$u(t) \geq v(t) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta)$$

Dim. Sia L la costante di lip. di f , cioè

$$|f(t, u_2) - f(t, u_1)| \leq L |u_2 - u_1| \quad \forall t, u_1, u_2 \dots$$

Pongo $u_\varepsilon(t) := u(t) + \varepsilon e^{\Lambda t}$ dove $\Lambda > L$

Dico che $u_\varepsilon(t)$ è soprasoluzione stretta quando $\varepsilon > 0$ è abbastanza piccolo.

Se lo dimostro, poi osservo che $u_\varepsilon(t_0) > u(t_0) \geq v(t_0)$, applico il teo precedente perché tra u_ε e v sono verificate le ipotesi e deduco che

$$u_\varepsilon(t) > v(t) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta)$$

cioè

$$u(t) + \varepsilon e^{\lambda t} > v(t) \quad "$$

Passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ho la tesi.

Resta da verificare che $u_\varepsilon(t)$ è sopra solus., cioè

$$u'_\varepsilon(t) \stackrel{?}{>} f(t, u_\varepsilon(t))$$

$$u'(t) + \varepsilon \lambda e^{\lambda t} \stackrel{?}{>} f(t, u(t) + \varepsilon e^{\lambda t})$$

$$u'(t) + \varepsilon \lambda e^{\lambda t} \stackrel{?}{>} f(t, u(t)) + f(t, u(t) + \varepsilon e^{\lambda t}) - f(t, u(t))$$

Sappiamo che $u'(t) \geq f(t, u(t))$ per ipotesi, quindi ci basta

$$\varepsilon \lambda e^{\lambda t} \stackrel{?}{>} f(t, u(t) + \varepsilon e^{\lambda t}) - f(t, u(t))$$

e questa è mezza dip.

$$f(t, u(t) + \varepsilon e^{\lambda t}) - f(t, u(t)) \leq L \varepsilon e^{\lambda t} < \lambda \varepsilon e^{\lambda t}$$

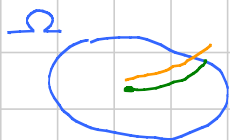
$\uparrow$
 $\lambda > L$ e
 il resto è positivo.

— o — o —

Domanda: dove ho usato che ε è piccolo?

Senza che $(t, u_\varepsilon(t)) \in \Omega$ e questo lo posso assicurare solo per ε piccolo

(anzi dovrei fare il ragionamento in sottointerval-
li chiusi $[t_0, t_0 + \delta_1] \subset [t_0, t_0 + \delta)$)



— o — o —

Dim 3 della parte di unicità del teorema CLPL

Siano u e v due soluzioni (siano a valori in $\mathbb{R}^k$)

$$u' = f(t, u) \quad v' = f(t, v) \quad (\text{stesso dato in } t_0)$$

Pongo $w(t) := \|u(t) - v(t)\|^2$ (norma al $\square$)

Allora

$$w'(t) = 2 \langle u(t) - v(t), u'(t) - v'(t) \rangle$$

$$= 2 \langle u(t) - v(t), f(t, u(t)) - f(t, v(t)) \rangle$$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{C.S.}}}{\leq} 2 \|u(t) - v(t)\| \cdot \underbrace{\|f(t, u(t)) - f(t, v(t))\|}_{\leq L \|u(t) - v(t)\|}$$

$$\leq 2L \|u(t) - v(t)\|^2$$

$$= 2L w(t)$$

Quindi $w(t)$ è sottosoluzione dell'equazione $w' = 2Lw$.

D'altra parte $w(t) \equiv 0$ è una soluzione.

Dal momento che $w(0) = 0 \leq u(0)$ per il confronto possiamo concludere che

$$w(t) \leq 0 \quad \text{per ogni } t \in [t_0, t_0 + \delta)$$

e quindi $w(t) \equiv 0$.

— 0 — 0 —

Teorema di esistenza globale

Supponiamo che $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ sia continua e sublineare, cioè esistono due costanti A e B t.c.

$$|f(t, u)| \leq A + B \|u\| \quad \forall (t, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$$

Allora il pbm. di Cauchy $\dot{u} = f(t, u)$, $u(t_0) = u_0$ ha esistenza globale per ogni dato iniziale.

Dim. Prendo una sol. massimale. Non può avere break down, quindi basta escludere il blow up.

Considero $w(t) := \|u(t)\|^2$. Come prima

$$w'(t) = 2 \langle u(t), u'(t) \rangle$$

$$= 2 \langle u(t), f(t, u(t)) \rangle$$

$$\leq 2 \|u(t)\| \cdot \|f(t, u(t))\|$$

$$\leq 2 \|u(t)\| \cdot (A + B \|u(t)\|)$$

$$= 2B \|u(t)\|^2 + 2A \|u(t)\| \quad 2ab \leq a^2 + b^2$$

$$\leq 2B \|u(t)\|^2 + A^2 + \|u(t)\|^2$$

$$= A^2 + (2B+1) w(t)$$

Quindi $w'(t) \leq A^2 + (2B+1) w(t)$

Ora le sol. di $\dot{u} = A^2 + (2B+1)u$ non scoppiano, quindi nemmeno w .

ANALISI 2 - LEZIONE 111

Note Title

02/05/2018

Studi qualitativi autonomi

Esempio 1 $\begin{cases} u' = \log u \\ u(0) = \alpha > 0 \end{cases}$

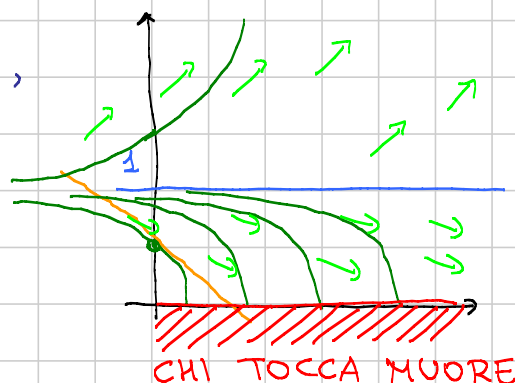
Fatto 1 Esistenza ed unicità locale: no problem

Fatto 2 $u(t) \equiv 1$ è soluzione dell'eq. (sistema $\alpha=1$)
(tutti gli zeri del RHS sono solut. costanti)

Fatto 3 Per $\alpha \in (0,1)$ la soluzione, finché esiste, è decrescente e inoltre $u(t) \in (0,1)$

(non può superare 1 perché avrei violazione di unicità)

Quindi nel passato la sol. esiste globalmente e tende ad un limite l che è per forza $l=1$ per il teo. asintotico.



[se $u(t) \rightarrow l$, allora $u'(t) \rightarrow \log l$ per l'eq., quindi $u'(t)$ ha limite, quindi $u'(t) \rightarrow 0$, cioè $\log l = 0$, cioè $l=1$].

Fatto 4 Per $\alpha \in (0,1)$ la solut. ha break down in tempo finito.

1° modo Se non avesse BD avrebbe esist. glob., ma allora tenderebbe ad $l \in [0, \alpha]$, ma come prima dovrebbe essere $\log l = 0$, che è impossibile.

2° modo u è concava in quanto

$$u''(t) = \frac{1}{u(t)} u'(t) = \frac{\log u(t)}{u(t)} < 0$$

ma allora $u(t)$ sta sotto la retta tang. in $t=0$ che ha coeff. angolare $\log \alpha < 0$

3° modo La funzione $v(t) = \alpha + t \log \alpha$ è soprasoluz. fino a quando resta > 0 .

$$\dot{v}(t) = \log \alpha \geq \log (\underbrace{\alpha + t \log \alpha}_{< \alpha \text{ perché } \log \alpha < 0})$$

Fatto 5 Quando $\alpha \rightarrow 1^-$, il tempo di vita tende a $+\infty$ (basta osservare che le diverse soluzioni si ottengono per traslazione orizz.).

Fatto 6 Per $\alpha \in (1, +\infty)$ la soluzione esiste glob. per $t \leq 0$ e tende a $\pm$ per $t \rightarrow -\infty$.

Per $t \geq 0$ c'è esistenza globale (il log è sublineare) e tende a $+\infty$ (se tendesse ad $\ell \in \mathbb{R}$ dovrebbe essere $\log \ell = 0$).

Formalmente: occorre modificare f per $u \leq 1$ in modo da averla definita globalmente e sublineare globale.

Semi-hard Come cresce a $+\infty$?

— o — o —

Esempio 2 $\dot{u} = \frac{u+5}{u+3}$

$$u(0) = \alpha \neq -3$$

Fatto 1 Esistenza e unicità locale: no problem

Fatto 2 Per $\alpha > -3$ abbiamo

- esistenza globale per $t \geq 0$ con limite $+\infty$
 nella zona $u \geq \alpha$ è $f(u)$ limitata
 se fosse $l \in \mathbb{R}$ dovrebbe essere $f(l) = 0$
- break down in tempo finito per $t \leq 0$
 (altrimenti avrei esistenza globale con limite l t.c. $f(l) = 0$)

Fatto 3 Per $\alpha \in (-5, -3)$ si tratta come sopra

Fatto 4 Per $\alpha < -5$ abbiamo esistenza globale sia nel passato sia nel futuro, con

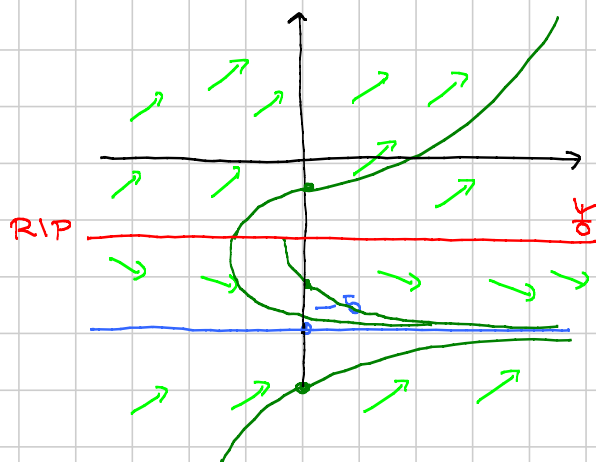
$$\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = -\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = -5$$

Fatto 5 Quando $\alpha > -3$ abbiamo che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(t)}{t} = 1$$

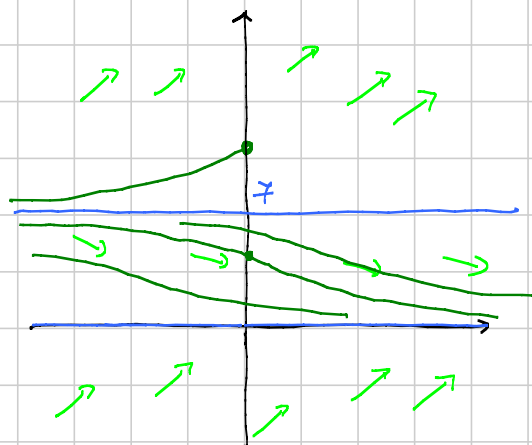
$$\begin{aligned} \stackrel{\text{H\ddot{o}p}}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} u'(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(t)+5}{u(t)+3} \\ &= \lim_{\substack{y \rightarrow +\infty \\ u(t)=y}} \frac{y+5}{y+3} = 1. \end{aligned}$$



Esempio 3 $\begin{cases} u' = u(u-\gamma) \\ u(0) = \alpha \end{cases}$

Semplice per $\alpha \in (0, \gamma)$

Per $\alpha > \gamma$ è semplice per $t \leq 0$,
dove abbiamo esistenza
globale con limite γ



Cosa succede per $t \geq 0$. Opzioni

→ esist. glob. con limite finito (NO: sarebbe $f(\gamma) = 0$)

→ " " " " $+\infty$

→ blow up in tempo finito

Brutal mode: $u' \sim u^2$ e questa ha blow up
già sappiamo che $u \rightarrow +\infty$

Per dimostrarlo formalmente, basta mettere sotto una
sottosoluzione che ha blow up in tempo finito

$$\ddot{u} = u(u-\gamma) \geq cu^2 \quad \text{per ogni } u \geq \alpha$$

Analisi 1: per ogni $\alpha > \gamma$ esiste $c > 0$ t.c.

$$u(u-\gamma) \geq cu^2 \quad \forall u \geq \alpha$$

(divido per u^2 e studio la funzione)

Le soluzioni di $\dot{v} = cv^2$ sono sottosolus. dell'eq.
iniziale, quindi se partono con lo stesso dato stanno
sotto. Ma queste hanno tutte blow up (basta risolvere
esplicitamente).

Alternativa Tiro fuori dal cilindro

$$v(t) := \frac{\alpha}{1-\varepsilon t}$$

Dico che per ε piccolo è sottosoluz.

$$v'(t) \stackrel{?}{\leq} v(v-\gamma)$$

$$\frac{\alpha \varepsilon}{(1-\varepsilon t)^2} \stackrel{?}{\leq} \frac{\alpha}{(1-\varepsilon t)} \left(\frac{\alpha}{1-\varepsilon t} - \gamma \right) \quad \text{se } 1-\varepsilon t > 0$$

$$\varepsilon \stackrel{?}{\leq} \alpha - \gamma (1-\varepsilon t)$$

$$\varepsilon \stackrel{?}{\leq} \alpha - \gamma + \gamma \varepsilon t$$

Basta scegliere $0 < \varepsilon \leq \underbrace{\alpha - \gamma}_{\text{positivo}}$

Quindi $v(t)$ è sottosoluz. in $[0, \frac{1}{\varepsilon})$

v univoca, quindi u univoca 😊.
— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 112

Note Title

03/05/2018

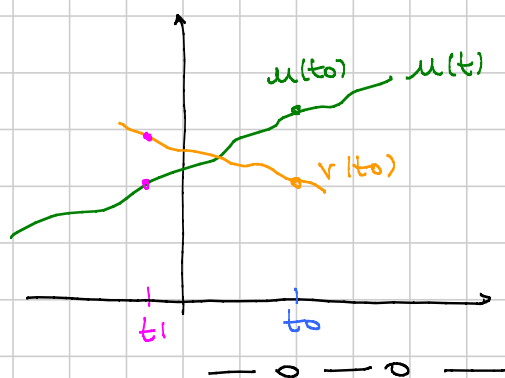
Achtung! Nel passato sopra e sottosoluzioni funzionavano al contrario. Classico esempio (f lip.)

$$\left. \begin{array}{l} u(t_0) > v(t_0) \\ \dot{u} = f(t, u) \\ \dot{v} \geq f(t, v) \end{array} \right\} \forall t \in [t_0 - \delta, t_0] \Rightarrow u(t) \geq v(t) \quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0]$$

↑
soprasoluzione
nel passato sta sotto

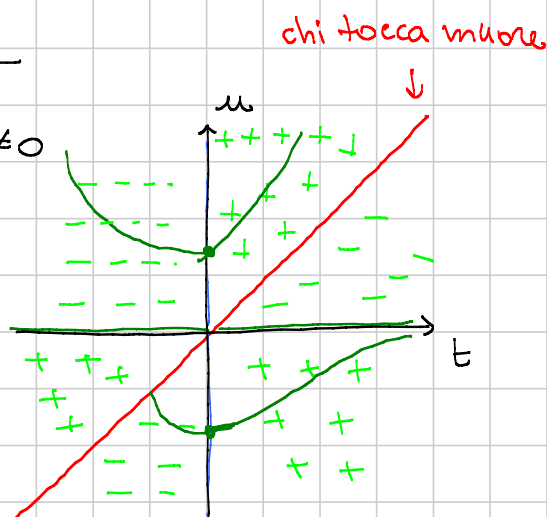
Dim. Supponiamo per assurdo che esista $t_1 \in [t_0 - \delta, t_0]$ tale che $u(t_1) < v(t_1)$. Pensò a t_1 come istante iniziale e guardo al futuro.

Per il teorema nel futuro avremo che $u(t) \leq v(t)$ in tutti i tempi successivi, compreso t_0 .



Esempio 1 $\dot{u} = \frac{tu}{u-t}$ $u(0) = \alpha \neq 0$

Fatto 1 Esist. e unicità locali
 $\leadsto$ gratis



Fatto 2 Per $\alpha < 0$ la soluzione ha esistenza globale per $t \geq 0$ e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0^-$$

Sicuramente $u(t) < 0$ fino a quando esiste (altrimenti ho violazione di unicità)

Quindi sta nel IV quadrante, quindi non può crescere e non c'è blow up e nemmeno BD $\leadsto$ esist. glob.

Supponiamo per assurdo che $u(t) \rightarrow \ell < 0$. Allora

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t u(t)}{u(t) - t} = -\ell$$

$$\frac{t}{1 - \frac{t}{u(t)}} = \frac{1}{\frac{1}{t} - \frac{1}{u(t)}}$$

Quindi $\ell = 0$.

Fatto 3 Per $\alpha > 0$ e $t \leq 0$ è come prima. In generale vale la simmetria

$u(t)$ soluzione $\Rightarrow v(t) = -u(-t)$ soluzione

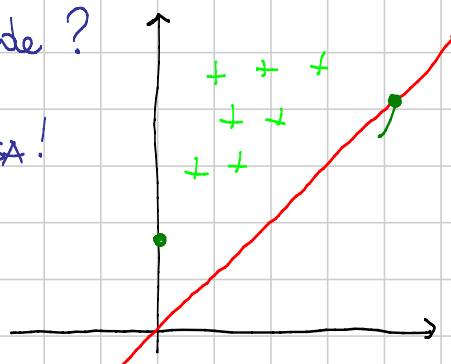
$$v'(t) = +u'(-t) = \frac{-t u(-t)}{u(-t) - (-t)} = \frac{t [-u(-t)]}{u(-t) + t} = \text{☹}$$

Non viene perché è falso!!!

Fatto 4 Per $\alpha > 0$ e $t \geq 0$ cosa accade?

NON PUÒ TOCCARE LA ZONA ROSSA!

Brutalmente: restando sopra la retta non posso toccarla con derivata $+\infty$



Ci sono almeno due modi per sistemare rigorosamente

1° modo Poniamo $T := \sup \{ \tau > 0 : u(t) > t \quad \forall t \in [0, \tau] \}$

Se $T = +\infty$ siamo 😊

Altrimenti abbiamo che $T \in \mathbb{R}$ e $u(T) = T$ (se fosse $u(T) > T$, allora resterebbe vero ancora per un po').

- Quando il grafico Considero $T - \frac{1}{n}$ e applico Lagrange

$$u(T) - u\left(T - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} u'(c_n)$$

$$u\left(T - \frac{1}{n}\right) > T - \frac{1}{n}, \text{ quindi}$$

$$-u\left(T - \frac{1}{n}\right) < -(T - \frac{1}{n})$$

$$\frac{1}{n} u'(c_n) = u(T) - u\left(T - \frac{1}{n}\right) < \cancel{T} - \cancel{T} + \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow u'(c_n) < 1 \text{ e quindi } \lim_{t \rightarrow T^-} u'(t) \leq 1 \text{ posto che esista}$$

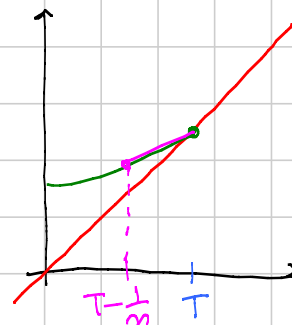
(altrimenti il limsup)

- Quando l'equazione e ottengo

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u'(t) = \lim_{t \rightarrow T^-} \frac{t u(t)}{u(t) - t} = +\infty$$

$\uparrow$
 $\left[\frac{T^2}{0^+} \right]$

Quindi ho un assurdo.



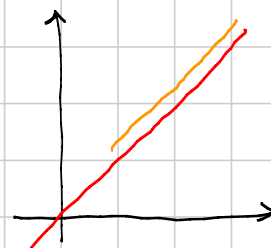
2° modo Dico che $v(t) = t + \varepsilon$ è una sottosoluzione, o almeno lo spero

$$v'(t) \stackrel{?}{\leq} \frac{t v(t)}{v(t) - t}$$

$$1 \stackrel{?}{\leq} \frac{t^2 + \varepsilon t}{\varepsilon}$$

$$\varepsilon \leq t^2 + \varepsilon t$$

Vera per $t \geq 1$, ma non vera per ogni $t \geq 0$



Questo dice una cosa più debole: se si sopravvive fino a $t = 1$, allora non muore più.

FATTO 5 Per $\alpha < 0$ e $t \leq 0$ c'è break down per assenza di alternative

FATTO 6 Per $\alpha > 0$ e $t \geq 0$ non c'è blow up, quindi c'è esistenza globale

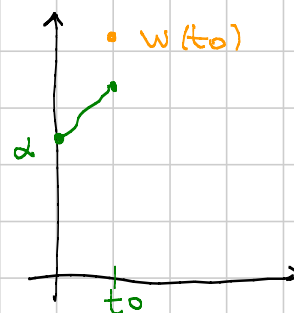
Spero che $w(t) = At^2 + t$ è soprasoluzione quando A è grande

$$w' \stackrel{?}{\geq} \frac{t w}{w - t}$$

$$2At + 1 \stackrel{?}{\geq} \frac{t(At^2 + t)}{At^2}$$

$$2At + 1 \stackrel{?}{\geq} \frac{At^2 + t}{At} = t + \frac{1}{A}$$

Vera se A è grande e $t > 0$.



Per bene: prendo la soluzione con $u(0) = \alpha$.

Questa vive, per esistenza locale, fino ad un certo $t_0 > 0$.

Scelgo $A > 0$ in modo che

$$u(t_0) < w(t_0)$$

Ora $w(t_0)$ è soprasoluzione per ogni $t \geq t_0$ e quindi sta sopra $u(t)$ per ogni $t \geq t_0$ → niente BU.

Se volevo evitare t al denominatore, potevo prendere

$$w(t) = At^2 + t + 1$$

e sperare

FATTO 7 Vediamo se c'è crescita quadratica

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u'(t)}{2t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{u(t)}{u(t) - t} = \frac{1}{2} \quad \leftarrow$$

Se io sapessi che $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(t)}{t} = +\infty$ avrei finito

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} u'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t u(t)}{u(t) - t} = +\infty$$

$$\frac{t u(t)}{u(t) - t} \geq \frac{t u(t)}{u(t)} = t$$

$$\frac{u(t)}{u(t) - t} = \frac{1}{1 - \frac{t}{u(t)}} \rightarrow 1$$

ANALISI 2

LEZIONE 113

Titolo nota

03/05/2018

VALORI SOGLIA

L'esempio $\begin{cases} u' = u^2 - \alpha t \text{ tant} \\ u(0) = \alpha \end{cases}$

Cosa accade per $\alpha > 0$ e $t \geq 0$

A sono 3 possibilità

→ blow up in tempo finito

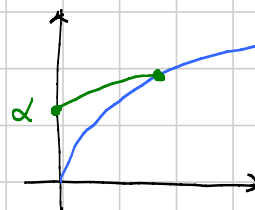
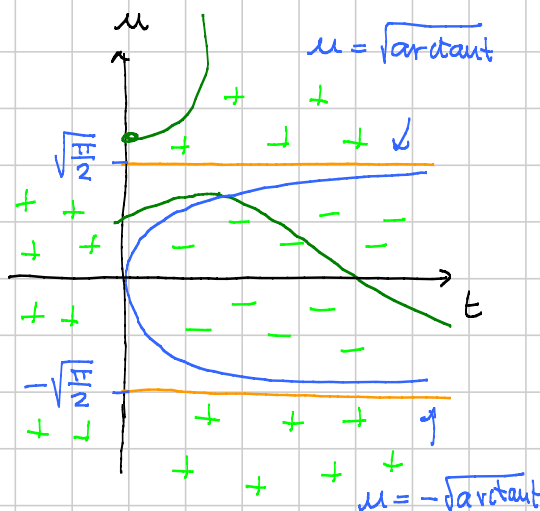
→ esistenza globale monotona cresc.

→ esistenza globale toccando $u = \sqrt{\alpha t \text{ tant}}$

Effetto soglia: esiste $\alpha_0 > 0$ tale che

- per $\alpha > \alpha_0$ la sol. hanno blow up
- per $\alpha = \alpha_0$ la sol. esiste glob., è monotona crescente e tende a $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
- per $\alpha \in (0, \alpha_0)$ la sol. esiste glob, tocca e tende a $-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ per $t \rightarrow +\infty$

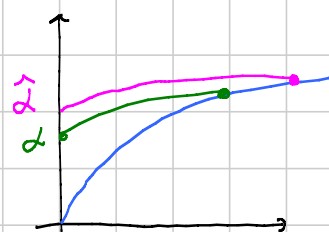
Fatto 1 Esistono sol. con $\alpha > 0$ che toccano
Basta partire sulla curva $u = \sqrt{\alpha t \text{ tant}}$ e
"tornare indietro"



Fatto 2 L'insieme degli α per cui la soluz. tocca è un intervallo aperto.

Questo segue da 3 osservazioni

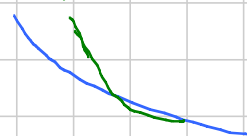
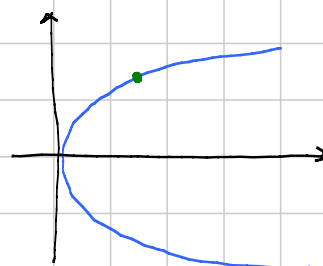
- esistono α per cui non tocca (basta partire sopra $\sqrt{\frac{H}{2}}$)
- se per un certo α tocca, allora tocca per gli α precedenti
- se per un certo α tocca, allora tocca anche per un po' di α più grandi (basta partire da un p.to successivo SULLA CURVA)



FATTO 3 Dopo aver toccato le soluzioni restano tra le 2 curve e tendono decrescendo a $-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Brutalmente:

- non può toccare sopra perché decresce
- non può toccare sotto perché non si può fare con derivata nulla arrivando da sopra



Rigorosamente, basta verificare che

$$v(t) = \sqrt{\arctan t} \quad \text{è soprasoluz.}$$

$$w(t) = -\sqrt{\arctan t} \quad \text{è sottosoluz.}$$

ovvio perché cresc.

$$\ddot{v} \geq 0 \quad \text{ris dell'eq.}$$

$$\ddot{w} \leq 0$$

↑ è decrescente

Una volta che sta dentro applico il teo. asintoto.

FATTO 4 Per $\alpha = 10$ la soluzione ha blow up

Intanto resta nella zona $u \geq 10$. In quella zona vale

$$u^2 - \arctan u \geq u^2 - \frac{\pi}{2} \geq c u^2 \quad \forall u \geq 10$$

$\uparrow$ costante positiva

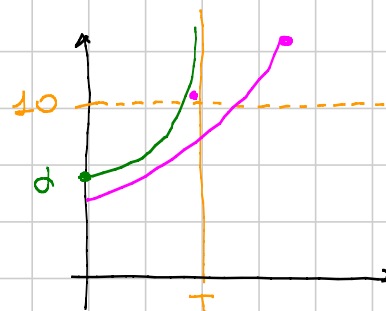
Quindi confronto con le soluz. di $\dot{v} = c v^2$ che hanno BU

FATTO 5 L'insieme degli α per cui la sol. è una semiretta aperta.

Segue da 2 osservazioni

- Se per un certo α ho BU, allora ce l'ho per i succ.
- " " " " " " " " , allora ce l'ho pure per qualche α più piccolo

Basta partire sopra 10 e a dx della soluz. prec.



Al termine abbiamo

blow up

contatto

Fatto 6 Esiste almeno un α_0 che non sta nelle 2 zone (sono aperte). Cosa può succedere per questo α_0 ?
 NO BU e NO contatto, quindi c'è esistenza globale e monotonia crescente.
 A quel pto $u(t) \rightarrow l$ e con teo. asint. si vede che $l = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Fatto 7 Supponiamo esistano $\alpha < \beta$ con il comportamento del fatto 6.

Chiamiamo $u_\alpha(t)$ e $u_\beta(t)$ le 2 soluzioni e osserveremo che $u_\beta(t) > u_\alpha(t)$ per ogni $t \geq 0$
 Pongo

$$w(t) := u_\beta(t) - u_\alpha(t)$$

Allora

$$w'(t) = u_\beta(t)^2 - u_\alpha(t)^2 \geq 0$$

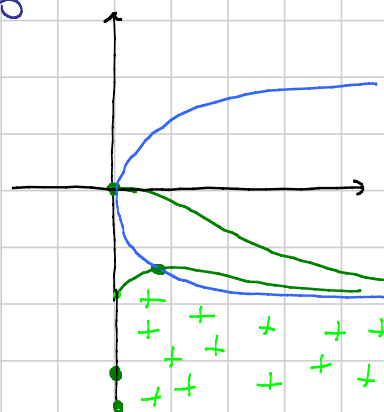
Quindi $w(t)$ è crescente, ma parte $\beta - \alpha > 0$ e tende a 0 per $t \rightarrow +\infty$ perché u_α e u_β hanno lo stesso limite.

Fatto 8 Cosa succede per $\alpha < 0$ e $t \geq 0$

Ci sono due opzioni

→ tocca e tende a $-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

→ tende a $-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ da sotto
 monotonamente



Dico che toccano tutte. Supponiamo che una certa $u(t)$ non tocchi. Allora

$$u(t) < -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \forall t \geq 0$$

quindi $u(t)^2 \geq \frac{\pi}{2}$, quindi

$$u'(t) = u(t)^2 - \arctan t \geq \frac{\pi}{2} - \arctan t$$

$$= \arctan \frac{1}{t} \sim \frac{1}{t}$$

$$\text{Ma allora} \quad u(t) = u(0) + \int_0^t u'(s) ds \geq u(0) + \int_0^t \arctan \frac{1}{s} ds$$

Facciamo il limite per $t \rightarrow +\infty$ trovo che $u(t) \rightarrow +\infty$
perché l'int. improprio diverge.

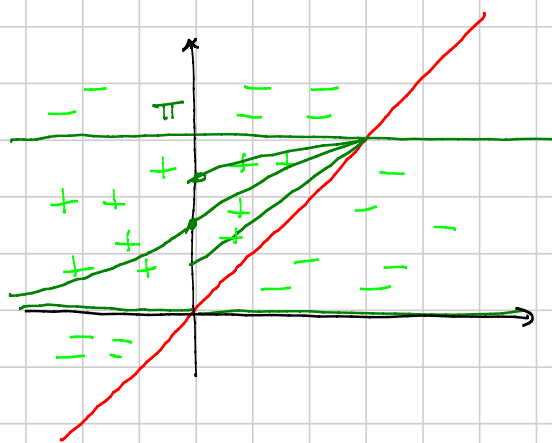
Esempio

(FOSSA COMUNE)

$$u' = \frac{\sin u}{u-t} \quad u(0) = \alpha \in (0, \pi)$$

Per $t \leq 0$ esiste globalmente
e tende a 0 (non ovvio)

Per $t \geq 0$ tutte le sol. con
 $\alpha \in (0, \pi)$ hanno BD per
 $t = \pi$



ANALISI 2

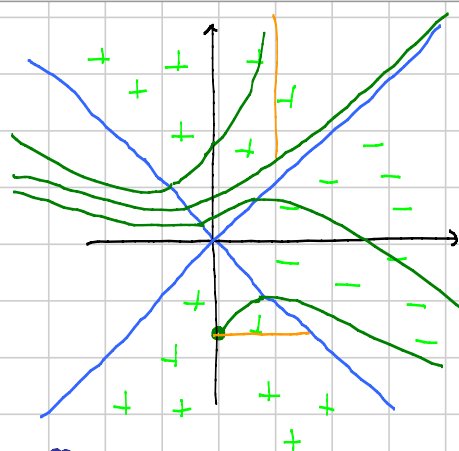
LEZIONE 114

Note Title

07/05/2018

Esempio 1 $\begin{cases} \ddot{u} = u^2 - t^2 \\ u(0) = \alpha \end{cases}$

Saltiamo i conservativi

Caso $\alpha < 0, t \geq 0$ Esistenza globale e $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = -\infty$ È evidente che la sd. tocca la retta $u = -t$. Il contatto avviene in T e poi

$$-t \leq u(t) \leq t \quad \forall t \geq T$$

$\ddot{w}(t) \qquad \ddot{v}(t)$

w è sottosol.:

$$\ddot{w} \leq w^2 - t^2$$

$-1 \qquad 0$ 😊

v è soprased.

$$\ddot{v} \geq v^2 - t^2$$

$1 \geq 0$

Se per assurdo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = l \in \mathbb{R}$$

avremmo $u(t) \rightarrow -\infty$ il che non va bene per te. aiut.

Simmetria Se $u(t)$ è sd., allora anche $v(t) := -u(-t)$ è sd. (simm. risp. origine)

$$\ddot{v}(t) = -\ddot{u}(-t)(-1) = \ddot{u}(-t) = u(-t)^2 - (-t)^2 = v(t)^2 - t^2$$

Caso $\alpha > 0, t \geq 0$ Ci sono 3 possibilità

- blow up $\alpha \in A$
- esistenza glob. con $u(t) \rightarrow +\infty$
- esistenza " " $u(t) \rightarrow -\infty$ $\alpha \in B$

L'insieme A è una semiretta ($\neq \emptyset$) e aperta

Facile: se $\alpha \in A$ e $\hat{\alpha} > \alpha \leadsto \hat{\alpha} \in A$.

Melio: $A \neq \emptyset$. Si può fare in 2 modi

1° modo: via confronto

Nella zona $[0, 1] \times [2, +\infty)$ esiste una costante c tale che

$$u^2 - t^2 \geq cu^2$$

$$u^2 - t^2 \underset{t \leq 1}{\geq} u^2 - 1 \underset{\text{posso prendere } c = \frac{1}{2}}{\geq} cu^2$$

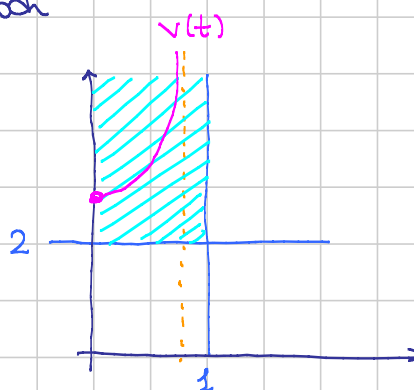
Osservo che le soluzioni di $\dot{v} = \frac{1}{2} v^2$ hanno blow up per $T \leq 1$ se partono abbastanza in alto.

Lo stesso vale per le $u(t)$ che partono sopra.

2° modo: spero di trovare una sottosol. che ha blow up

$$v(t) := \frac{A}{1-t} \quad \dot{v} \stackrel{?}{\leq} v^2 - t^2 \quad \text{per } t \leq 1$$

$$\frac{A}{(1-t)^2} \stackrel{?}{\leq} \frac{A^2}{(1-t)^2} - t^2 \quad ; \quad A \stackrel{?}{\leq} A^2 - t^2(1-t)^2$$



$$A^2 - A \stackrel{?}{\geq} t^2(1-t)^2 \quad ; \quad t^2(1-t)^2 \leq 1 \leq A^2 - A$$

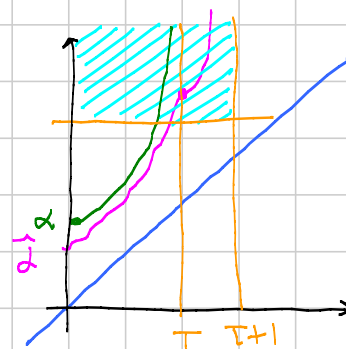
$t \in [0,1]$ $\uparrow$ se prendo A grande

Resta da dim. che A è aperto, cioè se $\alpha \in A$ esiste $\hat{\alpha} \in A$ con $\hat{\alpha} < \alpha$.

Dimostro che partendo un po' da α ho ancora blow up.

Come prima osservo che esiste $c > 0$ tale che

$$u^2 - t^2 \geq cu^2 \quad \forall t \in [0, T+1] \\ \forall u \geq T+2$$



A questo pto risolve

$$\dot{v} = cv^2$$

$$v(T) = A \text{ grande}$$

e osservo che per A grande la sol. ha blow up prima di $T+1$.

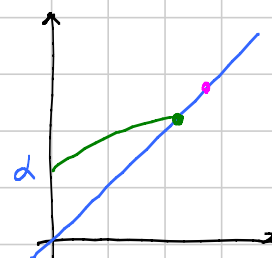
Tornando indietro trovo $\hat{\alpha} < \alpha$.

Volevo potersi usare una soprasoluz.:

$$v(t) = \frac{A}{T+12-t} \quad (\text{fare verifica per } A \text{ grande})$$

Verifichiamo che $\mathcal{Q}'$ insieme B è un intervallo aperto a dx e $\neq \emptyset$

- $\neq \emptyset$: basta partire sulla bisettrice (osservo che andando indietro non ritocca la bisettrice che è SOPRASOL)



- Intervallo : se $\alpha \in B$, allora quelli $< \alpha$ stanno in B pure

- Aperto ad x : se $x \in B$, allora esiste $\hat{x} > x$ t.c. $\hat{x} \in B$
(basta partire sulla bisettrice + avanti)

Quindi per connessione $\exists x_0 > 0$ t.c. $x_0 \notin A$ e $x_0 \notin B$.
La solut. con dato x_0 è crescente ($u(t) \geq t$), tende a $+\infty$ e non ha blow up.

Unicità della soglia Siano u e v due sol. crescenti che esistono glob.

Pongo $w(t) := u(t) - v(t)$ (wlog assumo $u(t) \geq v(t)$)

Allora
$$\dot{w}(t) = \dot{u}(t) - \dot{v}(t)$$

$$= u(t)^2 - v(t)^2$$

$$= (u(t) + v(t))(u(t) - v(t))$$

$$\geq w(t)^2$$

Se $w(0) > 0$, allora per confronto $w(t)$ avrebbe BU in tempo finito, il che non è possibile.

Comp. asintotico Sia $u(t)$ la sol. con. alla soglia.
Allora

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) - t = 0$$

Poniamo $v(t) := u(t) - t$ e vediamo cosa risolve

$$v'(t) = u'(t) - 1 = u(t)^2 - t^2 - 1 = (v(t) + t)^2 - 1 - t^2$$

$$= v(t)^2 + 2tv(t) - 1$$

Quindi vorrei studiare $\dot{v} = v^2 + 2tv - 1$

$$v^2 + 2tv - 1 = 0$$

$$v = -t \pm \sqrt{t^2 + 1}$$

Le sol. con dato > 0 possono

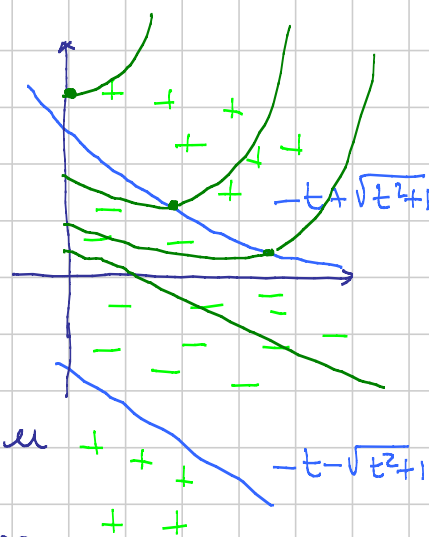
- avere blow up $\rightsquigarrow$ come le relative u
- diventare negative ed andare a $-\infty$
 $\rightsquigarrow$ come le u che toccavano ed andavano a $-\infty$
- l'unica altra possibilità è che $v(t) \rightarrow 0$ rimanendo sempre positiva.

Abbiamo anche una stima di come tende a 0

$$0 \leq v(t) \leq -t + \sqrt{t^2 + 1} = \frac{1}{t + \sqrt{t^2 + 1}}$$

Esercizio

Capire come tendono a $-\infty$ le soluzioni che stanno tra le bisettrici.
 (Cong. $u(t) \sim -t$).



ANALISI

2

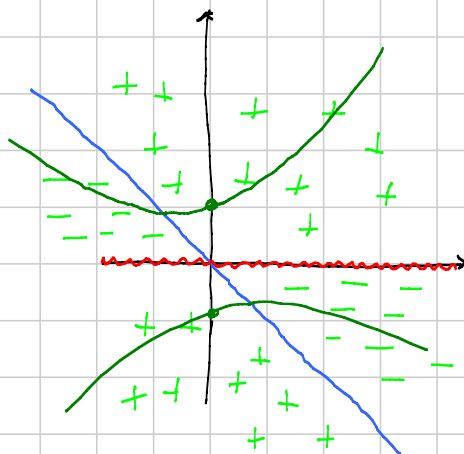
-

LEZIONE 115

Note Title

07/05/2018

Esempio 1
$$\begin{cases} \ddot{u} = \frac{\arctan(u+t)}{u} \\ u(0) = \alpha \neq 0 \end{cases}$$



Simmetria Se $u(t)$ è sol., allora $v(t) := -u(-t)$ è sol.

$$\begin{aligned} \ddot{v}(t) &= \ddot{u}(-t) = \frac{\arctan(u(-t)+(-t))}{u(-t)} \\ &= \frac{\arctan(-v(t)-t)}{-v(t)} = \frac{\arctan(v(t)+t)}{v(t)} \quad (\text{😊}) \end{aligned}$$

$\alpha > 0, t \geq 0$ Finché vive vale $u(t) \geq \alpha$, quindi

$$0 \leq \ddot{u}(t) \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\alpha} \quad \leadsto \text{esistenza globale}$$

$$\alpha \leq u(t) \leq u(0) + \int_0^t \ddot{u}(s) ds = \alpha + \frac{\pi}{2} \frac{1}{\alpha} t$$

Inoltre $u(t) \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow +\infty$ (se fosse $\mathbb{Q} \in \mathbb{R} \dots$)

Come tende a $+\infty$? Brutale

$$\ddot{u} = \frac{\arctan(t+u)}{u} \sim \frac{\pi}{2u}$$

$$2u\ddot{u} \sim \pi \quad (u^2)' \sim \pi \quad u^2 \sim \pi t \quad u \sim \sqrt{\pi t}$$

Rigoroso
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u^2(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2u(t)\ddot{u}(t)}{1} = 2 \lim_{t \rightarrow \infty} \arctan(u(t)+t) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

$\alpha < 0, t \geq 0$ Cresce fino a toccare la bisettrice.
Da quel punto T in poi vale

$$\underbrace{-t}_{\substack{\uparrow \\ \text{sottosol.}}} \leq u(t) \leq \underbrace{-T}_{\substack{\uparrow \\ \text{soprasol.}}}$$

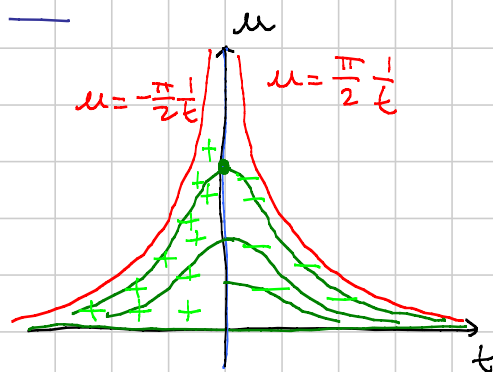
Esistenza globale con $u(t) \rightarrow -\infty$ per $t \rightarrow +\infty$

Come va a $-\infty$ è più delicato perché $u+t$ ora è $-\infty + \infty$.

[Hint: $\ddot{u} \rightarrow 0$ comunque, quindi $u(t)+t \rightarrow +\infty$,
quindi $\arctan(u+t) \rightarrow \frac{\pi}{2}$, quindi è come
sopra]

— o — o —

Esempio 2 $\begin{cases} \ddot{u} = -\tan(tu) \\ u(0) = \alpha > 0 \end{cases}$



Le soluz. con $\alpha > 0$ e $t \geq 0$
non possono avere BD perché
dovrebbero toccare con "derivata ∞ ",
quindi hanno esistenza globale !!!
Tendono a 0 per $t \rightarrow +\infty$.

Detto meglio, basta trovare una soprasoluzione del tipo

$$v(t) = \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) \frac{1}{t}$$

$$\dot{v}(t) = - \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) \frac{1}{t^2} \stackrel{?}{\geq} -\tan \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right)$$

$$\underbrace{\frac{\pi}{2} - \varepsilon}_{\text{Numero}} \stackrel{?}{\leq} \underbrace{t^2 \tan \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right)}_{\text{Numero}} \quad t \geq t_\varepsilon \rightarrow 0$$

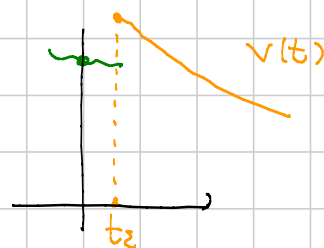
Questa è vera per $t \geq$ qualcosa, che diventa piccolo

a piacere se prendo ε piccolo. Questo mi salva.

Prendo la sol. con dato α . Questa esiste in un intervallo $[0, t_\alpha]$.

Scego $\varepsilon > 0$ abb. piccolo in modo che

$$t_\alpha > t_\varepsilon \quad \text{e} \quad u(t_\alpha) < v(t_\alpha)$$

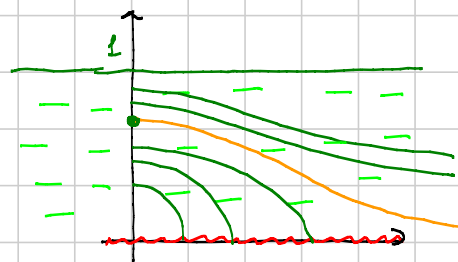


Per $\alpha > 0$ e $t \leq 0$ Discorso analogo (la sol. è pari)

[Se $u(t)$ è sol., anche $v(t) := u(-t)$ è sol. ed ha lo stesso dato iniziale].

Esempio 3
$$\dot{u} = \frac{\log u}{1+t^2}$$

$$u(0) = \alpha \in (0, 1)$$



$t \geq 0$ La sol. è monotona decr.
 BD o esistenza globale?

Nota bene: tutti i limiti $\ell \in [0, 1)$ sono compatibili con l'co. asintoto.

• Ci sono dei casi di BD

Nel quadrato vale

$$u = \frac{\log u}{1+t^2} \leq \frac{\log \frac{1}{10}}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Numero} \\ \text{negativo:} \\ \text{occhio} \\ \text{ai segni} \end{array} \right\}$$

$$\leq -1$$



(Più qualitativo: se tende a $-\infty$, in un intorno è ≤ -1)

Questo assicura il BD di quelle che partono in basso.

Più comodamente: $v(t) = \varepsilon - t$ è soprasol. per ε piccolo

$$v \stackrel{?}{\leq} \frac{\log v}{1+t^2} \quad -1 \stackrel{?}{\leq} \frac{\log(\varepsilon - t)}{1+t^2} \quad \log(\varepsilon - t) \stackrel{?}{\geq} -1 - t^2$$

questa è falsa quando $\varepsilon - t$ no

• Ci sono casi di esistenza globale con limite $l > 0$

Battezzo $\frac{1}{2}$ e dico che ci sono soluzioni che stanno sempre $\geq \frac{1}{2}$.

Risolvo $u' = \frac{\log u}{1+t^2}$

$$u(T) = \frac{3}{4}$$

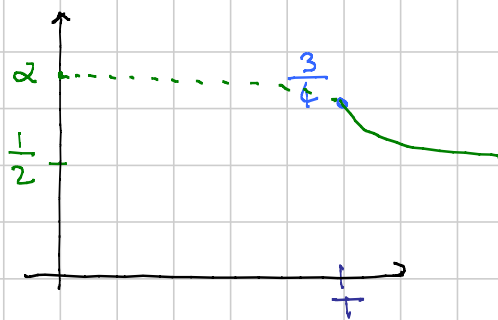
Fino a quando $u \geq \frac{1}{2}$ vale $u' \geq \frac{\log \frac{1}{2}}{1+t^2}$

quindi $u(t) \geq u(T) + \int_T^t \frac{\log \frac{1}{2}}{1+s^2} ds$

$$= u(T) - \log 2 \int_T^t \frac{1}{1+s^2} ds$$

$$\geq u(T) - \log 2 \int_T^{+\infty} \frac{1}{1+s^2} ds$$

$$= \frac{3}{4} - \underbrace{\log 2 \int_T^{+\infty} \frac{1}{1+s^2} ds}_{\substack{\text{se } T \text{ è grande,} \\ \text{questo è } \leq \frac{1}{4}}} \geq \frac{1}{2}$$



ANALISI 2

-

LEZIONE 116

Note Title

09/05/2018

DIPENDENZA CONTINUA DAL DATO INIZIALE

Setting $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$
 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$
 $\dot{u} = f(t, u)$

Fisso $t_0 \in \mathbb{R}$ e considero una successione $u_{0n} \rightarrow u_{0\infty}$ in $\mathbb{R}^k$
 Considero la succ. di problemi

$$\begin{cases} \dot{u}_n = f(t, u_n) \\ u_n(t_0) = u_{0n} \end{cases} \quad \begin{array}{l} (t_0, u_{0n}) \in \Omega \text{ quindi} \\ (t_0, u_{0n}) \in \Omega \text{ almeno per} \\ \text{u grandi} \end{array}$$

Domanda: quando $u_{0n} \rightarrow u_{0\infty}$, è vero che $u_n(t) \rightarrow u_{\infty}(t)$?
 Se sì, come e dove?

Prop. Setting come sopra. Supponiamo che f sia continua in (t, u) e lip. nella variabile u unif. in t .
 Supponiamo che $u_{0\infty}(t)$ e $u_n(t)$ siano definite in un intervallo comune $[t_0, t_0 + \delta]$.

Allora

$$\|u_n(t) - u_{\infty}(t)\| \leq \|u_{0n} - u_{0\infty}\| \cdot e^{L(t-t_0)} \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta]$$

la distanza si deteriora
 con il passare del tempo

Dim Solito conto. Poniamo

$$w(t) := \|u_n(t) - u_\infty(t)\|^2$$

Allora

$$\dot{w}(t) = 2 \langle u_n(t) - u_\infty(t), \dot{u}_n(t) - \dot{u}_\infty(t) \rangle$$

$$\stackrel{\text{c.s.}}{\leq} 2 \|u_n(t) - u_\infty(t)\| \cdot \|\dot{u}_n(t) - \dot{u}_\infty(t)\|$$

$$= 2 \|u_n(t) - u_\infty(t)\| \cdot \|\varphi(t, u_n(t)) - \varphi(t, u_\infty(t))\|$$

$$\leq L \|u_n(t) - u_\infty(t)\|$$

$$\leq 2L w(t).$$

Abbiamo quindi dim. che $\dot{w}(t) \leq 2L w(t)$, da cui

$$w(t) \leq w(t_0) e^{2L(t-t_0)}$$

$$\|u_n(t) - u_\infty(t)\|^2 \leq \|u_n(t_0) - u_\infty(t_0)\|^2 e^{2L(t-t_0)}$$

Faccendo la radice si ha la tesi.

— o — o —

Corollario Se $u_n \rightarrow u_\infty$, allora $u_n(t) \rightarrow u_\infty(t)$ uniformemente in $[t_0, t_0 + \delta]$, purché tutte le soluzioni siano definite in un intervallo comune $[t_0, t_0 + \delta]$.

— o — o —

Prop. Nelle stesse ipotesi di sopra, vale anche

$$\|u_n(t) - u_\infty(t)\| \geq \|u_{0n} - u_{0\infty}\| \cdot e^{-L(t-t_0)} \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta]$$

altra forma quantitativa di unicità: chi parte diverso, resta diverso!

Dim. Come sopra, con stima dall'altra parte

$$\dot{w}(t) \geq -2 \|u_n(t) - u_\infty(t)\| \cdot \|u_n(t) - u_\infty(t)\|$$

$$\geq -2L w(t)$$

↑ occhio ai versi

$$\text{Da } \dot{w}(t) \geq -2L w(t) \text{ deduco } w(t) \geq w(t_0) e^{-2L(t-t_0)}$$

— o — o —

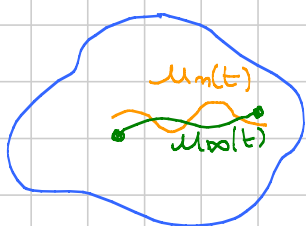
Prop. Stesso setting. Supponiamo $u_\infty(t)$ sia definita in un certo intervallo chiuso $[t_0, t_0 + \delta]$.

Allora per n abbastanza grande anche $u_n(t)$ è definita almeno nello stesso intervallo.

(Da questo segue una specie di dipendenza continua del tempo di vita)

Dim. Devo escludere che se $u_n(t)$ abbiamo BU o BD prima di $t_0 + \delta$. Questo segue dalla stima precedente. Fino a quando $u_n(t)$ è definita vale

$$\|u_n(t) - u_\infty(t)\| \leq \|u_n(t_0) - u_\infty(t_0)\| \cdot e^{L(t-t_0)}$$



↑
impedisce blow up e anche BD perché se $(t, u_\infty(t)) \in \Omega$ e $(t, u_n(t))$ è vicino, allora sta pure qui in Ω .

Più in generale, prendiamo $f_n(t, u) \rightarrow f_\infty(t, u)$ in Ω e consideriamo problemi

$$\begin{cases} \dot{u}_n = f_n(t, u_n) \\ u_n(t_0) = u_{0n} \end{cases}$$

Prop. Supponiamo $f_n(t, u)$ solo continue, e $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. in Ω . Supponiamo $u_{0n} \rightarrow u_{0\infty}$.

Supponiamo $u_n(t)$ definite almeno in un intervallo comune $[t_0, t_0 + \delta]$.

Supponiamo che $u_n(t) \rightarrow u_\infty(t)$ unif.

Allora $u_\infty(t)$ è soluzione del problema limite.

Dim. Passaggio al limite nella formulazione integrale

$$\begin{array}{ccc} u_n(t) = u_n(t_0) + \int_{t_0}^t f_n(s, u_n(s)) ds & & \\ \downarrow \text{hp} & \downarrow \text{hp} & \downarrow \text{vera} \\ u_\infty(t) = u_\infty(t_0) + \int_{t_0}^t f_\infty(s, u_\infty(s)) ds & & \end{array}$$

La convergenza degli integrali segue da

$$\underbrace{f_n(s, u_n(s))}_{\rightarrow 0} \rightarrow \underbrace{f_\infty(s, u_\infty(s))}_{\rightarrow 0} \text{ unif.}$$

Oss. Se le $f_n(t, u)$ sono equilimitate, cioè

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad |f_n(t, u)| \leq M \quad \forall (t, u) \in \Omega$$

allora le $u_n(t)$ verificano le ipotesi di A.A. (sono equilip. con costante M , ed equilimitate perché $u_n(t_0)$ sono equilimitate e poi uso equilip.). Quindi $u_n(t)$ ammettono s.suc. convergente a sol. del pbm. limite

Oss. Mancando l'unicità, s. succ. diverse possono convergere a sol. diverse del pbm. limite.

Se il problema limite avesse unicà, allora tutta la succ. $u_n(t)$ converge all' unica sol. del pbm.

limite (lemma della sotto-sotto)

— o — o —

CONDIZIONI ALLA OSGOOD

$\ddot{u} = u \rightsquigarrow$ esistenza globale

$\ddot{u} = u^2 \rightsquigarrow$ blow up

$\ddot{u} = u^p \quad p > 1 \rightsquigarrow$ blow up

} per dati $u(0) > 0$

Cosa succede tra u e u^p con $p > 1$?

$\ddot{u} = f(u)$ c'è esistenza globale se e solo se

$\int \frac{1}{f(u)} du$ con pbm. all' ∞ diverge

Più in generale

$$\ddot{u} = f(t, u)$$

Per avere esistenza globale basta

$$\|f(t, u)\| \leq A(t) + B(t) \|u\|$$

$$\leq A(t) + B(t) f(u)$$

↑ Osgood

Per quanto riguarda l'unicità vale un discorso analogo

$$\ddot{u} = u \rightsquigarrow \text{unicità}$$

$$\ddot{u} = |u|^{2/3} \rightsquigarrow \text{non unicITÀ}$$

$$\ddot{u} = |u|^p \quad p < 1 \rightsquigarrow \text{non unicITÀ}$$

$$\ddot{u} = f(u) \quad \text{si ha unicITÀ se}$$

$$\int \frac{1}{f(u)} du \quad \text{con p.b.m. a 0 diverge}$$

Più in generale, se abbiamo $\ddot{u} = f(t, u)$ si ha unicITÀ (cond. suff.) se

$$\|f(t, u_2) - f(t, u_1)\| \leq \varphi(\|u_2 - u_1\|)$$

$\uparrow$ modulo di continuità

$$\text{e } \int_0^a \frac{1}{\varphi(x)} dx = +\infty$$

Dim. Uso la solita w e arrivo a

$$w'(t) \geq \varphi(w(t))$$

e questa, se punto diverso da 0, resta $\neq 0$ per i tempi successivi per non violare l'unicità.

— 0 — 0 —

N.B. I problemi $\ddot{u} = \varphi(u)$ si risolvono "quasi" esplicitamente, dividendo per $\varphi(u)$ e separando le variabili.

— 0 — 0 —

ANALISI 2

LEZIONE 117

Note Title

09/05/2018

Esercizio 1 $\begin{cases} \dot{u} = \log(u - t^2) \\ u(0) = \alpha > 0 \end{cases}$

Condizioni iniziali saltati

$\alpha \in (0, 1), t \geq 0$ BD per forza

$\alpha \in (0, 1), t \leq 0$ Esistenza globale con

$$t^2 < u(t) < \underbrace{t^2 + 1}_{v(t)} \quad \forall t \leq 0$$

Brutalmente è chiaro.

Rigorosamente

- $v(t) = t^2 + 1$ è sottosol. per $t \leq 0$, quindi sta sopra

$$\dot{v} \stackrel{?}{\leq} \log(v - t^2) \Leftrightarrow +2t \stackrel{?}{\leq} \log 1 = 0 \quad \text{ok per } t \leq 0$$

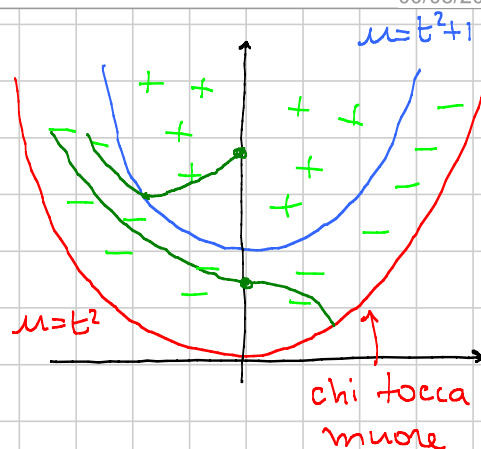
- $w(t) = t^2 + \varepsilon$ spero che sia soprasol.

$$\dot{w} \geq \log(w - t^2) \Leftrightarrow 2t \geq \log \varepsilon \quad \text{vera se } t \geq \frac{1}{2} \log \varepsilon$$

↑
numero molto negativo

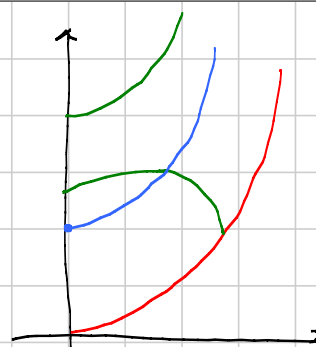
Fissato $T < 0$ trovo ε per cui vale per $t \geq T$ e questo mostra che non può toccare il rosso fino a T .

$\alpha \geq 1, t \leq 0$ Tocca, ha un minimo, poi esistenza globale



$\alpha \geq 1, t \geq 0$ Varie opzioni

- blow up (no: $\nexists (t, u) \in (u)$)
- crescente con esist. glob.
- tocca e BD (questo succede di sicuro: basta partire su $u = t^2 + 1$)



$$u' = \log(u - t^2) \leq \log u$$

Subesercizio Quanto crescono le soluzioni di $u' = \log u$?

Risposta: crescono come $t \log t$!! (per $t \rightarrow +\infty$)

Metodo delle stime iterate

- Crescono meno che esponenzialmente, cioè Ae^t è soprasoluto.

$$v \stackrel{?}{\geq} \log v \Leftrightarrow Ae^t \geq \log(Ae^t) = \log A + t$$

Questa è vera perché $Ae^t \geq A(1+t) \geq A + At \geq \log A + t$
 se $A \geq 1$ e $A \geq \log A$

- Ora $u' = \log u \leq \log(Ae^t) = \log A + t$

$\Rightarrow u$ cresce meno di una parabola

$$\Rightarrow u(t) \leq At^2 + Bt + C \leq Dt^2 \quad (\text{almeno per } t \text{ grandi})$$

- Ora $u' = \log u \leq \log(Dt^2) = 2 \log t + \log D$

da cui $u(t) \leq A + \log t$ (ho fatto la primitiva)

* Ora $u' \leq \log (At \log t) = \log A + \log t + \log(\log t)$

Facendo la primitiva ottengo $u(t) \leq t \log t + \text{resto piccolo}$

Conclusione esercizio iniziale

$u(t)$ cresce meno di $t \log t$, quindi prima o poi tocca t^2 .

Esercizio 2
$$\begin{cases} u' = (u + t^{22}) e^{-u} \\ u(0) = 22 \end{cases}$$

Come cresce la soluzione?

Brutale: u non cresce troppo, quindi tra u e t^{22} comanda t^{22} , quindi è come fosse

$$u' = t^{22} e^{-u} \quad \text{che so integrare}$$

$$e^u du = t^{22} dt \quad e^u = \frac{1}{23} t^{23} + c$$

$$u(t) \sim 23 \log t$$

Rigoroso: da una parte è facile

$$u' \geq t^{22} e^{-u} \rightarrow \text{risolvo e ho una sottosoluzione che cresce come } 23 \log t$$

Dall'alto dico che $u(t) \leq \underbrace{A+t}_{v(t)}$

Spero sia soprasolus.

$$\dot{v} \stackrel{?}{\geq} (v+t^{22})e^{-v} \quad \text{I.} \geq (A+t+t^{22})e^{-A} \cdot e^{-t}$$

(conto di analisi 1 che dovrebbe essere vero per A grande)

Volendo: la succ. $f_n(t) = (n+t+t^{22})e^{-n} \cdot e^{-t} \rightarrow 0$
unif. in $[0, +\infty)$

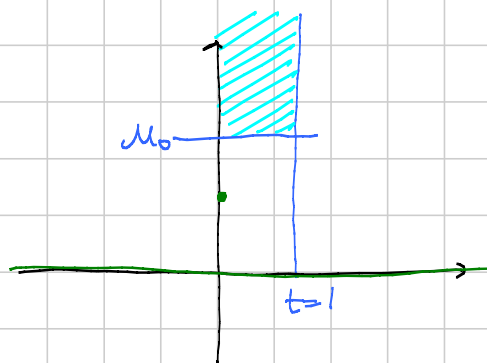
Una volta dimostrato che $u(t) \leq A+t$ ho che

$$\dot{u}(t) = (u+t^{22})e^{-u} \leq (A+t+t^{22})e^{-u}$$

e integrando si ha soprasol. che va come $23 \log t$.

Conclusione: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u(t)}{\log t} = 23.$

Esempio 3 $\begin{cases} \dot{u} = \frac{u^4}{1+t^2+u^2} \\ u(0) = \alpha > 0 \end{cases}$



$\alpha > 0, t \geq 0$ Blow up?

Esistenza gl. con $u(t) \rightarrow +\infty$?

Esist. gl. con $u(t) \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$?

Solita soggia: i dati per cui c'è BU sono una semiretta aperta

$$\frac{u^4}{1+t^2+u^2} \geq \frac{u^4}{2+u^2} \geq \frac{1}{4} u^2$$

$\uparrow$ $t \leq 1$ $\uparrow$ $u \geq u_0$

Ora $\dot{v} = \frac{1}{4} v^2$ ha BU prima di $t=1$ se punto in alto,

quindi anche quella data ha BU.

Da qui è la solita storia.

Fatto Esiste $\alpha > 0$ (unico) per cui $u(t) \rightarrow 2018$.

Esistono α per cui il limite è maggiore di 2018.

Esistono α per cui è < 2018

$$\dot{u} = \frac{u^4}{1+t^2+u^2} \leq \frac{2018^4}{1+t^2} \quad \text{vera se } t \geq 0 \text{ e } u \leq 2018$$

Considero il pbm. con dato iniziale $u(T) = 2017$.

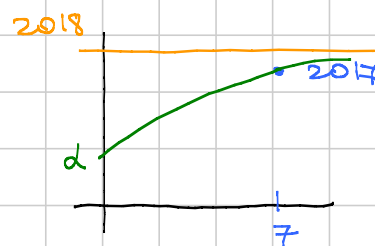
Per questo pbm. vale

$$u(t) = u(T) + \int_T^t \dot{u}(s) ds \leq \underset{2017}{u(T)} + 2018^4 \int_T^t \frac{1}{1+s^2} ds$$

$\uparrow$
 vale fino a
 quando $u(t) \leq 2018$

$$\leq 2017 + 2018^4 \int_T^{+\infty} \frac{ds}{1+s^2}$$

Scelgo T in modo che $2018^4 \int_T^{+\infty} \dots \leq 1$ e ho finito.



ANALISI 2

-

LEZIONE 118

Note Title

10/05/2018

Equazioni di ordine 2

→ Spazio delle fasi

→ Metodi energetici

$$\text{Setting: } \begin{cases} \ddot{u} = f(t, u, \dot{u}) \\ u(t_0) = u_0 \\ \dot{u}(t_0) = u_1 \end{cases}$$

Teoria: trasformo in sistema di 2 equ. di ordine 1

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v \\ \dot{v} &= f(t, u, v) \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = F(t, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix})$$

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

A questo p.to si applica la teoria generale, ad esempio

$$|f(t, u, v)| \leq A(t) + B(t)|u| + C(t)|v| \Rightarrow \text{esist. glob.}$$

Brutta notizia

$$\ddot{u} = -u$$

$$u_1(t) = \sin t \quad u_1(0) = 0, \quad \dot{u}_1(0) = 1$$

$$u_2(t) = \cos t + 2 \sin t \quad u_2(0) = 1, \quad \dot{u}_2(0) = 2$$

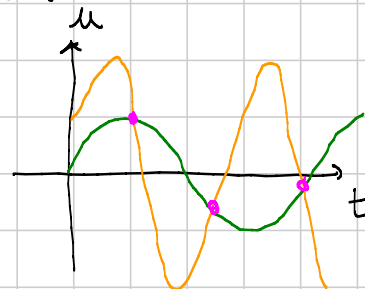
$$u_1(0) < u_2(0), \quad \dot{u}_1(0) < \dot{u}_2(0)$$

Ma non è vero che $u_1(t) < u_2(t)$ per ogni $t \geq 0$
 (la diff. è periodica a media nulla, quindi è sia pos. sia neg.)

ADDIO TEOREMI DI CONFRONTO

Achtung! Il fatto che $u_1(t)$ e $u_2(t)$ si intersecano NON è una violazione di unicità

Basta che si intersechino con derivata diversa!



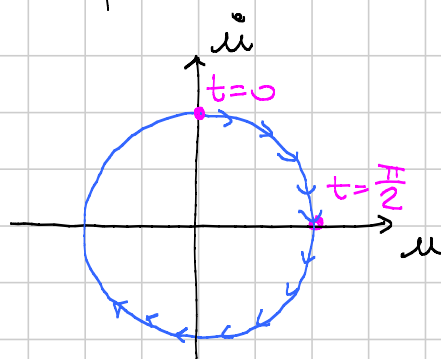
In un certo senso occorre considerare la coppia $(u(t), \dot{u}(t))$.

SPAZIO DELLE FASI

Disegno una soluzione come curva $(u(t), \dot{u}(t))$ nel piano

$$u(t) = \sin t$$

$$\leadsto \text{coppia } (u(t), \dot{u}(t)) = (\sin t, \cos t)$$



Fatto importante

Sotto le hp. che garantiscono unicità, due soluzioni diverse

→ o percorrono lo stesso supporto nello stesso verso

→ o percorrono supporti totalmente disgiunti

Esempio $\ddot{u} = -u$

$$u(0) = 0, \dot{u}(0) = 1 \leadsto u(t) = \sin t$$

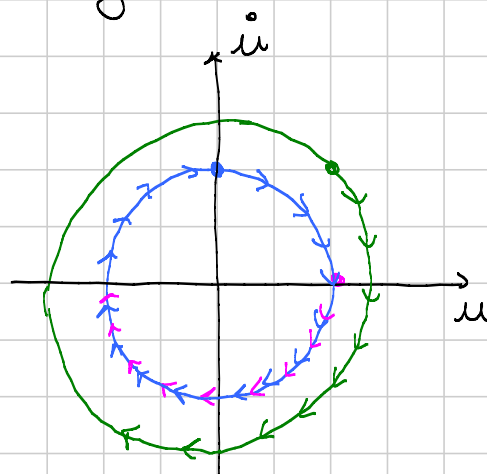


$$u(0) = 1, \dot{u}(0) = 0 \leadsto u(t) = \cos t$$



$$\leadsto (u, \dot{u}) = (\cos t, -\sin t)$$

$$u(0) = 1, \dot{u}(0) = 1 \leadsto u(t) = \sin t + \cos t$$



METODO ENERGETICO

Funziona bene per equazioni del tipo

$$\ddot{u} = f(u)$$

Esempio $\ddot{u} = -u$

Moltiplico a dx e sx per $\dot{u}$:

$$\ddot{u} \dot{u} = -u \dot{u}$$

$$\left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 \right)' = \left(-\frac{1}{2} u^2 \right)'$$

$$\left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{2} u^2 \right)' = 0 \quad \leadsto \quad \underbrace{\frac{1}{2} \dot{u}(t)^2 + \frac{1}{2} u(t)^2}_{E(t) = \text{energia}} = \text{cost}$$

$$\leadsto \boxed{\dot{u}(t)^2 + u(t)^2 = 2E(0)}$$

Le traiettorie nello spazio delle fasi stanno su una circonferenza il cui raggio dipende dalle cond. iniziali

(A fisica questa energia si chiama Hamiltoniana, ed è somma di un termine cinetico ed un termine potenziale)

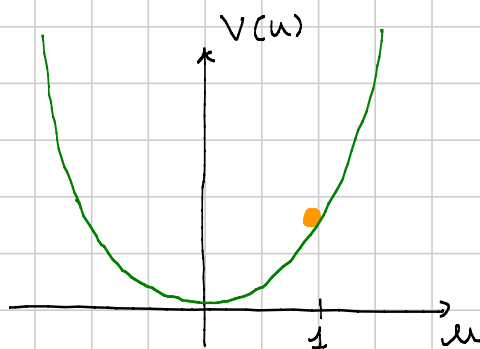
ENERGY LANDSCAPE

Energia potenziale $\frac{1}{2} u^2 = V(u)$

$$u(0) = 1$$

$$\dot{u}(0) = 0$$

Penso ad una pallina
con $u = 1$ e velocità nulla



La pallina oscilla tra le posizioni $u = \pm 1$ periodicamente
l'energia si conserva e si distribuisce tra potenziale e cinetica.

Esempio 2 $\ddot{u} = -u^3$

Niente sublinearità $\Rightarrow$ nessuna garanzia di esistenza globale (potenziale blowup)

Metodo energetico $\ddot{u} \dot{u} = -u^3 \dot{u}$

$$\left(\frac{1}{2} \dot{u}^2\right)' = \left(-\frac{1}{4} u^4\right)' \leadsto \left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{4} u^4\right)' = 0$$

$$\leadsto \underbrace{\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{4} u^4}_{E(t)} = E(0) \text{ costante}$$

$\Rightarrow u(t)$ e $\dot{u}(t)$ sono limitate (esponenti pari), quindi niente blowup $\leadsto$ esistenza globale

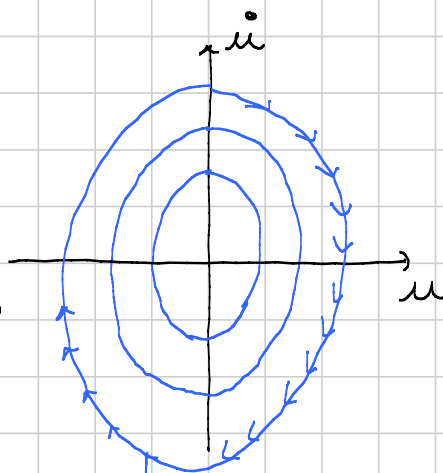
Nello spazio delle fasi le sol. vivono su curve del tipo

$$\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{4} u^4 = E(0)$$

Per determinare il verso:

$$\ddot{u} = -u^3 \leadsto \ddot{u} < 0 \text{ quando } u > 0$$

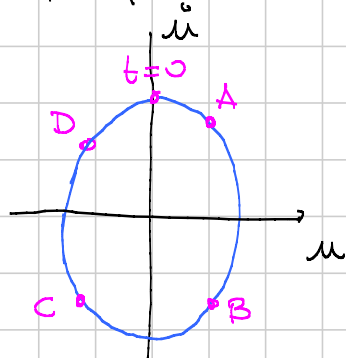
$\leadsto \dot{u}$ scende dove $u > 0$
(e sale dove $u < 0$).



Se la traiettoria ritorna al p.to di partenza, allora per forza è periodica.

Oss. Dal p.to di vista "energy landscape" è lo stesso disegno di prima, solo con $\frac{1}{4} u^4$ come potenziale.

Dimostriamo che la soluzione fa un giro in un tempo finito.

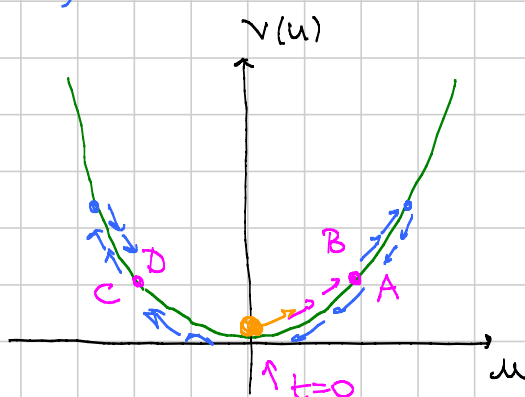
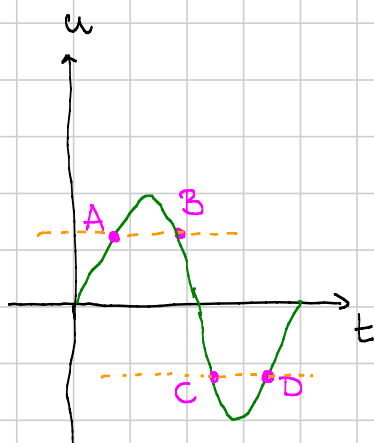


Per andare da A a B basta un tempo finito

(tra A e B abbiamo $u \geq \cos t$, quindi $\ddot{u} = -u^3 \leq -\cos^3$, quindi $\dot{u}$ in un tempo finito percorre il tratto)

Per andare da B a C basta un tempo finito

(tra B e C abbiamo $\dot{u} \leq \cos$ neg. quindi u decresce velocemente, quindi in un tempo finito percorre il tratto)



ANALISI 2

LEZIONE 118

Note Title

10/05/2018

Calcolo del periodo

Esempio $\ddot{u} = -u^3$

Energia $\leadsto \frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{4} u^4 = c$

$$\leadsto \dot{u}^2 + \frac{1}{2} u^4 = c$$

$\leadsto$ Posso ricavare $\dot{u}$ quando solo "sopra" o "sotto"

Sopra:

$$\dot{u}(t) = \sqrt{c - \frac{1}{2} u(t)^4}$$

(sotto avrei il segno -)

$\uparrow$ teoricamente posso risolverla come eq. di ordine 1.

Per ogni $t \in [t_1, t_2]$ vale la relazione di sopra, dunque

$$\frac{\dot{u}(t)}{\sqrt{c - \frac{1}{2} u(t)^4}} = 1$$

$$\forall t \in (t_1, t_2)$$

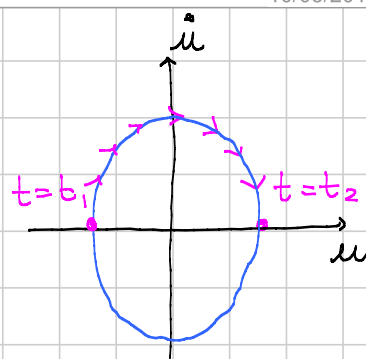
$\uparrow \quad \uparrow$
per non dividere per 0

Integro tra t_1 e t_2 :

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\dot{u}(t)}{\sqrt{c - \frac{1}{2} u(t)^4}} dt = \int_{t_1}^{t_2} 1 dt = t_2 - t_1$$

II Pongo $x = u(t) \leadsto dx = \dot{u}(t) dt$

$$\int_{u(t_1)}^{u(t_2)} \frac{1}{\sqrt{c - \frac{1}{2} x^4}} dx = \int_{-\sqrt[4]{2c}}^{\sqrt[4]{2c}} \frac{1}{\sqrt{c - \frac{1}{2} x^4}} dx$$



Da questo segue che

$$t_2 - t_1 = \int_{-\sqrt[4]{2c}}^{\sqrt[4]{2c}} \frac{1}{\sqrt{c - \frac{1}{2}x^4}} dx$$

↑
metà del periodo

L'integrale improprio
con poli in $\pm \sqrt[4]{2c}$
converge perché c'è
la radice quadrata

Vediamo come dipende da c : pongo $x = \sqrt[4]{2c} y$

$$dx = \sqrt[4]{2c} dy \quad x = \pm \sqrt[4]{2c} \Leftrightarrow y = \pm 1$$

$$\frac{1}{2} \text{ periodo} = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{c - cy^4}} \sqrt[4]{2c} dy$$

$$= \frac{\sqrt[4]{2c}}{\sqrt{c}} \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}}_{\text{Fisso}}$$

↑
 $\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{c}}$

$\leadsto$ + c diventa grande, più il periodo diventa piccolo!!

Esempio 2 $\ddot{u} = -u$ (oscillatore armonico)

Energia: $\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{2} u^2 = \text{cost} \quad \dot{u}^2 + u^2 = c$

"Sopra" $\dot{u} = \sqrt{c - u^2}$

$$\frac{1}{2} \text{ periodo} = \int_{-\sqrt{c}}^{\sqrt{c}} \frac{dx}{\sqrt{c - x^2}} = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{c - cy^2}} \sqrt{c} dy = \int_{-1}^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

↑
 $x = \sqrt{c} y$

Il periodo NON dipende da c .

Esempio 3 $\ddot{u} = -\sin u$ (Pendolo vero)

Esistenza globale $\leadsto$ NO PBM.

Energia $\ddot{u} \dot{u} = -\dot{u} \sin u \leadsto \left(\frac{1}{2} \dot{u}^2\right)' = (\cos u)'$

$$\frac{1}{2} \dot{u}^2 - \cos u = \text{cost}$$

Dovrò disegnare le curve nello spazio delle fasi

$$\dot{u} = \pm \sqrt{c + 2 \cos u}$$

Le traiettorie chiuse
estreme corrispondono
a traiettorie periodiche
 $c \in (-2, 2)$

Il periodo T è dato da

$$\frac{1}{2} T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{c + 2 \cos x}}$$

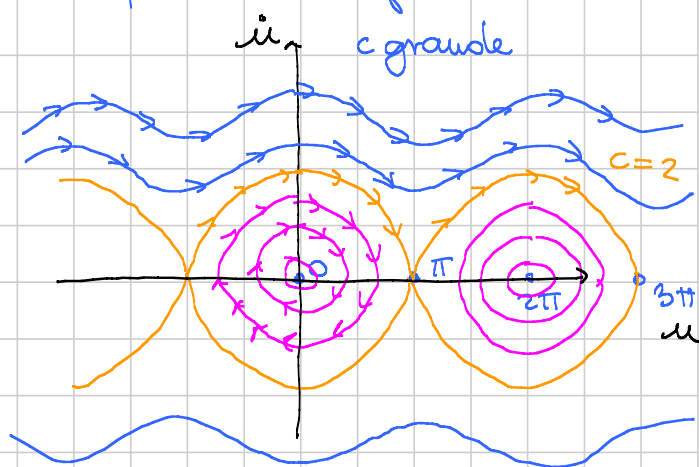
dove x_1 e x_2 sono le radici di
 $c + 2 \cos x = 0$

e si vede che l'integrale converge (esercizio)

La traiettoria con $c = 2$ corrisponde ad una soluzione
 $u(t)$ strett. crescente tale che

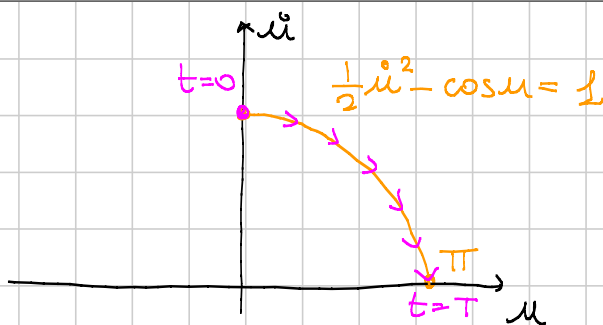
$$\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = -\pi$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \pi$$



Supponiamo di partire con
 $\begin{cases} u(0) = 0 \\ \dot{u}(0) = 2 \end{cases} \leadsto \text{quindi } c = 1$

Avendo $c = 1$ l'energia
ci dice che



$$\frac{1}{2} \dot{u}^2 - \cos u = 1 \leadsto \dot{u} = \sqrt{2 + 2 \cos u}$$

Supponiamo che la soluzione arrivi in $(\pi, 0)$ al tempo T .

In $[0, T]$ vale $\dot{u}(t) = \sqrt{2} \sqrt{1 + \cos u}$

Divido e integro e trovo

$$\int_0^T \frac{\dot{u}}{\sqrt{2} \sqrt{1 + \cos u}} = \int_0^T 1 = T$$

" $x = u(t)$ $t=0 \leadsto x=0$
 $t=T \leadsto x=\pi$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{1 + \cos x}}$$

integrale improprio in π e divergente

$\cos x$ su un intorno sx di π si comporta come

$$\cos(\pi - t) = -\cos t \sim -1 + \frac{t^2}{2} \Rightarrow \sqrt{1 + \cos(\pi - t)}$$

$$\sim \sqrt{\frac{t^2}{2}} \sim t$$

$\Rightarrow$ per arrivare in π occorre un tempo infinito.

Riassumendo

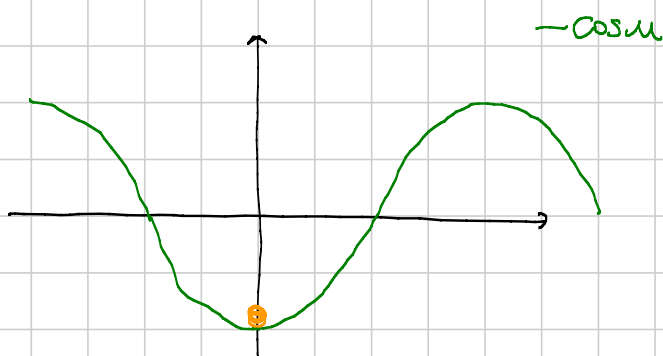
$$\begin{cases} \ddot{u} = -\sin u \\ u(0) = 0 \\ \dot{u}(0) = \alpha > 0 \quad (\text{per } \alpha < 0 \text{ è simm.}) \end{cases}$$

Abbiamo che

- per $\alpha < 2$ la soluzione $u(t)$ è periodica
- per $\alpha = 2$ vale $u(t) \rightarrow \pm\pi$ per $t \rightarrow \pm\infty$ e la soluzione è monotona
- per $\alpha > 2$ la soluzione $u(t)$ è monotona e tende a $\pm\infty$ per $t \rightarrow \pm\infty$

Energy landscape

- α piccolo: la pallina sale, si ferma, torna indietro e così via



- α grande: la pallina scollina e prosegue fino all'infinito
- α critico: valore critico della velocità che fa arrivare in cima in tempo infinito

— o — o —

Esercizio Capire come il periodo dipende dall'energia.

ANALISI 2 - LEZIONE 120

Note Title

14/05/2018

$\ddot{u} = -u^3 \leadsto$ tutte le soluzioni sono periodiche

Esercizio $\ddot{u} = u^3$

Qui non ci sono discorsi che collegano le sol. di $\ddot{u} = -u^3$ a quelle di $\ddot{u} = u^3$ (al 1° ordine ci sono $\dot{u} = u^3$, $\dot{u} = -u^3$)

Metodo energetico: $\ddot{u}\dot{u} = u^3\dot{u} \leadsto \left(\frac{1}{2}\dot{u}^2\right)' = \left(\frac{1}{4}u^4\right)'$

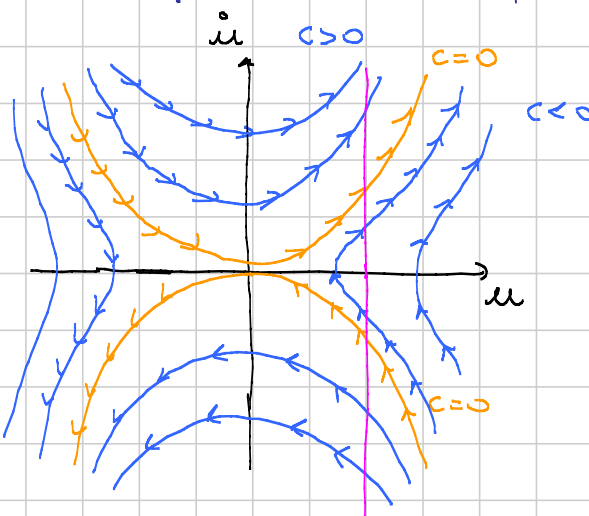
$$\leadsto \left(\frac{1}{2}\dot{u}^2 - \frac{1}{4}u^4\right)' = 0 \leadsto \boxed{\frac{1}{2}\dot{u}^2 = c + \frac{1}{4}u^4}$$

$\leadsto$ le traiettorie stanno sulle curve con questa equ. nello spazio delle fasi

Supponiamo di avere cond. iniziali

$$u(0) = 1, \quad \dot{u}(0) = \alpha$$

Il comportamento dipende da α



$$\text{Intanto } \frac{1}{2}\alpha^2 = c + \frac{1}{4} \leadsto c = \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{4}$$

$$c = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

• Per $\alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}$, dico che c'è blow up in tempo finito (nel futuro) $a \rightarrow \infty$

siamo "sotto"

$$\text{Infatti vale } \dot{u} = -\sqrt{c + \frac{1}{4}u^4} \cdot \sqrt{2}$$

e queste hanno blow up in tempo finito perché è come se fosse $\ddot{u} \sim -u^2$

- Per $\alpha > -\frac{1}{\sqrt{2}}$ le traiettorie hanno blow up in tempo finito nel futuro ($a \rightarrow \infty$)

Occorre distinguere 2 casi

- se $\alpha \geq 0$, allora $\ddot{u} \geq 0$ sempre e quindi

$$\ddot{u} = \sqrt{c + \frac{1}{4}u^4} \cdot \sqrt{2}$$

da cui la conclusione

- se $\alpha \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, basta dim. che in un tempo finito $\ddot{u}$ diventa > 0 .

Infatti sulla traiettoria abbiamo che

$$u(t) \geq \delta > 0$$

e quindi

$$\ddot{u}(t) \geq \delta^3$$

e quindi $\ddot{u}(t)$ deve diventare positiva in tempo finito.

A quel pto si riparte.

- Nel caso $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ la soluzione esiste globalmente e nel futuro
↑

$$\text{verifica } \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{u}(t) = 0$$

Basta fare il conto e viene $c=0$ da cui $\ddot{u} = -\frac{1}{\sqrt{2}}u^2$ e questa volendo si risolve esplicitamente



Oss. Tutti i discorsi si possono rendere molto più formali

Mettiamoci con $\alpha < -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Da questa otteniamo $c > 0$ e

$$\frac{1}{2} \dot{u}(t)^2 = c + \frac{1}{4} u(t)^4$$

fino a quando la soluzione esiste.

Dico che $\dot{u}(t) < 0$ fino a quando la sol. esiste. Se così non fosse, ci sarebbe per continuità un tempo t_1 tale che $\dot{u}(t_1) = 0$, ma questo non va bene con l'energia.

Una volta che $\dot{u}(t) < 0$, posso ricavare $\ddot{u} = -\sqrt{\dots}$ e diventa di ordine 1.

— o — o —

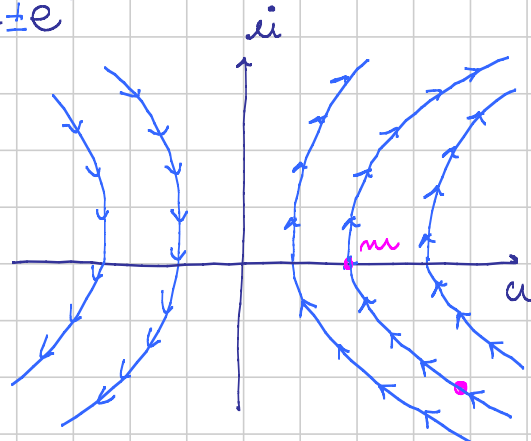
Esercizio 2 $\ddot{u} = \frac{1}{u}$ $u(0) = \alpha \neq 0$ $\dot{u}(0) = \beta$

$$\ddot{u} \dot{u} = \frac{1}{u} \dot{u} \quad \leadsto \quad \frac{1}{2} \dot{u}^2 = c + \log|u|$$

$$\leadsto \dot{u}^2 = c + 2 \log|u| \quad \leadsto \quad \log|u| = \frac{1}{2} \dot{u}^2 - c$$

$$\leadsto u = \pm e^{\frac{1}{2} \dot{u}^2 - c}$$

Sorpresa: se parto con $\alpha \neq 0$, la soluzione resta sempre ben lontana da 0, quindi niente BD !!!



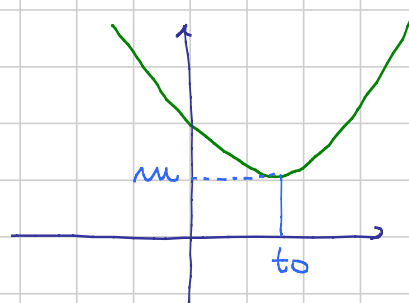
Si può escludere il BU osservando che $\frac{1}{u}$ è sublineare nelle zone $u \geq u_0 > 0$ e anche $u \leq -u_0 < 0$

Disegnare la soluzione con $u(0) = 2018$, $\dot{u}(0) = -5$

Questa soluzione è definita globalmente, convessa ($\ddot{u} > 0$) e tende a $+\infty$ per $t \rightarrow \pm\infty$.

Il valore minimo m è e^{-c} dove c dipende dai dati iniziali

$$c = \frac{25}{2} - \log 2018$$



Ad essere rigorosi dovrei dimostrare che $u(t) \geq m$ fino a quando esiste (se per assurdo ... contraddizione nell'energia).

Quanto cresce u ? Una volta diventata crescente risolve

$$\dot{u} = \sqrt{2} \sqrt{c + \log u}$$

da cui crescita piuttosto lenta (a occhio $\sim t \sqrt{\log t}$: metodo delle stime iterate)

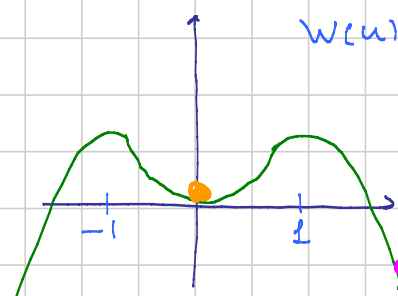
Esempio 3 (Buca di potenziale)

$$\ddot{u} = -u + u^3$$

Per u piccoli $\leadsto \ddot{u} = -u \leadsto$ oscill. armonico $\leadsto$ sol. period.
per u grandi $\leadsto \ddot{u} = u^3 \leadsto$ blow up in tempo finito.

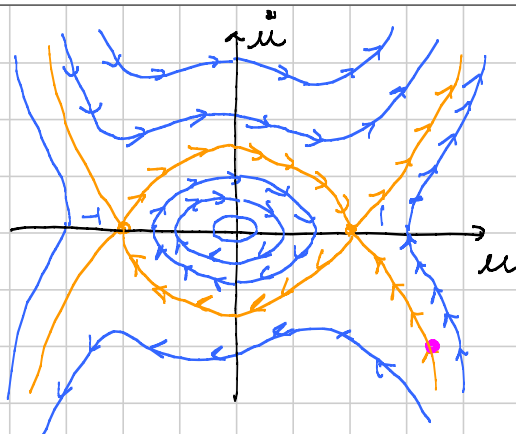
$$\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{4} u^4}_{W(u)} = \text{cost.}$$

$$u(0) = 0, \dot{u}(0) = \alpha$$



Diseguando le traiettorie troviamo la figura a lato

Esiste $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ calcolabile esplicitamente tale che



- per $|a| < \alpha_0$ le soluzioni sono periodiche (e posso anche calcolare il periodo)
- per $|a| > \alpha_0$ le soluzioni hanno BU sia nel passato, sia nel futuro, e si comportano come le sol di

$$\dot{u} = \pm \sqrt{c + \frac{1}{4}u^4 - \frac{1}{2}u^2}$$

- Per $a = \pm \alpha_0$ le soluzioni tendono a ± 1 per $t \rightarrow \pm \infty$, quindi esistono globalmente.

ANALISI 2 — LEZIONE 121

Note Title

14/05/2018

SISTEMI DI EQ. DIFF. LINEARI

$$\begin{cases} \dot{u} = 2u + v \\ \dot{v} = 2u + 3v \end{cases}$$

Già visto: sistemi di equ. di ordine qualunque si trasformano in sistemi di equ. di ordine 1 (basta aggiungere variabili) $\leadsto$ teo. esistenza e unicità

In casi semplici è possibile trasformare i sistemi in singole equ. di ordine + alto

$$\ddot{u} = 2\dot{u} + \dot{v} = 2\dot{u} + 2u + 3v = 2\dot{u} + 2u + 3\dot{u} - 6u$$

$\uparrow$ der. 1^a $\uparrow$ uso 2^a $\uparrow$ uso 1^a

$$\ddot{u} - 5\dot{u} + 4u = 0 \leadsto u(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^t$$

$\uparrow$
Analisi 1

Nota $u(t)$ ricavo $v(t)$ dalla 1^a eq.

$$\begin{aligned} v(t) &= \dot{u}(t) - 2u(t) = 4c_1 e^{4t} + c_2 e^t - 2c_1 e^{4t} - 2c_2 e^t \\ &= 2c_1 e^{4t} - c_2 e^t \end{aligned}$$

In forma vettoriale posso scrivere

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$$

Il sistema si poteva scrivere come

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \dot{\vec{U}} = A \vec{U}$$

$\uparrow$ vettore n dim. $\uparrow$ matrice $n \times n$ $\nwarrow$ vettore n dim.

Gli autovalori della matrice sono

• $\lambda = 4$ con autovettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

• $\lambda = 1$ con autovettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$... verifica...

Fatto generale Dato un sistema di n equ. lin. a coeff. costanti

$$\dot{\vec{U}} = A \vec{U}$$

se la matrice è diagonalizzabile con autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ e rispettivi autovett. lin. ind. $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$, la soluzione generale si scrive come

$$\vec{U}(t) = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n \vec{v}_n e^{\lambda_n t}$$

$\uparrow$ costanti libere dipendenti dai dati iniziali

Dim. di Analisi 1 Prendere i singoli pezzi, derivare e vedere che sono soluzioni.

Per si verifica che sono lin. indep.

Brutalmente : $\dot{u} = au \rightsquigarrow u(t) = e^{at} u_0$

$$\dot{\vec{U}} = A \vec{U} \rightsquigarrow \vec{U}(t) = e^{At} \vec{U}(0)$$

$\uparrow$ esponenziale di una matrice

Esponenziale di una matrice

Data una matrice M quadrata ($n \times n$), poniamo

$$e^M := \overset{\text{identità}}{\uparrow} I + M + \frac{1}{2} M^2 + \frac{1}{3!} M^3 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!}$$

Dim. Per avere una def., basta dimostrare che la serie converge.

L'insieme delle matrici ha una norma

$$\|M\| := \left(\sum_{i,j} M_{i,j}^2 \right)^{1/2}$$

e questa norma lo rende uno spazio completo.
Inoltre

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad (\text{esercizio su C.S.})$$

da cui $\|M^n\| \leq \|M\|^n$ e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{M^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|M\|^n}{n!} = e^{\|M\|}$$

Quindi la serie converge totalmente e quindi converge.

— o — o —

Domande: $\rightarrow$ come lo calcolo
 $\rightarrow$ proprietà

Come calcolo e^A ? Facile se posso diagonalizzare.

Supponiamo che

$$A = M^{-1} D M \quad \begin{array}{l} \text{invertibile} \\ \text{diagonale } \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \end{array}$$

Allora $A^k = M^{-1} D^k M$ e quindi lo stesso vale per le somme parziali della serie che definisce e^A .

Quindi

$$e^A = M^{-1} \cdot e^D \cdot M \quad \begin{array}{l} \text{matrice diagonale } \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \end{array}$$

Procedura:
 $\rightarrow$ diagonalizzo
 $\rightarrow$ faccio l'esponenziale della diagonale
 $\rightarrow$ torno indietro.

Quando non ho la forma diagonale, almeno ho jordan.

Proprietà Quasi nessuna ☹️

$$(1) (e^A)^t = e^{A^t} \quad (\text{trasposto commuta con le potenze})$$

$$(2) \det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$$

$$(3) e^A \cdot e^{-A} = \text{Id} \quad (\text{vera perché } A \text{ e } -A \text{ commutano})$$

$\text{FALSA } e^{A+B} \underset{\text{NO}}{=} e^A \cdot e^B$

Vera se A e B commutano

Non è vero che $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
 $= A^2 + AB + BA + B^2$

FALSA Se $A(t)$ è una matrice dipendente da t

$$\left(e^{A(t)}\right)' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{NO NO}}}{=} e^{A(t)} A'(t)$$

Prop. Se A è una matrice costante, allora

$$\left(e^{At}\right)' = A e^{At} = e^{At} \cdot A \quad (At \text{ e } A \text{ commutano})$$

Dim.
$$e^{A(t_0+R)} - e^{At_0} = e^{At_0} \cdot e^{AR} - e^{At_0}$$

$\uparrow$
 $At_0 \text{ e } AR \text{ commutano}$

$$= e^{At_0} (e^{AR} - Id)$$

Voglio dividere per R e passare al limite $R \rightarrow 0$

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{R} (e^{AR} - Id)$$

Scrivo gli sviluppi e uso i teoremi di scambio

$$\frac{1}{R} (e^{AR} - Id) = \left(\cancel{Id} + AR + \frac{A^2 R^2}{2!} + \frac{A^3 R^3}{3!} + \dots - \cancel{Id} \right) \frac{1}{R}$$

e questo tende ad A .

Verifichiamo che $e^{At} U_0$ risolve l'equazione $\dot{U} = AU$

$$U(t) = e^{At} U_0 \rightsquigarrow \dot{U}(t) = A e^{At} U_0 = A U(t)$$

Falso: $\dot{U} = A(t) U \Rightarrow U(t) = \exp\left(\int_0^t A(s) ds\right) U_0$

$\uparrow$
 NO NO

ANALISI 2

LEZIONE 122

Note Title

16/05/2018

SISTEMI LINEARI OMOGENEI

$$\dot{U} = A U$$

↑ matrice $n \times n$ di numeri

Osservazione L'origine è un p.to stazionario, cioè

$$U(t) \equiv 0$$

è una soluzione del sistema.

Problema della stabilità :

→ se punto vicino all'origine, resto SEMPRE vicino all'origine?

$\forall t \geq 0$

↑ se fosse solo per $t \in [0, T]$

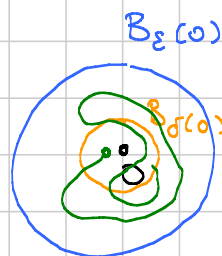
la risp. sarebbe dip. cont. dal dato iniziale

→ se punto vicino all'origine, tende all'origine per $t \rightarrow +\infty$?

Def. L'origine si dice

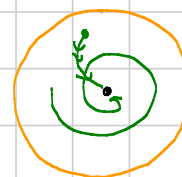
STABILE se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c.

$$\|U(0)\| \leq \delta \Rightarrow \|U(t)\| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq 0$$



ASINTOTICAMENTE STABILE se $\exists \delta > 0$ t.c.

$$\|U(0)\| \leq \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|U(t)\| = 0$$



Oss. Asintoticamente stabile $\Rightarrow$ stabile, ma non viceversa

Oss. Le stesse def. si possono dare per sistemi NON lineari, e per p.ti stazionari diversi dall'origine.

Rappresentazione nello spazio delle fasi: pensare la traiettoria $U(t)$ come curva a valori in $\mathbb{R}^n$
 $\text{---} \circ \text{---} \circ \text{---}$

Caso di sistemi lin. omogenei 2×2 a coeff. costanti

$$\begin{cases} \dot{u} = au + bv \\ \dot{v} = cu + dv \end{cases} \quad \dot{U} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_A U$$

Idea: con un cambio di variabili lineare, si può portare A in forma canonica.

Per una matrice 2×2 , ci sono 3 possibili forme canoniche

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

λ, μ reali, anche
coincidenti

①

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

autovalori
 $\alpha \pm i\beta$

②

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

λ reale

③

Caso 1 È come risolvere $\begin{cases} \dot{u} = \lambda u \\ \dot{v} = \mu v \end{cases} \quad \begin{aligned} u(t) &= u_0 e^{\lambda t} \\ v(t) &= v_0 e^{\mu t} \end{aligned}$

Come sono fatte le traiettorie?

- Se $\lambda < 0$ e $\mu < 0$, allora $u(t) \rightarrow 0$ e $v(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty \leadsto$ asintotica stabilità
- Se $\lambda > 0$ oppure $\mu > 0$, allora almeno una delle 2

tende a $\pm\infty$, a seconda del segno del coeff., dunque addio stabilità

- Se $\lambda \leq 0$ e $\mu \leq 0$, allora per lo meno c'è stabilità, ma magari non asintotica se almeno uno dei 2 è 0.

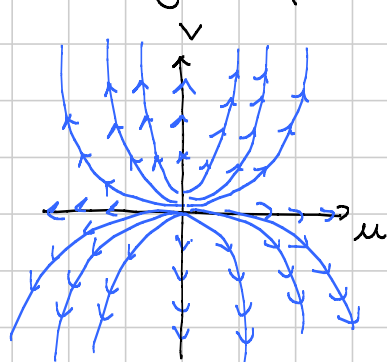
Volevamo disegnare le traiettorie

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 e^{\lambda t} \\ v(t) &= v_0 e^{\mu t} \end{aligned}$$

Osservo che (wlog assumo $u_0 > 0$ e $v_0 > 0$) vale

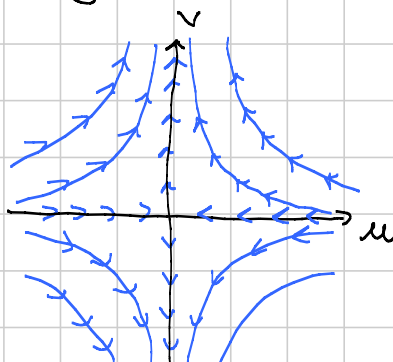
$$v(t) = \text{cost.} \cdot [u(t)]^{\frac{\mu}{\lambda}}$$

Il disegno dipende dal segno di $\frac{\mu}{\lambda}$.



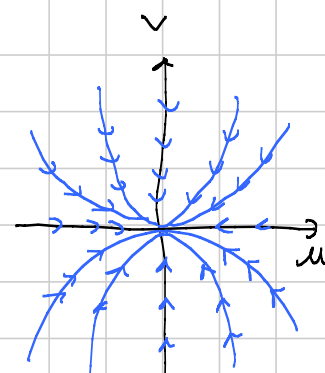
$\lambda > 0 \quad \mu > 0$

NODO INSTABILE
REPULSIVO



$\lambda < 0 \quad \mu > 0$

SELLA

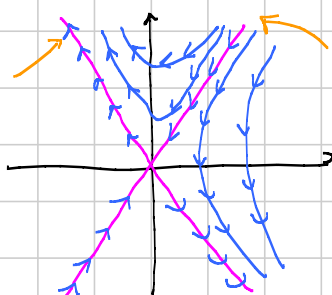


$\lambda < 0 \quad \mu < 0$

NODO STABILE
ATTRATTIVO

Nelle variabili originarie, la figura è "storta"

Direzione autovett.
con autoval.
positivo



Direzione autovettore
con autovalore neg

Caso 2 $\begin{cases} \dot{u} = \alpha u + \beta v \\ \dot{v} = -\beta u + \alpha v \end{cases}$

Potei trasformarlo in eq. di ordine 2, ma è più comodo passare in coord. polari

$$u(t) = \rho(t) \cos \theta(t)$$

$$v(t) = \rho(t) \sin \theta(t)$$

$$\dot{u} = \dot{\rho} \cos \theta - \rho \sin \theta \dot{\theta}$$

$$\dot{v} = \dot{\rho} \sin \theta + \rho \cos \theta \dot{\theta}$$

Sostituisco nell'equazione

$$\begin{cases} \dot{\rho} \cos \theta - \rho \dot{\theta} \sin \theta = \alpha \rho \cos \theta + \beta \rho \sin \theta \\ \dot{\rho} \sin \theta + \rho \dot{\theta} \cos \theta = -\beta \rho \cos \theta + \alpha \rho \sin \theta \end{cases}$$

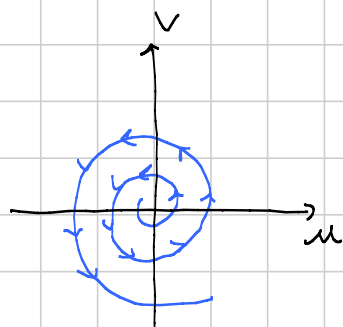
$$1^a. \cos \theta + 2^a. \sin \theta$$

$$\dot{\rho} = \alpha \rho \quad \leadsto \quad \rho(t) = \rho(0) e^{\alpha t}$$

$$1^a. (-\sin \theta) + 2^a. \cos \theta$$

$$\rho \dot{\theta} = -\beta \rho \quad \leadsto \quad \theta(t) = \theta(0) - \beta t$$

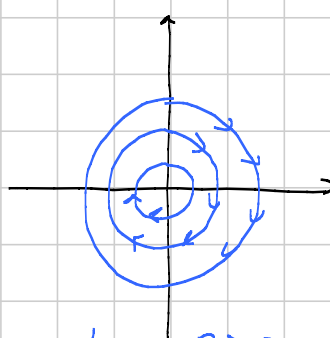
- Se $\alpha > 0$ le soluzioni spiraleggiano uscente
- Se $\alpha < 0$ " " " entrante
- Se $\alpha = 0$ le traiettorie sono circonferenze



$$\alpha > 0, \beta < 0$$

FUOCO REPULSIVO

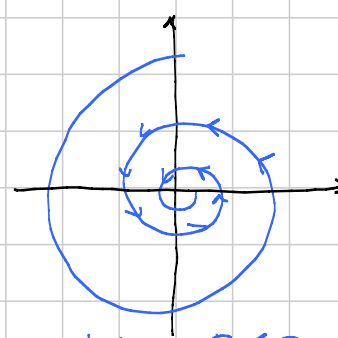
NO STABILE



$$\alpha = 0, \beta > 0$$

CENTRO

STABILE, NO A.S.



$$\alpha < 0, \beta < 0$$

FUOCO ATTRATTIVO

ASINT. STABILE

Caso 3 $\dot{u} = \lambda u + v$
 $\dot{v} = \lambda v$

$$\leadsto v(t) = v_0 e^{\lambda t}$$

$$\leadsto \dot{u} = \lambda u + v_0 e^{\lambda t} \leadsto u(t) = u_0 e^{\lambda t} + a t e^{\lambda t}$$

↑
 si determina
 esplicitamente in
 funzione di v_0

• Se $\lambda > 0$ $\leadsto$ le soluzioni tendono a $\pm \infty$ a seconda dei coeff. $\leadsto$ addio stabilità

• Se $\lambda < 0$ $\leadsto$ le soluzioni tendono a 0
 $\leadsto$ asintotica stabilità

• Se $\lambda = 0$ $\leadsto$ $\dot{u} = v$
 $\dot{v} = 0 \leadsto v(t) \equiv v_0 \quad u(t) = u_0 + v_0 t$

$\leadsto u(t) \rightarrow \pm \infty \leadsto$ addio stabilità

Il disegno è simile a quello del fuoco.

Teorema Nel caso 2×2 l'origine è

• asintoticamente stabile $\Leftrightarrow$ tutti gli autovalori hanno parte reale < 0

• stabile $\Leftrightarrow$ tutti gli autovalori hanno parte reale ≤ 0 ,
 ma se 0 è autovalore deve avere
 mult. alg. = mult. geom
 (non ci deve essere il blocco di jordan da 2)

— 0 — 0 —

ANALISI 2 — LEZIONE 123

Titolo nota

16/05/2018

Sistemi lineari omogenei in dimensione qualunque

$$\dot{U} = AU$$

Sostanzialmente non cambia nulla: si passa in forma di Jordan, e lì si risolve.

Potenziali complicazioni tecniche:

- blocchi di Jordan di dimensione alta (questi producono soluzioni con $te^{\lambda t}$, $t^2 e^{\lambda t}$, ...)
- blocchi di Jordan corrispondenti a radici complesse coniugate (con un po' di pazienza si trattano)

Teorema (analogo alla dim. 2) L'origine è

- asint. stabile $\Leftrightarrow$ tutti gli autovalori hanno parte reale < 0
- stabile $\Leftrightarrow$ tutti gli autovalori hanno parte reale ≤ 0 e quelli che ce l'hanno $= 0$ hanno blocchi di Jordan "senza gli 1".

Stabilità e metodo energetico

Esempio $\begin{cases} \dot{u} = -\lambda u \\ \dot{v} = -\mu v \end{cases}$ con $\lambda > 0$ e $\mu > 0$

Pongo $E(t) := u^2 + v^2$. Allora $E'(t) = 2u\dot{u} + 2v\dot{v}$
 $= -2\lambda u^2 - 2\mu v^2$
 $(*) \leq -2 \min\{\lambda, \mu\} (u^2 + v^2)$
 $= -2 \min\{\lambda, \mu\} E(t)$

Abbiamo ottenuto che $E'(t) \leq -2m E(t)$, da cui

$$E(t) \leq E(0) e^{-2mt}$$

Questo dimostra che $E(t) \rightarrow 0$ esponenzialmente

Il passaggio (*) è equivalente a dire che

$$2\lambda u^2 + 2\mu v^2 \geq 2 \min\{\lambda, \mu\} (u^2 + v^2)$$

Esempio 2 $\begin{cases} \dot{u} = -\alpha u + \beta v \\ \dot{v} = -\beta u - \alpha v \end{cases} \quad \text{con } \alpha > 0$

$$E(t) = u^2 + v^2 ;$$

$$\begin{aligned} E'(t) &= 2u\dot{u} + 2v\dot{v} = 2u(-\alpha u + \beta v) + 2v(-\beta u - \alpha v) \\ &= -2\alpha u^2 - 2\alpha v^2 \\ &= -2\alpha E(t) \end{aligned}$$

$$E(t) = E(0) \cdot e^{-2\alpha t}$$

Se $\alpha > 0$ l'energia tende a 0 esponenzialmente

Se $\alpha < 0$ " " " $+\infty$ "

Esempio 3 $\begin{cases} \dot{u} = -\lambda u + v \\ \dot{v} = -\lambda v \end{cases} \quad \lambda > 0$

Enistica: cerco una energia del tipo

$$E(t) = \alpha u^2 + v^2$$

↑ parametro da scegliere

Derivando: $E'(t) = 2au\dot{u} + 2v\dot{v}$
 $= 2a u(-\lambda u + v) + 2v(-\lambda v)$
 $= -2\lambda a u^2 + 2a u v - 2\lambda v^2$
 $\leq -\varepsilon E(t)$

spero $\nearrow$

Se ci riesce, allora $E(t) \leq E(0) e^{-\varepsilon t}$ e questo basta per avere che $E(t) \rightarrow 0$ esponenzialmente.

Speranza ok $\Leftrightarrow 2\lambda a u^2 - 2a u v + 2\lambda v^2 \geq \varepsilon E(t)$
 $= \varepsilon a u^2 + \varepsilon v^2$

$$\Leftrightarrow (2\lambda a - \varepsilon a) u^2 - 2a u v + (2\lambda - \varepsilon) v^2 \geq 0$$

Quindi tutto va bene se la forma quadratica è definita positiva.

$$\begin{pmatrix} 2\lambda a - \varepsilon a & -a \\ -a & 2\lambda - \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$a(2\lambda - \varepsilon) > 0 \quad \leadsto a > 0, \varepsilon \text{ piccolo}$$

$$2\lambda - \varepsilon > 0 \quad \leadsto \varepsilon \text{ piccolo}$$

$$a(2\lambda - \varepsilon)^2 - a^2 > 0 \quad \leadsto (2\lambda - \varepsilon)^2 > a$$

Una possibile scelta è $\varepsilon = \lambda$ e $a = \frac{\lambda^2}{2}$

Rigoroso: considero $E(t) := \frac{\lambda^2}{2} u^2 + v^2$. Verifico che

$$E'(t) \leq -\lambda E(t)$$

Deduco che $E(t) \leq E(0) e^{-\lambda t}$, quindi $E(t) \rightarrow 0$,
 quindi $u(t) \rightarrow 0$ e $v(t) \rightarrow 0$.

Dimostrazione in generale che, quando A ha tutti autovalori negativi ed è diagonalizzabile, allora l'origine è asintoticamente stabile

Ipotesi: $M A M^{-1} = D$ $\uparrow$ matrice diagonale con autovalori negativi $-\lambda_1, \dots, -\lambda_n$

$$E(t) := \|M U(t)\|^2$$

$$E'(t) = 2 \langle M U(t), M \dot{U}(t) \rangle$$

$$= 2 \langle M U(t), M A U(t) \rangle \quad A = M^{-1} D M$$

$$= 2 \langle M U(t), D M U(t) \rangle$$

$$(*) \leq -2m \|M U(t)\|^2 \quad \text{dove } m = \min\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$

$$= -2m E(t)$$

$$\leadsto E(t) \leq E(0) e^{-2mt} \quad \leadsto E(t) \rightarrow 0 \text{ espon.}$$

$$\leadsto M U(t) \rightarrow 0 \quad \leadsto U(t) \rightarrow 0$$

$\uparrow$
applico M^{-1} a dx e sx

(*)

Se D è la matrice diagonale con $-\lambda_1, \dots, -\lambda_n$ sulla diag. allora

$$\langle V, D V \rangle \leq -m \|V\|^2 \quad \text{per ogni vettore } V$$

$$-\lambda_1 v_1^2 - \dots - \lambda_n v_n^2 \leq -m (v_1^2 + \dots + v_n^2)$$

Cambiando i segni è ovvio.

Se la matrice A ha tutti autov. con parte reale neg., ma senza blocchi di Jordan con gli 1, la dim. è la stessa. Occorre solo verificare come agisce sulla forma il blocco di Jordan reale $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, cosa vista nell'esempio 2.

Se ci sono i blocchi con gli uno, le cose si complicano, e bisogna pesare diversamente le varie componenti come nell'esempio 3.

— o — o —

Esempio
$$\begin{cases} \dot{u} = \arctan u - \sin v \\ \dot{v} = -\sin 2(u+3v) + \sin(5v) \end{cases}$$

L'origine è un p.to stazionario, cioè $u(t) \equiv 0 \quad v(t) \equiv 0$ è soluzione.

Cosa succede se parto vicino all'origine.

Sviluppo tutto

$$\dot{u} = u - v$$

$$\dot{v} = -u - 3v + 5v = -u + 2v$$

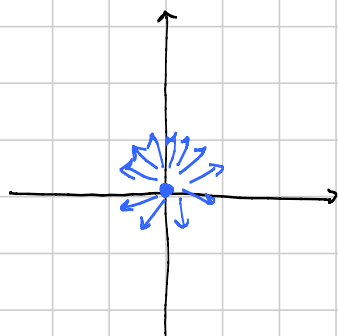
$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{tr } A &= 3 & \text{Autovalori } ++ \\ \det A &= 1 \end{aligned}$$

"Quiccoli" è come fosse

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \lambda u & \text{con } \lambda, \mu > 0 \\ \dot{v} &= \mu v \end{aligned}$$

$\leadsto$ fuoco repulsivo



Chi autorizza questo: il teorema di linearizzazione !!

ANALISI 2 — LEZIONE 124

Titolo nota

17/05/2018

Teorema misterioso (di linearizzazione)Consideriamo un sistema di n eq. diff. in n incognite

$$\dot{U} = F(U) \quad (\text{autonomo})$$

Supponiamo U_0 p.to stationario, cioè $F(U_0) = 0$ (quindi $U(t) \equiv U_0$ è sol. del sistema)

Supponiamo che $JF(U_0)$ (matrice jacobiana) abbia tutti autovalori con parte reale $\neq 0$.

Allora il comportamento delle soluzioni vicino ad U_0 è lo stesso delle soluzioni del sistema linearizzato.

Caso speciale Supponiamo che $JF(U_0)$ sia diagonalizzabile con tutti autovalori negativi

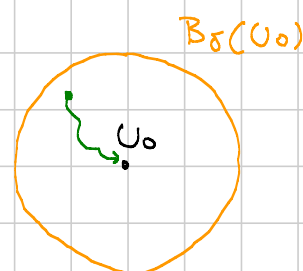
Allora U_0 è asintoticamente stabile, cioè esiste $\delta > 0$ t.c. tutte le soluzioni con dato iniziale $U(0) \in B_\delta(U_0)$ esistono globalmente nel futuro e tendono ad U_0 per $t \rightarrow +\infty$ (e lo fanno pure esponenzialmente).

Demo. Supponiamo che $U_0 = 0$ (altrimenti basta traslare). Poniamo $A = JF(U_0)$. Possiamo riscrivere il sistema nella forma

$$\dot{U} = AU + R(U)$$

↑ dove $\|R(U)\| = o(\|U\|)$ per $U \rightarrow 0$

Siano $-\lambda_1, \dots, -\lambda_n$ gli autovalori di A e sia $m := \min\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} > 0$ (per ipotesi)



Scriviamo $A = M^{-1} D M$ ← cambio di base (invertibile)
 $\uparrow$ diagonale

Consideriamo $E(t) := \|MU(t)\|^2$. Allora

$$E'(t) = 2 \langle MU(t), M\dot{U}(t) \rangle$$

$$= 2 \langle MU(t), M(AU(t) + RU(t)) \rangle$$

$$= 2 \langle MU(t), DMU(t) \rangle + 2 \langle MU(t), MRU(t) \rangle$$

$$\leq -2m \|MU(t)\|^2 + m \|MU(t)\|^2$$

come nel caso lineare $\nearrow$ $\uparrow$ se $U(t)$ è abbastanza piccolo

Nel termine non lineare abbiamo usato che

$$2 \langle MU(t), MR(U(t)) \rangle \leq 2 \|MU(t)\| \cdot \|MRU(t)\|$$

$$\leq 2 \|MU(t)\| \cdot \|M\| \cdot \|R(U(t))\|$$

$$\leq 2 \|MU(t)\| \cdot \|M\| \cdot \varepsilon \|U(t)\|$$

$\uparrow$ se $U(t)$ è piccolo

$$\leq K \cdot \varepsilon \|MU(t)\|^2$$

$\checkmark$ $\uparrow$ costante

ho usato che $\|U(t)\| \leq C \|MU(t)\|$

cosa che posso dire in 2 modi:

→ Ovviamente: $\|U(t)\| = \|M^{-1}MU(t)\| \leq \|M^{-1}\| \cdot \|MU(t)\|$

→ Furbescamente, osservando che $\|MU\|$ è una norma 😊
 (senza che M è invertibile)

Non mi resta che scegliere ε in modo che $k\varepsilon \leq m$ e prendere il δ di conseguenza.

Conclusione: $E'(t) \leq -m E(t)$,

quindi $E(t) = \|MU(t)\|^2 \rightarrow 0$ esponenzialmente, da cui $\|U(t)\| \rightarrow 0$ esponenzialmente (come equivalenti).

Oss. La dimostrazione mostra anche che le soluzioni che partono in B_δ sono globali.

Infatti fino a quando esistono restano in B_δ perché la loro norma diminuisce, e questo esclude B_U e B_D .

Oss. La dim si ricicla nel caso di autovalori tutti positivi (ora la distanza da U_0 può solo aumentare, quindi nessuna soluzione non costante tende ad U_0).

Si ricicla anche facilmente nel caso di blocchi di Jordan da 1 oppure da 2 corrispondenti a autov. complessi coniugati con parte reale negativa

(il conto $\langle MU, DMU \rangle \leq -m \|U\|^2$ vale anche per queste matrici)

Per adattarla a blocchi qualunque (sempre con parti reali neg.) occorre cambiare i pesi sulle varie componenti.

Morale: il caso "hard" del teo. di linearizzazione è quando c'è una sella (un po' di parti reali + e un po' -).

Esempio 1 $\ddot{u} = -\sin u$

vediamola come sistema $\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -\sin u \end{cases}$

Il p.to $(0,0)$ è stazionario. Linearizzando trovo

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v \\ \dot{v} &= -u \end{aligned} \rightsquigarrow \text{matrice } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{autovalori } \pm i$$

$\rightsquigarrow$ il teo. di linearizzazione NON si applica, né potremmo sperarlo, perché sappiamo che le traiettorie vicine all'origine sono periodiche

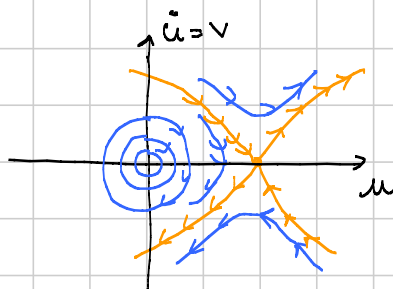
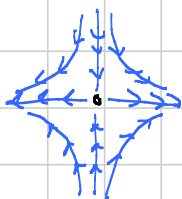


Anche il p.to $(\pi, 0)$ è stazionario. Il linearizzato diventa

$$\begin{aligned} u &= \pi + R & \dot{u} &= v & \dot{R} &= k \\ v &= 0 + k & \dot{v} &= -\sin u & \dot{k} &= -\sin(\pi + R) = \sin R \sim R \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \text{matrice } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{autovalori } \pm 1$$

$\rightsquigarrow$ teo. Lin. si applica e dice che $(\pi, 0)$ è una sella



Esempio 2 (Pendolo con attrito)

$$\ddot{u} + \dot{u} = -\sin u$$

↑
si oppone al moto

Passando al sistema

$$\begin{aligned}\dot{u} &= v \\ \dot{v} &= -v - \sin u\end{aligned}$$

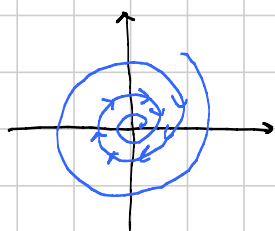
L'origine $(0,0)$ è ancora stationaria e il linearizzato è

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -v - u \end{cases} \quad \text{matrice} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\leadsto \text{pol. car.} \quad x^2 + x + 1 = 0 \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$\leadsto$ autov. compl. coniugati con parte reale negativa

$\leadsto$ teo. di lin. si applica e le traiettorie tendono esponenzialmente all'origine (spiraleggiando)



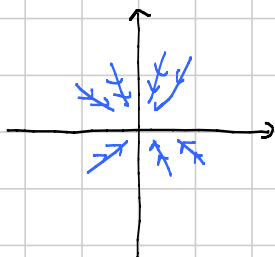
Se esagero con il coeff $\ddot{u} + 10 \arctan u \dot{u} = -\sin u$

$$\begin{aligned}\dot{u} &= v \\ \dot{v} &= -10 \arctan v - \sin u \approx -10v - u\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -10 \end{pmatrix} \leadsto x^2 + 10x + 1 \leadsto \text{autovalori reali negativi}$$

→ teo. Lin. si applica e otteniamo un nodo stabile

(senza spiraleggiamento)



↓
il pendolo "non torna
mai su"

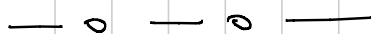
Oss. In questo caso abbiamo dim. che le soluzioni che partono vicino a $(0,0)$ tendono all'origine. Quanto vicine purtroppo non lo sappiamo con questo metodo.

Esistono sol. che non tendono all'origine?

Certo! Quelle stazionarie $(k\pi, 0)$.

Ne esistono anche di non costanti che tendono a $(\pi, 0)$.

Basta dim. che il linearizzato in $(\pi, 0)$ continua a produrre una sella



ANALISI 2 -

LEZIONE 125

Note Title

17/05/2018

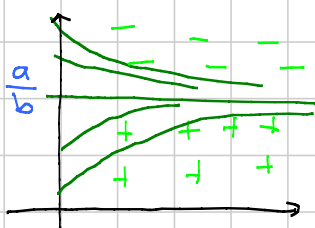
Modelli matematici

Esempio -1 Crescita esponenziale $\dot{u} = au$ $a > 0$
 $\uparrow$ tasso di riproduzione
 $u(t) = u_0 e^{at}$

Esempio 0 (Equazione Logistica)

$$\dot{u} = au - bu^2 = u(a - bu) \quad a > 0 \quad b > 0$$

$\uparrow$ autolimitazione
 (quanto i maiali si danno fastidio)



Esempio 1 Epidemia SIS (sani - infetti - sani)

→ si attacca
 → si guarisce } rappresentare

$$\dot{M} = -aM + bMS$$

$\uparrow$ guariscono $\rightarrow$ hanno preso la malattia

$$\dot{S} = aM - bMS \rightarrow \text{obbligatorio se voglio } M+S = \text{Tot costante}$$

$$S = \text{Tot} - M \leadsto \dot{M} = -aM + bM(\text{Tot} - M) \\ = (-a + b\text{Tot})M - bM^2$$

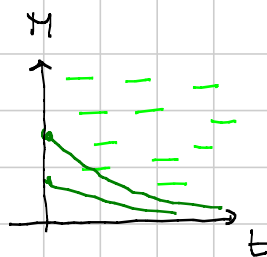
Il RHS ha radici $M=0$ e $M = \frac{b\text{Tot} - a}{b} < \text{Tot}$

Ci sono 2 casi

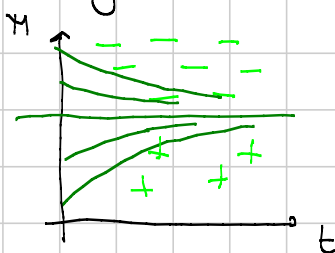
$$\textcircled{1} \quad \frac{b \text{Tot} - a}{b} \leq 0 \quad \rightsquigarrow$$

Se c'è poca massa critica

(cioè Tot piccolo) tutti definitivamente guariscono



$$\textcircled{2} \quad \frac{b \text{Tot} - a}{b} > 0 \quad \rightsquigarrow$$



Esempio 2 Epidemia SIR (sani - infetti - up)

→ si attacca

$$\dot{M} = -aM + bMS$$

→ non si guarisce ☹️

$$\dot{S} = -bMS$$

Sopravvive qualcuno? Metodo energetico: cerco qualcosa che si conservi lungo l'evoluzione

Cerco una funzione $E(M, S)$ t.c. $E(M, S) = \text{costante}$

$$[E(M, S)]' = E_M \dot{M} + E_S \dot{S} = E_M (-aM + bMS) - E_S bMS \stackrel{?}{=} 0$$

$$\text{Divido per } MS: \quad E_M \left(-\frac{a}{S} + b \right) - E_S b \stackrel{?}{=} 0$$

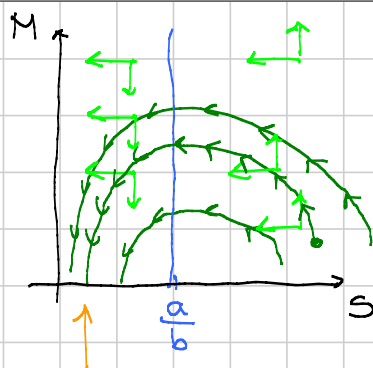
$\uparrow$ E_S $\uparrow$ E_M

Basta prendere $E(M, S) := -a \log S + bS + bM$

Bella copia: osservo che $E(M, S)$ è costante lungo le traiettorie (non serve nemmeno dividere)

Questo dice che S non può mai annullarsi, e anzi deve rimanere ben lontano da 0!!! (altrimenti $E(M, S)$ diventa troppo grande)

Traiettorie



$$\begin{aligned}\dot{M} &= M(-a + bS) \\ \dot{S} &= -bMS\end{aligned}$$

Brutalata (giustificabile)

$$\frac{dM}{dt} = M(-a + bS)$$

Divido le 2 equazioni 😊

$$\frac{dS}{dt} = -bMS$$

$$\frac{dM}{dS} = \frac{M(-a + bS)}{-bMS} = \frac{a}{b} \frac{1}{S} - 1$$

$$\Rightarrow M(S) = \frac{a}{b} \log S - S + \text{cost}$$

→ stesso risultato ottenuto sopra!!!

Oss. La brutalata si giustifica ricavando la funzione di S (posso perché...) e sostituendo in M.

Esempio 3 (VOLTERRA - LOTKA) (Preda predatore)

$$\dot{u} = u(a - bv)$$

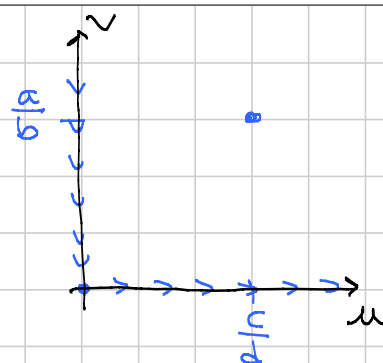
$$\dot{v} = v(-c + du)$$

 u = preda = conigli v = predatori = volpi

I conigli da soli crescono esponenzialmente
Le volpi da sole decadono

L'origine è una sella
(linearizzare per credere)

Se u_0 e v_0 sono positive,
restano tali (le traiettorie non
si incrociano)



C'è un altro pto stazionario $(\frac{a}{b}, \frac{c}{d})$.

Linearizzando (farlo...) vengono autovalori immaginari
puri $\leadsto$ BOK.

Metodo energetico: cerco $E(u, v)$ che sia costante sulle
traiettorie (integrale primo per i fisici)

$$\begin{aligned}[E(u, v)]' &= E_u \dot{u} + E_v \dot{v} \\ &= E_u u(a - bv) + E_v (-c + du)v \\ &= uv \left[\underbrace{E_u \left(\frac{a}{v} - b \right)}_{E_v} - \underbrace{E_v \left(\frac{c}{u} - d \right)}_{E_u} \right]\end{aligned}$$

Scelgo ora $E(u, v) := a \log v + c \log u - bv - du$
e osservo che

- si tratta di una funzione definita per $u > 0$ e $v > 0$ e
concava in questa zona

$$HE = \begin{pmatrix} -\frac{c}{u^2} & 0 \\ 0 & -\frac{a}{v^2} \end{pmatrix} \leadsto \text{definita negativa}$$

- quando $(u, v) \rightarrow$ assi abbiamo $E(u, v) \rightarrow -\infty$
- $E(u, v)$ ha max per $(u, v) =$ pto stazionario

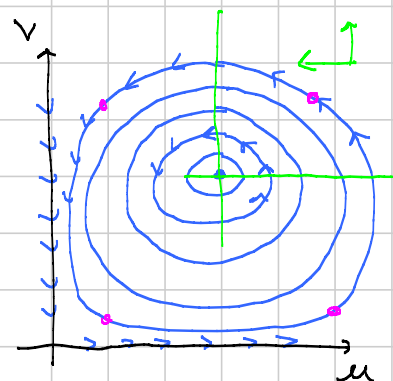
Inoltre $E(u(t), v(t)) = \text{costante}$

Come sono fatte le linee di livello di E ?

Conclusione:

→ nessuno si estingue

→ tutte le soluzioni sono periodiche
(occorrerebbe dimostrare che ogni
curva viene percorsa in tempo finito,
cosa che si può fare dividendo in 4 tratti)



— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 126

Note Title

17/05/2018

Preda - predatore con autolimitazione

$$\dot{u} = u(a - bu - \varepsilon u)$$

conigli

$$\dot{v} = v(-c + du - \delta v)$$

volpi

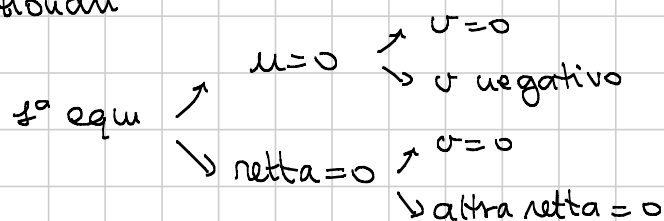
classico

autolimitazione

I conigli da soli avrebbero equ. logistica.

Le volpi da sole si estinguono ancora peggio.

Oltre all'origine ci sono altri p.ti stazionari



Sia (u_0, v_0) la soluzione del sistema delle due rette.

Linearizzando (provare per credere) vengono 2 autovalori negativi $\leadsto (u_0, v_0)$ è asintoticamente stabile.

Metodo energetico: uso

$$E(u, v) := d(u - u_0 \log u) + b(v - v_0 \log v)$$

Proprietà: $\rightarrow$ è convessa nel 1° quadrante

$\rightarrow$ tende a $+\infty$ sui semiasse

$\rightarrow$ ha unico p.to di min. in

$$1 - \frac{u_0}{u} = 0$$

$$1 - \frac{v_0}{v} = 0$$

$$\leadsto (u_0, v_0)$$

Calcolo

$$[E(u, v)]' = E_u \dot{u} + E_v \dot{v}$$

$$= d \left(1 - \frac{u_0}{u}\right) u (a - bv - \varepsilon u) + b \left(1 - \frac{v_0}{v}\right) v (-c + du - \delta v)$$

$$= d (u - u_0) (\cancel{a} - b\cancel{v} - b\cancel{v_0} + b\cancel{v_0} - \varepsilon u - \cancel{\varepsilon u_0} + \varepsilon u_0) + b (v - v_0) (\cancel{-c} + d\cancel{u} + d\cancel{u_0} - d\cancel{u_0} - \delta v - \delta\cancel{v_0} + \delta\cancel{v_0})$$

$$= -db (u - u_0) (v - v_0) - \varepsilon d (u - u_0)^2 + bd (v - v_0) (u - u_0) - \delta b (v - v_0)^2$$

$$= -\varepsilon d (u - u_0)^2 - \delta b (v - v_0)^2 \leq 0$$

Abbiamo dim. che $E(u(t), v(t)) \searrow$

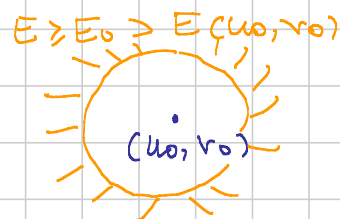
Questo dice per lo meno che $E(u, v) \rightarrow E_0$.

Se dimostro che $E_0 = E(u_0, v_0)$, ho dim. che tutte le soluzioni non nulle tendono a (u_0, v_0) .

Supponiamo per assurdo che $E_0 > E(u_0, v_0)$. Allora (u, v) si mantiene lontano da (u_0, v_0) per ogni $t \geq 0$

Ma allora

$$[E(u, v)]' \leq -m \quad \forall t \geq 0$$



per una opportuna costante $m > 0$. Questo dice che $E \rightarrow -\infty$, il che è assurdo perché è limitata dal basso.

Idea da conservare: per mostrare che $(u(t), v(t)) \rightarrow (u_0, v_0)$ mi invento una funzione $E(u, v)$ con unico min in (u_0, v_0) e faccio vedere che $E(u(t), v(t)) \rightarrow E(u_0, v_0)$.

Due specie in competizione

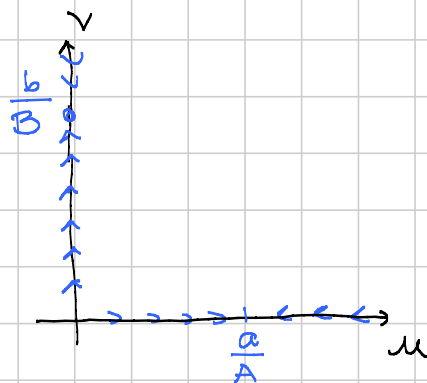
$$\dot{u} = u(a - Au - \alpha v)$$

$$\dot{v} = v(b - Bv - \beta u)$$

Ciascuna specie, da sola, risolve l'eq. Logistica.

I termini di interazione dicono che sono in competizione.

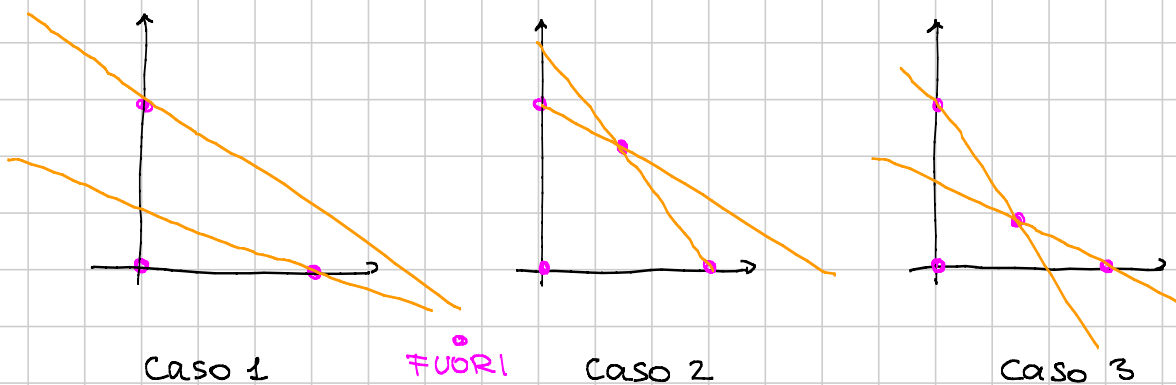
Fatto 1 Se (u_0, v_0) sono positivi, allora le soluz. restano positive nel futuro fino a quando esistono (scatto di orbite o osservare che le equ. sono del tipo $\dot{u} = u \cdot f(t)$ e per questa c'è una formula)



Fatto 2 Se (u_0, v_0) sono positivi, allora c'è esistenza globale nel futuro.

Conoscendo il segno sappiamo che $\dot{u} \leq au$, $\dot{v} \leq bv$
 $\Rightarrow$ No blow up.

Fatto 3 I p.ti stazionari sono 4, di cui 3 già trovati, ed il quarto (u_0, v_0) che viene dal sistema fra le 2 rette



Caso 1

Disegnando le
traiettorie

→ u si estingue
→ resta solo v

Dalla zona ① si entra per
forza nella ②.

Dalla zona ③ posso rimanere o andare nella ②

→ Se resto nella ③, per monotonia $(u(t), v(t)) \rightarrow (u_\infty, v_\infty)$
ma allora $(\dot{u}, \dot{v}) \rightarrow \text{RHS}(u_\infty, v_\infty)$, ma per teo.
asintotico deve essere un pto stazionario e ce n'è
solo uno nella ③.

Quindi ci siamo ridotti alle soluzioni che almeno una
volta nella vita toccano la zona ②.

Dico che la zona ② è invariante: se lo faccio, allora
per lo stesso motivo di sopra le sol. vanno dove devono.

La zona ② è definita da

$$\underbrace{a - Au - \alpha v}_{E} \leq 0$$

$$b - Bv - \beta u \geq 0$$

Cosa risolve $E(u, v)$?

$$\begin{aligned} [E(u, v)]' &= -A\dot{u} - \alpha\dot{v} \\ &= \underbrace{-Au(a - Au - \alpha v)}_{\downarrow} - \underbrace{\alpha v(b - Bv - \beta u)}_{\leftarrow} \\ &= g(t)E - \gamma(t) \quad \text{dove } \gamma(t) \geq 0 \end{aligned}$$

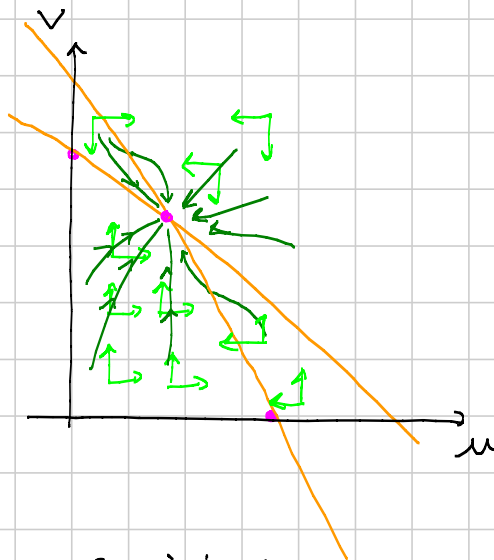
Conseguenza: $E(u(t), v(t))$ risolve

$$E' = g(t)E - \gamma(t)$$

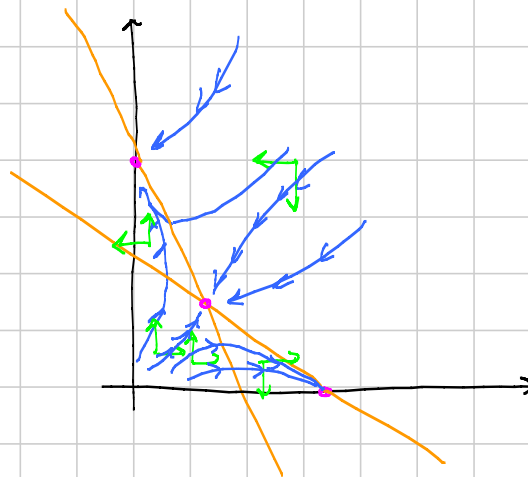
$E \equiv 0$ è una soprasoluzione, quindi non appena $E(t_0) \leq 0$, allora per forza $E(t) \leq 0$ per ogni $t \geq t_0$.

In modo analogo si tratta la restante condizione

I casi 2 e 3 si trattano analogamente



Coesistenza



Estinzione variabile con
sella in mezzo

ANALISI 2 - LEZIONE 127 (-3)

Note Title

17/05/2018

INTEGRALI DI FRESNEL

$$\underbrace{\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx}_C = \underbrace{\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx}_S = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

Considero le forme diff.

$$\omega_1 = e^{-x^2+y^2} \cos(2xy) dx + e^{-x^2+y^2} \sin(2xy) dy$$

$$\omega_2 = e^{-x^2+y^2} \sin(2xy) dx - e^{-x^2+y^2} \cos(2xy) dy$$

Fatto 1 ω_1 e ω_2 sono esatte. Verifica per ω_1

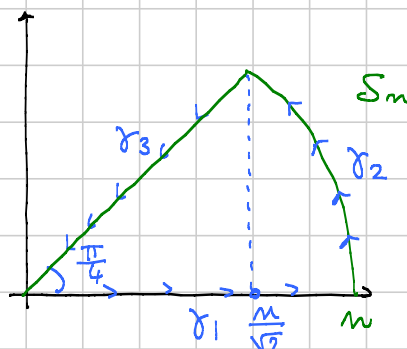
$$+2y e^{-x^2+y^2} \cos(\dots) - e^{-x^2+y^2} 2x \sin(\dots) \quad \text{prima comp } \partial_y$$

$$-2x e^{-x^2+y^2} \sin(\dots) + e^{-x^2+y^2} 2y \cos(\dots) \quad \text{seconda comp } \partial_x$$

Conto analogo per ω_2 (N.B. chiusa $\Rightarrow$ esatta perché siamo su $\mathbb{R}^2$ sempl. connesso)

Integro le 2 forme sul bordo di S_m orientato antiorario

$$0 = \int_{\partial S_m} \omega_1 = \int_{\partial S_m} \omega_2$$



Calcoliamo gli integrali delle 2 forme sui 3 pezzi

Restano da studiare gli integrali su γ_2 .

$$\gamma_2(\theta) = (n \cos \theta, n \sin \theta) \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} \omega_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-n^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)} \cos(n\theta a) (-n \sin \theta) d\theta \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-n^2(\overbrace{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}^{\cos(2\theta)})} \sin(n\theta a) (n \cos \theta) d\theta \end{aligned}$$

Restano due integrali del tipo

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-n^2 \cos(2\theta)} \cdot n \cdot (\text{funzione trigonometrica}) d\theta$$

Alla fine basta dimostrare che

$$n \int_0^{\pi/4} e^{-n^2 \cos(2\theta)} d\theta \rightarrow 0$$

o equiv. $n \int_0^{\pi/2} e^{-n^2 \cos t} dt \rightarrow 0$

o equiv. $n \int_0^{\pi/2} e^{-n^2 \sin t} dt \rightarrow 0$
 $\uparrow$ crea pbm. quando $t \sim 0$

Bisogna analizzarsi separatamente bene le zone:

$$\begin{aligned} n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dots &= n \int_0^{\frac{1}{n\sqrt{n}}} \underbrace{e^{-n^2 \sin t}}_{\leq 1} dt + n \int_{\frac{1}{n\sqrt{n}}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-n^2 \sin t} dt \\ &\underbrace{n \cdot \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0}_{\substack{\uparrow \text{zona cut} \\ \text{--- o --- o ---}}} \quad \underbrace{n \int_{\frac{1}{n\sqrt{n}}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-n^2 \sin t} dt}_{\substack{\leq \frac{\pi}{2} n e^{-n^2 \sin \frac{1}{n\sqrt{n}}} \\ \uparrow \text{zona cut} \\ \sim n e^{-\sqrt{n}} \rightarrow 0}} \end{aligned}$$

Interpretazione

$$\begin{aligned}
 e^{-z^2} dz &= e^{-(x+iy)^2} (dx+idy) \\
 &= e^{-x^2+y^2-2ixy} (dx+idy) \\
 &= e^{-x^2+y^2} (\cos(2xy) - i \sin(2xy)) (dx+idy)
 \end{aligned}$$

Parte reale e immaginaria sono w_1 e w_2 .

LEMMA (di oscillazione)

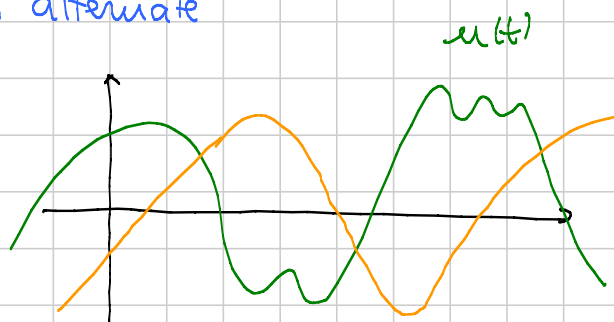
Siano $u(t)$ e $v(t)$ due soluzioni linearmente indipendenti dell'eq. diff.

$$u'' + a(t)u' + b(t)u = 0$$

↑
funzioni continue
senza ipotesi di segno

Allora tra 2 zeri consecutivi della $u(t)$, posto che esistono, esiste esattamente uno zero della $v(t)$.

Moralmente: si annullano alternate



Dim Occorre introdurre il WRONSKIANO

$$W(t) := \det \begin{pmatrix} u(t) & \dot{u}(t) \\ v(t) & \dot{v}(t) \end{pmatrix} = u\dot{v} - \dot{u}v$$

Calcolo la derivata

$$W'(t) = \cancel{\dot{u}\dot{v}} + u\ddot{v} - \cancel{\dot{u}\dot{v}} - \ddot{u}v$$

$$\text{vso equ. } \uparrow = u(-a(t)\dot{v} - \cancel{b(t)\dot{v}}) - v(-a(t)\dot{u} - \cancel{b(t)\dot{u}})$$

$$= -a(t)(u\dot{v} - v\dot{u})$$

$$= -a(t)W(t)$$

Allora $W'(t) = -a(t)W(t)$ da cui

$$W(t) = W(0) e^{-A(t)} \quad \uparrow \text{prim. di } a(t)$$

$\Rightarrow W(t)$ ha segno costante.

Siano t_1 e t_2 due zeri consecutivi di $u(t)$.

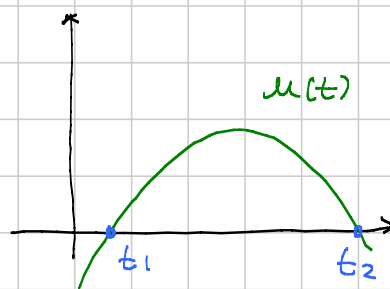
WLOG supponiamo $u(t) > 0$ su (t_1, t_2)

Guardiamo cosa accade a $W(t)$

$$W(t) = u\dot{v} - v\dot{u}$$

$$\text{in } t_1: W(t_1) = -v(t_1) \underbrace{\dot{u}(t_1)}_{+}$$

$$\text{in } t_2: W(t_2) = -v(t_2) \underbrace{\dot{u}(t_2)}_{-}$$



Ora $W(t)$ non cambia segno, quindi deve cambiare $v(t)$

(Domanda: perché $v(t_1)$ e $v(t_2)$ sono $\neq 0$?)

Questo dimostra che v si annulla ALMENO una volta
in (t_1, t_2)

Se si annullasse più di una volta, invertito il discorso
e tra due annullamenti di v dovrebbe annullarsi u .

Oss. Nessuno campione ad u di annullarsi.

Esempio

$$\ddot{u} - u = 0$$

ha come sol. $\sinh t$ e $\cosh t$

ANALISI 2

LEZIONE 128

Note Title

18/05/2018

Teoremi di convergenza dominata (teo. passaggio al limite per integrali impropri)

Teorema (Conv. dom. BABY)

Sia $A \in \mathbb{R}$ e siano $f_n : [A, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e $f_\infty : [A, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue (ma basta molto meno).

Supponiamo che

(i) $f_n \rightarrow f$ unif. sui compatti

(ii) esiste $g : [A, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \geq A \quad (\text{DOMINAZIONE})$$

$$\int_A^{+\infty} g(x) dx < +\infty$$

Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_A^{+\infty} f_n(x) dx = \int_A^{+\infty} f_\infty(x) dx$$

Oss. 1 - Se fosse un integrale su $[A, B]$ sarebbe il classico teorema di scambio

2 - Senza dominazione è falso, anche se $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. su tutto $[A, +\infty)$.

Esempio $f_n \rightarrow f_\infty \equiv 0$ unif. su $[0, +\infty)$

$$\int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0 = \int_0^{+\infty} f_\infty(x) dx$$



Dim Devo dim. che $\forall \varepsilon > 0 \exists m_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\left| \int_A^{+\infty} f_n(x) dx - \int_A^{+\infty} f_\infty(x) dx \right| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq m_0$$

$$\text{LHS} \leq \left| \int_A^{+\infty} f_n(x) dx - \int_A^B f_n(x) dx \right| \quad \text{piccolo se } B \text{ grande}$$

$$+ \left| \int_A^B f_n(x) dx - \int_A^B f_\infty(x) dx \right| \quad \text{piccola se } n \text{ è grande}$$

$$+ \left| \int_A^B f_\infty(x) dx - \int_A^{+\infty} f_\infty(x) dx \right| \quad \text{piccolo se } B \text{ grande}$$

In outline:

- mi viene dato $\varepsilon > 0$
- scelgo $B \geq A$ t.c.

$$\int_B^{+\infty} g(x) dx \leq \frac{1}{4} \varepsilon \quad \text{posso perché coda di integr. conv.}$$

- deduco dalla precedente e dalla dominazione che

$$\int_B^{+\infty} |f_n(x)| dx \leq \frac{1}{4} \varepsilon \quad \int_B^{+\infty} |f_\infty(x)| dx \leq \frac{1}{4} \varepsilon$$

per dedurre che $|f_\infty(x)| \leq g(x)$ basta la puntuale

- visto B , scelgo $m_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\left| \int_A^B f_n(x) dx - \int_A^B f_\infty(x) dx \right| \leq \frac{1}{2} \varepsilon \quad \forall n \geq m_0$$

posso perché su $[A, B]$ ho convergenza uniforme.

Mettendo insieme le stime ho la tesi.

— o — o —

Teorema (Continuità di integrale improprio dip. da parametro)
Siano $A \in \mathbb{R}$, $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ e

$$f: (a, b) \times [A, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

una funzione continua (una basta meno).

Supponiamo che esista $g: [A, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$|f(t, x)| \leq g(x) \quad \forall t \in (a, b) \quad \forall x \geq A$$

$$\int_A^{+\infty} g(x) dx < +\infty$$

Poniamo

$$\varphi(t) := \int_A^{+\infty} f(t, x) dx \quad \forall t \in (a, b).$$

Allora φ è ben definita e continua in (a, b) .

Dim. La dominazione assicura la convergenza dell'integrale, e quindi la buona definizione di $\varphi(t)$.

Per la continuità, o ripetiamo la dim. di prima, o ragioniamo per successioni. Prendiamo $t_n \rightarrow t_\infty$ in (a, b) e mostriamo che

$$\begin{array}{ccc} \varphi(t_n) & \longrightarrow & \varphi(t_\infty) \\ \text{"} & & \text{"} \\ \int_A^{+\infty} \underbrace{f(t_n, x)}_{f_n(x)} dx & & \int_A^{+\infty} \underbrace{f(t_\infty, x)}_{f_\infty(x)} dx \end{array}$$

Per il teo. prec. basta dim. che $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. sui cpt.

ed in maniera dominata.

La dominazione c'è per ipotesi.

La conv. unif. sui compatti segue dal fatto che $f(t, x)$ è unif. continua sui compatti del tipo

$$\underbrace{[t_\infty - \delta, t_\infty + \delta] \times [A, B]}_{\subseteq (a, b)}$$

— o — o —

Teorema (Derivabilità di integrale improprio parametrico)

Sia $f: (a, b) \times [A, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Supponiamo che

$$\varphi(t) := \int_A^{+\infty} f(t, x) dx \quad \forall t \in (a, b)$$

sia ben definita (cioè l'int. improp. converge).

Supponiamo inoltre che $f_t(t, x)$ esista continua in $(a, b) \times [A, +\infty)$ e che esista $g: [A, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$|f_t(t, x)| \leq g(x) \quad \forall t \in (a, b) \quad \forall x \geq A$$

(dominazione della derivata)

$$\int_A^{+\infty} g(x) dx < +\infty.$$

Allora φ è derivabile in (a, b) e

$$\varphi'(t) = \int_A^{+\infty} f_t(t, x) dx \quad \forall t \in (a, b)$$

↑
scambio integrale/derivata.

Dim Devo verificare che, per ogni $t_0 \in (a, b)$, vale

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\varphi(t_0+h) - \varphi(t_0)) = \int_A^{+\infty} f_t(t, x) dx$$

cioè che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_A^{+\infty} (f(t_0+h, x) - f(t_0, x)) dx = \int_A^{+\infty} f_t(t, x) dx$$

Posso fare in 2 modi: o ripeto la solita dim. scegliendo il B opportuno, o prendo una qualunque succ. $h_n \rightarrow 0$ e verifico che

$$\frac{f(t_0+h_n, x) - f(t_0, x)}{h_n} \rightarrow f_t(t, x)$$

unif. sui compatti e in maniera dominata.

Ora osservo che

$$\left| \frac{f(t_0+h_n, x) - f(t_0, x)}{h_n} \right| = \left| f_t(t_0 + \overset{\text{misterioso}}{\uparrow} c_n(x), x) \right|$$

$\uparrow$
Lagrange nella variabile t

Questo da solo garantisce la dominazione.

Inoltre, fissato un intervallo $[A, B]$, abbiamo che

$$|f_t(t_0 + c_n(x), x) - f_t(t_0, x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [A, B]$$

se n è abbastanza grande (segue dal fatto che $|c_n(x)| \leq |h_n|$ e f_t è continua e quindi unif. continua sui compatti)

Ad essere sufficienti, basta la continuità in t di $f_t(t, x)$ unif. sui cpt. rispetto ad x .

— o — o —

Esempio 1

$$\varphi(t) := \int_0^{+\infty} e^{-tx} dx \quad \forall t > 0$$

Volendo $\varphi(t)$ si calcola esplicitamente

$$\varphi(t) = \left[-\frac{1}{t} e^{-tx} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{t}$$

Inoltre in ogni semiretta $[A, +\infty)$ con $A > 0$ siamo nelle ipotesi del teo. di cont. e derivabilit  per integrali impropri. (Dominio d'integranda con e^{-Ax} e la sua derivata con $x e^{-Ax}$ e cos  via)

Allora posso usare il teo. di scambio

$$\varphi'(t) = -\frac{1}{t^2} = -\int_0^{+\infty} x e^{-tx} dx$$

Vado avanti

$$\varphi''(t) = \frac{2}{t^3} = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-tx} dx$$

... per induzione otteniamo

$$\varphi^{(n)}(t) = (-1)^n \frac{n!}{t^{n+1}} = (-1)^n \int_0^{+\infty} x^n e^{-tx} dx$$

Ponendo $t=1$ si ottiene

$$n! = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$$

— 0 — 0 —

INTEGRALE DI DIRICHLET

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Road map: ponga

$$F(\lambda) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda x} dx \quad \forall \lambda \geq 0$$

Valgono i seguenti fatti

① F è ben definita $\forall \lambda \geq 0$ (Dirichlet per $\lambda=0$,
e converge assolutamente grazie all'esponenziale
per $\lambda > 0$)

② F è continua su $[0, +\infty)$

③ F è derivabile in $(0, +\infty)$ e vale

$$F'(\lambda) = -\frac{1}{1+\lambda^2} \quad \forall \lambda > 0$$

④ $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} F(\lambda) = 0$

Da questi fatti segue la tesi.

Dal fatto ③ deduco che $F(\lambda) = c - \arctan \lambda \quad \forall \lambda > 0$

Dal fatto ④ deduco che $c = \frac{\pi}{2}$

Dal fatto ① passo al limite per $\lambda \rightarrow 0^+$ e trovo $F(0) = \frac{\pi}{2}$.

ANALISI 2 — LEZIONE 129 ☺

Note Title

18/05/2018

$$F(\lambda) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda x} dx$$

③ $F(\lambda) \rightarrow 0$ per $\lambda \rightarrow +\infty$

Prendo una qualunque $\lambda_n \rightarrow +\infty$. Allora definitivamente.

$\lambda_n \geq 2018$ e quindi

$$\left| \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda_n x} \right| \leq e^{-2018x}$$

e questa dominazione basta per il teorema

② F è derivabile su $(0, +\infty)$.

Mostriamo che è derivabile su $(A, +\infty)$ per ogni $A > 0$.

Basta una dominazione per la derivata dell'integranda rispetto a λ

$$\left| \frac{\sin x}{x} (-x) e^{-\lambda x} \right| \leq e^{-Ax} \quad \forall x \geq 0 \quad \forall \lambda \geq A$$

②bis Calcolo della derivata

Per ogni $\lambda > 0$ vale il te. di scambio e quindi

$$F'(\lambda) = - \int_0^{+\infty} \sin x \cdot e^{-\lambda x} dx = \text{analisi 1...} = - \frac{1}{1 + \lambda^2}$$

↑
grazie ritorno

1 Facile Γ è continua su $(0, +\infty)$

Facile: su ogni semiretta $\lambda \geq A > 0$ vale la dominazione

$$\left| \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\leq 1} e^{-\lambda x} \right| \leq e^{-Ax} \quad \forall \lambda \geq A \quad \forall x \geq 0.$$

Posso quindi usare il teorema.

Achtung! Sembra mancare una dominazione verso $\lambda = 0$.

1 Difficile Γ è continua anche in $\lambda = 0$

Occorre ripercorrere la dir. di conv. dell'int. di Dirichlet

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda x} dx = \underbrace{\int_0^1}_{\substack{\downarrow \\ \text{integrale proprio e passa} \\ \text{al limite tranquillo}}} \dots + \int_1^{+\infty} \dots$$

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda x} dx &= \left[-\frac{\cos x}{x} e^{-\lambda x} \right]_{x=1}^{x=+\infty} \quad \text{per parti} \quad \nearrow -\frac{\cos 1}{1} e^{-\lambda} \\ &+ \int_1^{+\infty} (+\cos x) \frac{-\lambda e^{-\lambda x} x - e^{-\lambda x}}{x^2} dx \end{aligned}$$

Alla fine mi basta passare a limite

$$\int_1^{+\infty} \cos x \frac{\lambda x e^{-\lambda x} + e^{-\lambda x}}{x^2} dx \quad \xrightarrow{\lambda=0} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

Serve una dominazione per l'integrandi

$$\left| \cos x \frac{\frac{t}{\lambda x} e^{-\frac{t}{\lambda x}} + e^{-\lambda x}}{x^2} \right| \leq \frac{M+1}{x^2} \quad \begin{matrix} \forall \lambda \geq 0 \\ \forall x \geq 1 \end{matrix}$$

dove $M := \max_{t \geq 0} \{ t e^{-t} \}$

Morale: la dominazione non funziona nell'integrale originario, ma funziona su quello ottenuto dopo un passaggio per parti

DELIRIO 1 P.ti critici e topologia dei Livelli

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ abbastanza regolare (C^2 e siamo sicuri)

$$L_a = \{ x \in \mathbb{R}^n : f(x) = a \} \quad \text{ipersup. di livello}$$

$$L_{[a,b]} = \{ x \in \mathbb{R}^n : a \leq f(x) \leq b \} \quad \text{striscia di livello}$$

Teorema Supponiamo che

$$\inf \{ |\nabla f(x)| : x \in L_{[a,b]} \} > 0$$

(Il gradiente sta ben lontano da 0 nella striscia)

Allora L_a e L_b sono omeomorfi.

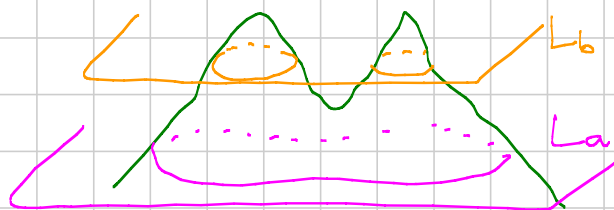
Corollario Se L_a e L_b non sono omeomorfi, allora in $L_{[a,b]}$ succede qualcosa al gradiente.

In particolare, se $L_{[a,b]}$ è compatto, allora esiste almeno un p.to stazionario su $L_{[a,b]}$.

Cambio top. dei livelli = guai sul gradiente

Dom Considero il sistema di eq. diff.

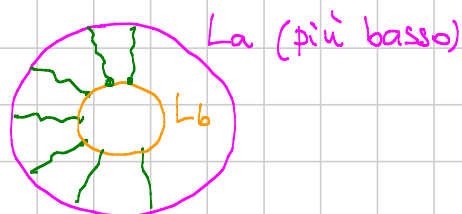
$$\dot{u} = - \frac{\nabla f(u)}{\|\nabla f(u)\|^2}$$



$$[f(u)]' = \langle \nabla f(u), \dot{u} \rangle = \langle \nabla f(u), - \frac{\nabla f(u)}{\|\nabla f(u)\|^2} \rangle = -1$$

Se i considero dati iniziali $u_0 \in L_b$, al tempo $b-a$ mi trovo in L_a .

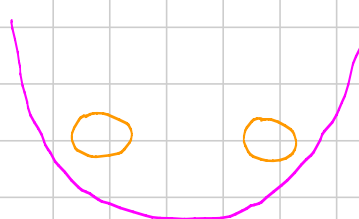
Questa mappa induce un omeomorfismo tra L_b ed L_a
 → continuo per dip. cont. dal dato iniziale



→ sing. perché metto un segno -
 e torno indietro nel tempo

→ il meccanismo è ben definito perché il denominatore sta lontano da 0 !!!

Oss. Nessuno superisce un "cambio all'infinito"



DELIRIO 2 Dimensione di uno spazio metrico

Sia (X, d) metrico compatto. Allora per ogni $r > 0$ esiste una r rete di distributori finita.

Sia $D(r)$ il min. numero di distributori necessario per una r -rete.

Ci aspettiamo $D(r) \sim \frac{K}{r^d}$ $\leftarrow$ dimensione

Def. Possiamo porre

$$\dim(X, d) := \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\log D(r)}{|\log r|}$$

Def. Se (X, d) non è compatto, la sua dim. è il sup delle dimensioni dei compatti contenuti.

Esercizi per casa 😊

1 - Dim. che la dim. di $\mathbb{R}^n$ è n

2 - Trovare esempi in cui il limsup NON è un limite

3 - Trovare un metrico compatto di dim. $\sqrt{2018}$

4 - Se (X, d_X) e (Y, d_Y) sono due metrici (compatte) e $f: X \rightarrow Y$ è lip., allora

$$\dim(f(X)) \leq \dim(X)$$

Se è α -hölderiana, allora $\dim(f(X)) \leq \frac{1}{\alpha} \dim(X)$.
(esercizio sui ricoprimenti!)

Curva di Peano

Esiste $f: [0,1] \rightarrow [0,1]^2$
continua e surgettiva, cioè una
curva che ha come sostegno un
quadrato PIENO.

Questa non può essere meglio di $\frac{1}{2}$ -holder, ed infatti
è proprio $\frac{1}{2}$ -holder.

— o — o —