

A.A. 2017/2018
Corso di Analisi Matematica 2
Stampato integrale delle lezioni
(Volume 1)

Massimo Gobbino

Indice

Lezione 001. Introduzione al corso. Struttura euclidea, metrica e topologia nello spazio a n dimensioni. Funzioni di n variabili e loro grafico. Definizione di limite per funzioni di più variabili.	7
Lezione 002. Metodi per visualizzare un grafico in dimensione 2: linee di livello e restrizioni a rette. Primi esempi di limite per funzioni di più variabili.	11
Lezione 003. Limiti all'infinito per funzioni di più variabili. Esempi di limiti per funzioni di più variabili: esistenza via stime+carabinieri o coordinate polari, non esistenza via restrizione a particolari curve.	15
Lezione 004. Ulteriori esempi di limiti per funzioni di più variabili.	20
Lezione 005. Derivate parziali e direzionali e loro significato geometrico. Differenziale per funzioni di più variabili. Piano tangente ad un grafico. Definizione di gradiente e matrice Jacobiana.	24
Lezione 006. Relazioni tra differenziabilità, esistenza delle derivate parziali, continuità e relativi controesempi. Formula per le derivate direzionali. Interpretazione geometrica del gradiente. Esempi di calcolo di derivate parziali.	29
Lezione 007. Teorema del differenziale totale: caso classico e caso con ipotesi più minimaliste. Esercizi sullo studio della differenziabilità di funzioni di più variabili.	34
Lezione 008. Derivate successive per funzioni di più variabili. Teoremi di inversione dell'ordine di derivazione: teorema di Schwarz e teorema con ipotesi di differenziabilità delle derivate prime. Costruzione dei controesempi.	39
Lezione 009. Norma di una matrice. Lipschitzianità delle funzioni affini. Teorema di Lagrange direzionale e controesempio nel caso vettoriale. Disuguaglianza alla Lagrange direzionale per funzioni vettoriali.	44
Lezione 010. Disuguaglianza alla Lagrange per funzioni vettoriali di una variabile. Lipschitzianità e limitatezza della matrice Jacobiana su domini convessi. Controesempi in assenza di convessità. Differenziabilità della funzione composta.	49
Lezione 011. Chain rule per il calcolo delle derivate parziali di funzioni composte. Esempi di utilizzo: norma del gradiente in coordinate polari, risoluzione di semplici equazioni lineari alle derivate parziali.	54

Lezione 012. Formalismo dei multi-indici. Enunciato della formula di Taylor in più variabili, con resto alla Peano ed alla Lagrange. Enunciato e dimostrazione dei lemmi comuni alle due dimostrazioni (caratterizzazione dei polinomi di Taylor).	59
Lezione 013. Formula di Taylor in più variabili: dimostrazione dei lemmi finali in versione Peano e Lagrange. Esempi di calcolo di polinomi di Taylor in più variabili.	64
Lezione 014. Forme quadratiche, matrice associata, segnatura e metodi per calcolarla. Stima dal basso per una forma quadratica definita positiva.	69
Lezione 015. Matrice Hessiana e studio locale nell'intorno di un punto stazionario. Esempi di applicazione.	74
Lezione 016. Esempi di calcolo di gradiente e matrice Hessiana mediante i polinomi di Taylor. Esercizi che hanno a che fare con la connessione: gli aperti connessi sono connessi per archi, le funzioni con gradiente nullo su un connesso sono costanti, tutti i valori tranne al più 2 sono assunti infinite volte.	80
Lezione 017. Compattezza e teorema di Weierstrass (e relative varianti) in più variabili. Ricerca dei punti di massimo/minimo. Nei punti di massimo/minimi interni il gradiente (se esiste) si annulla.	85
Lezione 018. Primi esempi di problemi di massimo/minimo su insiemi compatti: casi che si vedono ad occhio, metodo delle linee di livello e metodo di parametrizzazione del bordo.	91
Lezione 019. Metodo dei moltiplicatori di Lagrange (caso di un solo moltiplicatore): descrizione del metodo e primi esempi di applicazione.	96
Lezione 020. Giustificazione intuitiva del metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Significato geometrico dei punti che risolvono il primo sistema (cioè dei punti del vincolo in cui il gradiente dell'equazione si annulla). Utilizzo misto di moltiplicatori ed altre tecniche.	101
Lezione 021. Metodo dei moltiplicatori di Lagrange (caso con più moltiplicatori): descrizione del metodo e primo esempio di applicazione.	106
Lezione 022. Esempi di problemi di massimo/minimo (funzione con valore assoluto, insieme non compatto, funzione omogenea su tutto lo spazio).	112
Lezione 023. Convessità in spazi vettoriali: insiemi convessi, combinazioni convesse, funzioni convesse, disuguaglianza di Jensen. La convessità come fatto unidimensionale. Punti estremali di insiemi convessi e punti di massimo di funzioni convesse.	117
Lezione 024. Equivalenza tra due definizioni di locale limitatezza. Le funzioni convesse sono localmente limitate nella parte interna dell'insieme di definizione. Le funzioni convesse sono continue e localmente Lipschitziane nella parte interna dell'insieme di definizione.	123

Lezione 025. Convessità e derivata prima: equivalenza tra convessità, monotonia del gradiente, stare sopra agli iperpiani tangenti. Convessità e derivata seconda: legami tra convessità e segnatura della matrice Hessiana. I sottolivelli delle funzioni convesse sono convessi.	128
Lezione 026. Dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra (mediante Weierstrass generalizzato e studio locale). Esercizi sulle funzioni convesse. Caratterizzazione delle funzioni convesse regolari radiali.	134
Lezione 027. Caratterizzazione variazionale di autovalori/autovettori, quoziente di Rayleigh e dimostrazione variazionale del teorema spettrale. Equazione delle onde nel piano.	140
Lezione 028. Esercizi misti: calcolo e classificazione di punti stazionari, esempio non banale di utilizzo dei moltiplicatori di Lagrange, esempio di utilizzo del metodo delle successioni per il calcolo di un liminf.	146
Lezione 029. Introduzione agli integrali doppi: notazioni, significato geometrico, step functions, integrale inferiore e superiore, criterio di integrabilità. Proprietà basilari dell'integrale (linearità, monotonia, integrale del prodotto e del valore assoluto, ...) analoghe a quelle valide in una variabile.	152
Lezione 030. Descrizione della formula di riduzione per integrali doppi su rettangoli e su insiemi normali. Analogia con il double counting. Esempi di applicazione. . . .	158
Lezione 031. Enunciato e dimostrazione della formula di riduzione per integrali doppi (sia nella massima generalità, sia sotto ipotesi di integrabilità). Esempi patologici che mostrano l'ottimalità degli enunciati.	164
Lezione 032. Insiemi misurabili e loro caratterizzazione. Misurabilità degli insiemi normali. Integrabilità delle funzioni continue su insiemi misurabili.	170
Lezione 033. Utilizzo delle coordinate polari per il calcolo di integrali doppi: descrizione della formula ed esempi di applicazione. Esempi di utilizzo delle simmetrie per semplificare o ridurre i calcoli.	175
Lezione 034. Formula generale per il cambio di variabili negli integrali doppi ed esempi classici di applicazione. Classi particolari di trasformazioni: traslazioni, dilatazioni degli assi, affinità.	180
Lezione 035. Integrali tripli: notazioni, significato fisico, definizione. Formula di riduzione sui parallelepipedi e su insiemi normali (integrazione per colonne). Esempi di applicazione.	186
Lezione 036. Formula di riduzione per sezioni per gli integrali tripli. Principio di Cavalieri. Esempi di calcolo di integrali tripli.	192
Lezione 037. Coordinate cilindriche e sferiche nello spazio. Cambi di variabile in generale negli integrali tripli. Esempi di applicazione.	197

Lezione 038. Calcolo del baricentro e momento d'inerzia di figure piane/solide mediante integrali doppi/tripli. Solidi di rotazione: equazioni e formula per il volume. Teorema di Guldino per il volume dei solidi di rotazione.	203
Lezione 039. Dimostrazione della formula di cambio di variabili negli integrali multipli (parte prima): proposizioni generali e dimostrazione per le trasformazioni affini. . .	209
Lezione 040. Dimostrazione della formula di cambio di variabili negli integrali multipli (parte seconda): dalla epsilon disuguaglianza per i cubi piccoli alla conclusione. . .	214
Lezione 041. Dimostrazione della formula di cambio di variabili negli integrali multipli (parte terza): norme cubiche di vettori e matrici, lemma di cubo esterno, i diffeomorfismi mandano misurabili in misurabili, dimostrazione della epsilon disuguaglianza per i cubi piccoli.	219
Lezione 042. Commenti finali sulla dimostrazione della formula di cambio di variabili negli integrali multipli. Accenno al lemma di cubo interno. Esempi di calcolo di integrali multipli con valori assoluti.	224
Lezione 043. Introduzione agli integrali impropri in più variabili. Dimostrazione che per integrande non negative l'integrale non dipende da come viene invasa la zona di integrazione. Controesempi per integrande di segno variabile. Integrali di potenze negative della distanza dall'origine in dimensione due e tre.	228
Lezione 044. Calcolo dell'integrale gaussiano mediante integrali doppi. Esempi di studio della convergenza di integrali impropri, anche parametrici.	234
Lezione 045. Volume della palla n-dimensionale: formula esplicita e dimostrazione per ricorrenza. Integrali impropri in dimensione n: dimostrazione degli esponenti critici per gli integrali di potenze della norma.	240
Lezione 046. Esercizi sullo studio della convergenza di integrali multipli impropri. . .	246
Lezione 047. Coordinate sferiche in dimensione qualunque: calcolo dell'integrale della parte trigonometrica del determinante Jacobiano. Esempi finali sugli integrali multipli impropri: utilizzo di stime sia sulle integrande, sia sulla zona di integrazione.	250
Lezione 048. Integrali dipendenti da parametro: teoremi di continuità e derivabilità (derivazione sotto il segno di integrale) per integrali propri. Caso della dimensione 1 con estremi ed integranda parametrici. Continuità di un integrale improprio parametrico sotto ipotesi di dominazione.	255

ANALISI 2

- LEZIONE 001

Note Title

26/09/2017

Precorso 20%

Analisi 1 40%

Alg. Lin. 10%

Analisi 2 30%

Programma:

- Calc. diff. in + variabili
- Calc. int. " " "
- Calc. vettoriale (curve e sup.)
- Varietà
- Spazi metrici
- Succ. e serie di funzioni
- Eq. e sistemi di eq. diff.

Corso di
Servizio
(CALCULUS)

Secondo
Semestre

Riassunto in una parola: UNIFORME (MENTE)

Studieremo di funzioni $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($m=1$)

rende le cose difficili

Ripasso di $\mathbb{R}^m$:

→ $\mathbb{R}^m$ è uno sp. vett.

$\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ *mob. vett.*

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$(x_1, x_2, \dots, x_8) \in \mathbb{R}^8$

*mob. con
componenti*

→ Prodotto scalare canonico

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{k=1}^m x_k y_k = x_1 y_1 + \dots + x_m y_m$$

Proprietà: • bilineare

• def. positivo $\langle x, x \rangle \geq 0$ sempre e $=0 \Leftrightarrow x=0$

→ Norma di un vettore (lunghezza)

$$\| \vec{x} \| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2}$$

"Pitagora in n variabili"

Proprietà :

$$\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\| \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{R}^3$$
$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

→ Distanza. Dati x e y in $\mathbb{R}^n$ si definisce

$$\text{dist}(x, y) = \|x - y\| = \left(\sum_{k=1}^3 (x_k - y_k)^2 \right)^{1/2}$$

Proprietà

- (d1) $d(x, y) \geq 0$ sempre
- (d2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (d3) $d(x, y) = d(y, x)$
- (d4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

→ Topologia (tuturi, aperti, chiusi, ...)

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, x_0) < r\}$$

↑BALL↑centro↑raggio

APERTA

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, x_0) \leq r\}$$

Da qui nascono i concetti topologici, ad esempio dato ASR^n diciamo

- $x_0 \in \text{Int}(A)$ se $\exists r > 0$ t.c. $B_r(x_0) \subseteq A$
- $x_0 \in \text{Clos}(A)$ se $\forall r > 0$ vale $B_r(x_0) \cap A \neq \emptyset$
- $x_0 \in D(A)$ se $\forall r > 0$ vale $(B_r(x_0) \cap A) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$
 $\uparrow$ p.to di accumul.

Analogamente tutto in resto

Metaidea

prod. scalare $\rightsquigarrow$ norma $\rightsquigarrow$ distanza $\rightsquigarrow$ intornoi $\rightsquigarrow$ succ. conv.

Def. Sia x_n una successione di vettori e sia x_∞ un vettore (diciamo tutto in $\mathbb{R}^m$).

Diciamo che $x_n \rightarrow x_\infty$ se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(x_n, x_\infty) = 0$$

limite di numeri

Analogamente posso dire

$$\forall \varepsilon > 0 \quad x_n \in B_\varepsilon(x_\infty) \text{ definitivamente.}$$

Setting Sia $A \subseteq \mathbb{R}^m$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione
Il grafico di f è

$$\text{Grafico}(f) := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^{m+1} : y = f(x) \}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ n \text{ comp.} & 1 \text{ comp.} & \mathbb{R} & \mathbb{R}^m \end{matrix}$

Def. di Limite Sia x_0 un p.to di accumulazione di A .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \quad \textcircled{1}$$

$$+\infty \quad \textcircled{2}$$

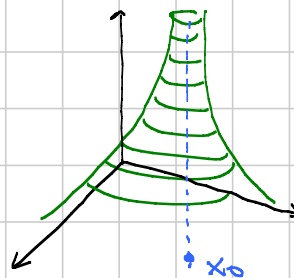
$$-\infty \quad \textcircled{3}$$

$$\text{N.E.} \quad \textcircled{4}$$

④ Nessuno dei precedenti ☺

$$\textcircled{2} \quad \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \text{t.c.}$$

$$f(x) \geq M \quad \forall x \in (B_\delta(x_0) \cap A) \setminus \{x_0\}$$



$$\textcircled{3} \quad \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \text{t.c.}$$

$$f(x) \leq M \quad \forall x \in (B_\delta(x_0) \cap A) \setminus \{x_0\}$$

$$\textcircled{1} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{t.c.}$$

$$\underbrace{|f(x) - L|}_{\text{valore assoluto di numeri}} \leq \varepsilon \quad \forall x \in (B_\delta(x_0) \cap A) \setminus \{x_0\}$$

— o — o —

Più in generale se $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x_0 \in D(A)$

Diciamo che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \in \mathbb{R}^m$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad \underbrace{\|f(x) - y_0\|}_{\text{norma di un vettore}} \leq \varepsilon \quad \forall x \in (B_\delta(x_0) \cap A) \setminus \{x_0\}$$

Esempio $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (2,3) \\ \text{componenti}}} \underbrace{\frac{y \arctan x}{x^2 + x e^{yx}}}_{f(x,y)} = \frac{3 \arctan 2}{4 + 2e^6}$

Buona notizia 😊 : vale il solito metateorema di analisi 1
quando non ci sono problemi burocratici

Cattiva notizia ☹️ : ad ANALISI 2 I LIMITI NON HANNO
NESSUNA VOGLIA DI ESISTERE

ANALISI 2

-

LEZIONE 002

Note Title

26/09/2017

Come visualizzare funzioni $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e il loro grafico:

→ linee di livello

→ percorsi di omini.

Esempio 1 $f(x, y) = x^2 + y^2$

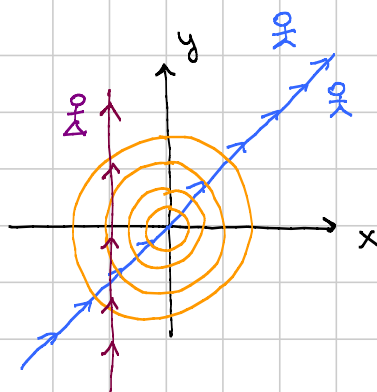
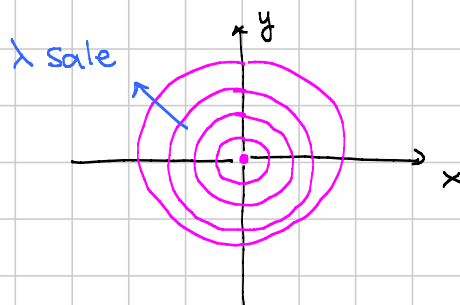
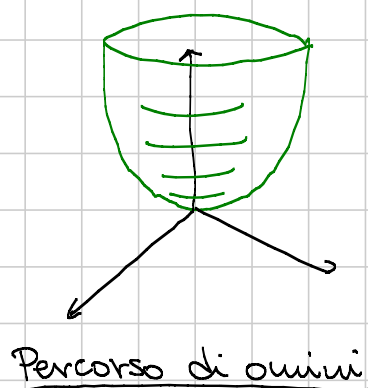
Linee di livello : $f(x, y) = \lambda$ (studio d'insieme al variare di λ)

$$x^2 + y^2 = \lambda$$

$\leadsto \emptyset$ se $\lambda < 0$

$\leadsto (0, 0)$ se $\lambda = 0$

$\leadsto$ circ. di raggio $\sqrt{\lambda}$ e centro in $(0, 0)$ se $\lambda > 0$



$(t, t) \quad t \in \mathbb{R}$
 $\uparrow$
 tempo

$f(t, t) =$ quota a cui si trova l'omino che nella cartina fa il percorso stabilito (t, t)
 $= t^2 + t^2 = 2t^2$

$(-1, t)$
 $\uparrow$
 omino

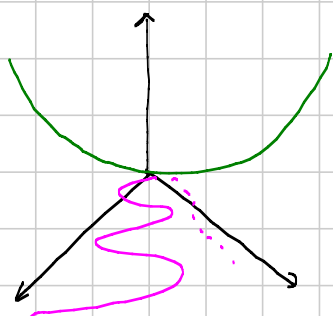
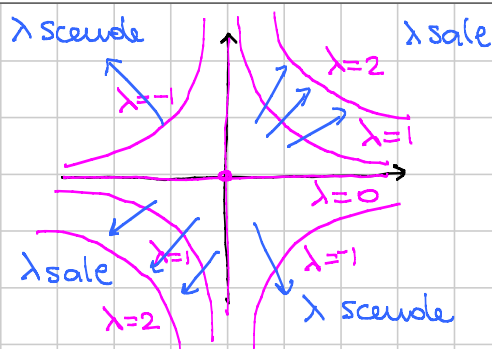
$$f(-1, t) = 1 + t^2$$

Esempio 2 $f(x, y) = xy$

Linee di livello : $xy = \lambda$

$\hat{f}(t, t) : f(t, t) = t^2$ 

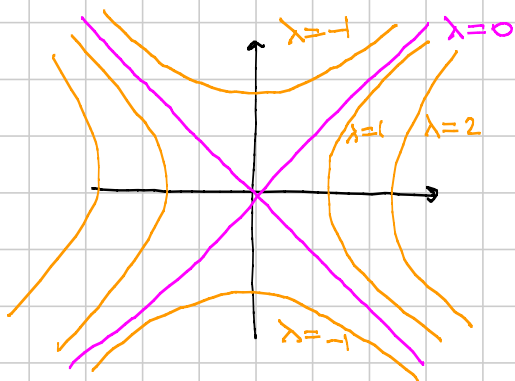
$\hat{f}(t, -t) : f(t, -t) = -t^2$ 



Mountain pass.

Esempio 3 $f(x, y) = x^2 - y^2$

È quella di prima ruotata di 45° 😊



Esempio 4 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$ [$\frac{0}{0}$: forma indet.]

Lo dimostro con il trucco del valore assoluto + carabinieri

$$0 \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = |y| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq |y|$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0

Esempio 3

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

[0/0]

Non esiste

Lo dimostro usando omini diversi che vanno a (0,0) in modo diverso

① Mi muovo lungo asse x : $(t, 0)$ con $t \rightarrow 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0$$

② Mi muovo lungo bisettrice

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}$$

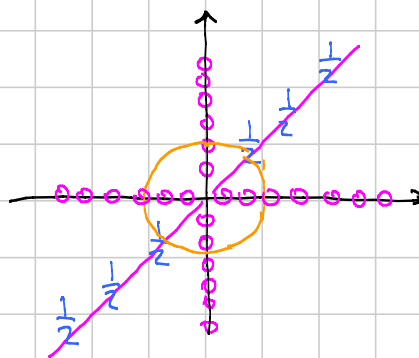
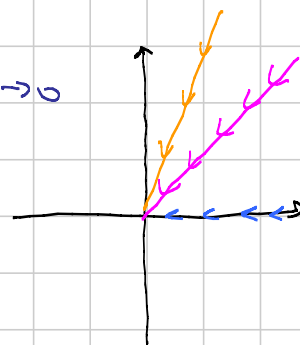
③ Lungo la retta $y = mx$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, mt) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot mt}{t^2 + m^2 t^2} = \frac{m}{1 + m^2}$$

Omini diversi ottengono limiti diversi, ANZI!
abbiamo scoperto che $f(x, y)$ è costante
sulle rette che escono dall'origine

Quindi: in ogni palla
centrata in (0,0)
ci sono pti in cui
 $f = \frac{1}{2}$ e pti in cui $f = 0$

$\Rightarrow$ il lim. non può esistere



Esempio 6 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^4} = 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, mt) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \cdot mt}{t^2 + m^4 t^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{mt}{1 + m^4 t^2} = 0$$

$$0 \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^4} \right| = |y| \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^4} \leq |y|$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0

Esempio 7 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \text{N.E.}$

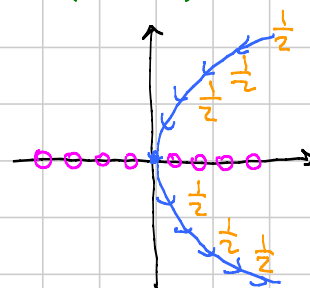
$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, mt) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot m^2 t^2}{t^2 + m^4 t^4} = 0 \text{ come prima}$$

(Bisogna fare a parte l'asse y, una via facile)

Considero l'orbita (t^2, t)

$$f(t^2, t) = \frac{t^4}{2t^4} = \frac{1}{2}$$

e quindi $\lim_{t \rightarrow 0} f(t^2, t) = \frac{1}{2} \neq 0$.



Più in generale : $f(mt^2, t) = \frac{m}{m^2+1} \Rightarrow f$ è costante lungo la parabola

MORALE

- ① Come dimostro che un limite non esiste? Trovo 2 orbite che vedono limiti diversi
- ② Come dimostro che un limite esiste? Devo inventarmi qualcosa. GLI OMNI NON BASTANO

ANALISI 2

LEZIONE 003

Note Title

27/09/2017

LIMITI ALL'INFINITO IN PIÙ VARIABILI

Vuol dire fare il limite per $\|x\| \rightarrow +\infty$
 $\uparrow$
 Vettore

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} l \in \mathbb{R} & \textcircled{1} \\ +\infty & \textcircled{2} \\ -\infty & \textcircled{3} \\ \text{N.E.} & \textcircled{4} \end{cases} \quad (\text{come sempre})$$

Def. Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

$$\textcircled{2} \quad \forall M \in \mathbb{R} \exists R > 0 \text{ t.c. } \forall x \in D \quad \|x\| \geq R \Rightarrow f(x) \geq M$$

$$\textcircled{3} \quad \forall M \in \mathbb{R} \exists R > 0 \text{ t.c. } \forall x \in D \quad \|x\| \geq R \Rightarrow f(x) \leq M$$

$$\textcircled{4} \quad \forall \varepsilon > 0 \exists R > 0 \text{ t.c. } \forall x \in D \quad \|x\| \geq R \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Def. Sia $\{x_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ una successione. Si dice che x_k "tende all'infinito" se

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x_k\| = +\infty$$

cioè $\forall R > 0$ si ha che $x_k \notin B_R(0)$ definitivamente.

Esempio 1 $\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} x^2 + 2y^2 - 3x = +\infty$

$$\lim_{x^2 + 2y^2 \rightarrow +\infty} x^2 + 2y^2 - 3x$$

1° metodo: mi concentro sulle disuguaglianze.

Considero $\frac{x^2}{2} - 3x$. Da analisi 1 sappiamo che

esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $\frac{x^2}{2} - 3x \geq M$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
 $\uparrow$
 negativa

Ora vale la stima

$$\begin{aligned} \underbrace{x^2 + 2y^2 - 3x}_{+\infty} &\geq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \underbrace{\frac{x^2}{2} - 3x}_{\geq M} \\ &\geq \frac{1}{2} \underbrace{(x^2 + y^2)}_{+\infty} + M \end{aligned}$$

2° metodo: uso le coordinate polari: $x = p \cos \theta$, $y = p \sin \theta$

Oss. fond.: fare il lim per $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$ equivale a fare il limite per $p \rightarrow +\infty$

$$x^2 + 2y^2 - 3x = p^2 \cos^2 \theta + 2p^2 \sin^2 \theta - 3p \cos \theta$$

NON POSSO CONSIDERARE θ COME UN PARAMETRO E FARE IL LIMITE $p \rightarrow +\infty$. MI DEVO LIBERARE DI θ !!!

$$\begin{aligned} &\geq p^2 \cos^2 \theta + p^2 \sin^2 \theta - 3p \cos \theta \\ &= p^2 - 3p \cos \theta \\ &\geq \boxed{p^2 - 3p} \end{aligned}$$

quindi la funzione iniziale tende a $+\infty$

Detto meglio: $\forall M \in \mathbb{R} \exists R > 0$ t.c. $p^2 - 3p \geq M$ per $p \geq R$
 e quindi $x^2 + 2y^2 - 3x \geq M$ quando
 $\sqrt{x^2 + y^2} \geq R$

Esempio 2 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} x^4 + y^2 + 3xy^2$

In coord polari ottengo

$$\rho^4 \cos^4 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta + 3\rho^3 \cos \theta \sin^2 \theta$$

Distinguo 2 casi

- se $\cos \theta \neq 0$, allora il ρ^4 vince e il limite viene $+\infty$
- se $\cos \theta = 0$, allora $\sin^2 \theta = 1$ e la funzione diventa $\rho^2 \rightarrow +\infty$

Quindi in ogni caso tende a $+\infty$.

SPAZZATURA $\nearrow$ (Analisi $\pm$ riciclata = fare il limite sulle rette).

Il limite sopra NON ESISTE !!!

Per vederlo ci sono almeno 2 modi

- $f(t, t^2) = t^4 + t^4 + 3t^5$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, t^2) = +\infty$$

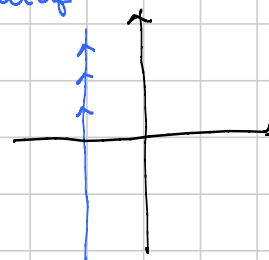
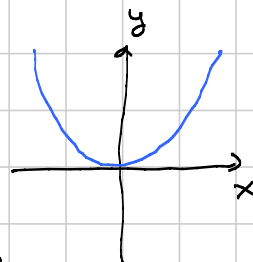
$\downarrow$
limsup

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t, t^2) = -\infty$$

$\downarrow$
liminf

- $f(-1, t) = 1 + t^2 - 3t^2 = 1 - 2t^2$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(-1, t) = -\infty \Rightarrow \text{no esist. lim.}$$



Esempio 3 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} x^4 + y^2 + x^2y = +\infty$

1° modo: invento disuguaglianze

$$x^4 + y^2 + x^2y = \frac{x^4}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}(x^2 + y)^2 \geq \frac{x^4}{2} + \frac{y^2}{2}$$

Osservo che $x^4 \geq x^2 - 1$ (vera per $|x| \geq 1$ e per $|x| \leq 1$)
da cui

$$\frac{x^4}{2} + \frac{y^2}{2} \geq \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{y^2}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} (x^2 + y^2)$$

2° modo: pareggio gli esponenti con un cambio di variabili

Pongo $x = u$, $y = v^2$. Ottengo

$$x^4 + y^2 + x^2 y = u^4 + v^4 + u^2 v^2$$

e qui è evidente che è una somma di quadrati.

Oss. Così come è scritto è pericoloso perché y assume solo valori positivi. Si sistema, ma non è banale.

Esempio 4 $\lim_{|(x,y)| \rightarrow +\infty} x^4 + y^4 + 12x^2y = +\infty$

Uso coord. polari

$$\rho^4 \cos^4 \theta + \rho^4 \sin^4 \theta + 12\rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta$$

$$= \rho^4 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) + 12\rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta$$

$$\geq m\rho^4 - 12\rho^3 \rightarrow +\infty$$

dove $m := \min \{ \cos^4 \theta + \sin^4 \theta : \theta \in [0, 2\pi] \}$

Analisi 1: il minimo esiste ed è il valore assunto in un certo θ_0 (p.to di min.), e questo valore non è 0 perché $\sin \theta_0$ e $\cos \theta_0$ non possono essere entrambi nulli.

Esempio 5 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^5}{x^6 + y^6}$

In coordinate polari è come fare il lim per $\rho \rightarrow 0^+$

$$\left| \frac{x^2 y^5}{x^6 + y^6} \right| = \frac{\rho^7 |\cos^2 \theta \sin^5 \theta|}{\rho^6 (\cos^6 \theta + \sin^6 \theta)} \leq \frac{\rho^7}{\rho^6 \cdot m} \rightarrow 0$$

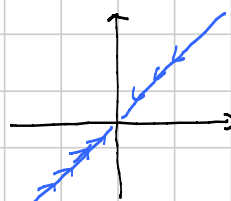
dove

$$m := \min \{ \cos^6 \theta + \sin^6 \theta : \theta \in [0, 2\pi] \} > 0$$

↑
come prima

Esempio 6 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^3}{x^6 + y^6}$

N.E.



$$f(t,t) = \frac{t^5}{2t^6} = \frac{1}{2} \frac{1}{t}$$

per $t \rightarrow 0^+$ tende a $+\infty$ (limsup)
per $t \rightarrow 0^-$ tende a $-\infty$ (liminf)

Esempio 7 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^3}{x + y}$

N.E.



$$(t, -t + t^{20})$$

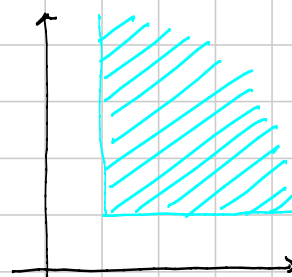
$$f(t, -t + t^{20}) = \frac{t^2 (-t + t^{20})^3}{t^{20}}$$

$$\sim -\frac{t^5}{t^{20}} = -\frac{1}{t^{15}} \quad \text{per } t \rightarrow 0$$

• Con $D = (1, +\infty) \times (1, +\infty)$

Coord. polari $\underbrace{\rho^2 \cos \theta \sin \theta}_{\geq 0}$

Dico che il limite fa $+\infty$



$$xy = \underbrace{\frac{1}{2}xy}_{y \geq 1} + \underbrace{\frac{1}{2}xy}_{x \geq 1} \geq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}(x+y)$$

vera all'interno di D

Ora osservo che $\lim_{\substack{x+y \rightarrow +\infty \\ x \geq 0 \\ y \geq 0}} x+y = +\infty$ perché lo posso fare in polari

$$(x+y = \rho(\cos \theta + \sin \theta) \geq \underbrace{m}_{\text{pos.}} \rho)$$

Catena logica

$x+y \rightarrow +\infty$ sul 1° quadrante $\Rightarrow x+y \rightarrow +\infty$ sul D ristretto
 $\Rightarrow xy \rightarrow +\infty$ sul D ristretto

Esempio 4 $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in D}} \frac{xy^2}{x^4+y^2} = 0$



$$0 \leq \frac{xy^2}{x^4+y^2} \leq \frac{y^3}{y^2} = y$$

Nella zona D vale $y \geq x$, cioè $x \leq y$

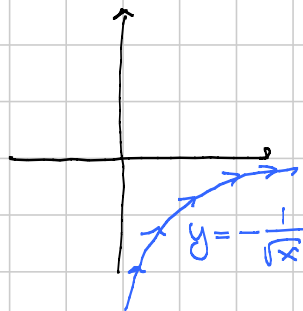
Esempio 5 $f(x,y) = y^{20} + \arctan(xy)$ $x^2+y^2 \rightarrow +\infty$

$\limsup = +\infty$ $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(0,t) = +\infty$ (andava bene anche $t \rightarrow +\infty$)

$$\liminf = -\frac{\pi}{2} \quad f(x,y) \geq -\frac{\pi}{2} \text{ sempre}$$

$$f\left(t^2, \frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^{20}} + \arctan(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f\left(t^2, \frac{1}{t}\right) = -\frac{\pi}{2}$$



Esempio 6 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x-y)}{x-y} = 1$

Pongo $x-y=t$ e osservo che quando $(x,y) \rightarrow (0,0)$ si ha che $t \rightarrow 0$, quindi diventa il limite notevole

Esempio 7 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x-y)}{x-2y}$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t,0) = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(0,t) = \frac{1}{2}$$

$$f(2t+t^{20}, t) = \frac{\sin(t+t^{20})}{t^{20}}$$

Da qui si vede che $\liminf$ e $\limsup$ sono $\pm \infty$

Esempio 8 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos x - \cos y}{x-y} = -\sin c \underset{0}{=} 0$

Lagrange! $\cos x - \cos y = (x-y) (-\sin c)$
↑
misterioso tra x e y

Esempio 9 $\lim_{x^2 y^2 \rightarrow +\infty} \frac{x^3 y^4}{x^{66} + y^{40}}$ nel 1° quadrante

Paragonare gli esponenti: pongo $x = u^{40}$
 $y = v^{66}$

Osservo che, essendo nel 1° quadrante,

$$x^2 + y^2 \rightarrow +\infty \quad (\Rightarrow) \quad u^2 + v^2 \rightarrow +\infty$$

Sostituendo trovo

$$\frac{x^{120} y^{66}}{x^{66} + y^{40}} = \frac{u^{120} v^{66}}{u^{40 \cdot 66} + v^{40 \cdot 66}}$$

$$40 \cdot 66 = 2640$$

Ora passo in polari e ottengo

$$\frac{\rho^{120+66a} \boxed{\cos^{120} \theta \sin^{66} \theta}}{\rho^{2640} (\cos^{2640} \theta + \sin^{2640} \theta)} \leq 1$$

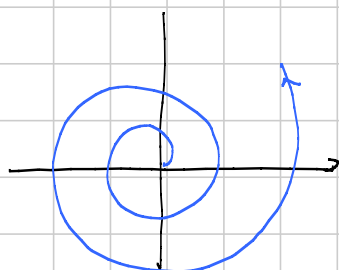
$\geq m$

Quindi il limite viene 0 quando $120 + 66a < 2640$

Per gli altri valori di a uso omini del tipo (t^{40}, mt^{66}) e ottengo lim. diversi per m diversi.

Oss. Quando $(x_n, y_n) \rightarrow (2, 5)$ posso dedurre $x_n \rightarrow 2$ e $y_n \rightarrow 5$
 Quando $x_n^2 + y_n^2 \rightarrow +\infty$ posso dedurre che $|x_n| \rightarrow +\infty$ opp. $|y_n| \rightarrow +\infty$

NO! Si può andare spiraleggiando o peggio!!



ANALISI 2

-

LEZIONE 005

Note Title

29/09/2017

Derivate e differenziale per funzioni di più variabiliAnalisi 1

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Derivata

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha h + o(h)$$

Differenziale

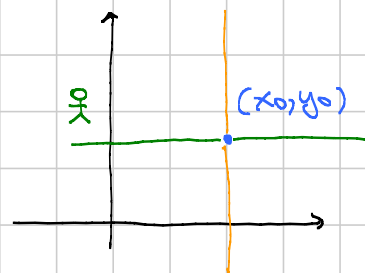
Teo f è deriv. in $x_0 \Leftrightarrow f$ è diff. in x_0 (e $\alpha = f'(x_0)$)

Analisi 2 Caso di 2 variabili.

Setting: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \text{Int}(\Omega)$

$$\text{stickman} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\text{stickman} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}$$



Def. Si dice che $f(x, y)$ è derivabile parzialmente rispetto alla variabile x nel p.to (x_0, y_0) se il 1° limite esiste ed è reale. Il valore del limite si chiama derivata parziale risp. ad x e si indica con

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$f_x(x_0, y_0)$$

$$D_x f(x_0, y_0)$$

Analogamente, il secondo limite produce $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

— o — o —

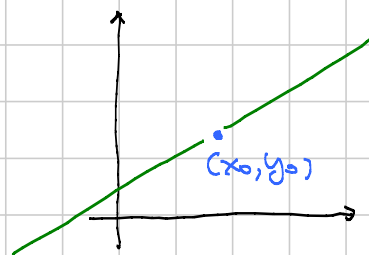
Def. (derivata direzionale)

Siano $\Omega, f, (x_0, y_0)$ come prima.

Sia $v = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ non nullo, cioè
 $\alpha^2 + \beta^2 > 0$

Considero

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha h, y_0 + \beta h) - f(x_0, y_0)}{h}$$



(osservo che la retta è $(x_0, y_0) + h(\alpha, \beta)$)

Se il limite esiste ed è reale, allora si dice deriv. direz. di f in (x_0, y_0) risp. al vettore v e si indica con

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)} \quad f_v(x_0, y_0)$$

Oss. 1 Spesso si def. le deriv. direzionali usando solo v che sono versori, cioè $|v| = \alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Infatti è semplice osservare che per $\lambda > 0$ vale

$$\frac{\partial f}{\partial(\lambda v)}(x_0, y_0) = \lambda \frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$$

↑
equivale a percorrere la stessa retta con una diversa velocità

Oss. 2 Le derivate parziali sono deriv. direz. corrispondenti a $v = (1, 0)$ e $v = (0, 1)$.

Oss. 3 Le deriv. part. e direz. sono derivate di restrizioni di f , cioè ad esempio

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \varphi'(x_0) \quad \text{dove} \quad \varphi(x) := f(x, y_0)$$

Def. (in dim n) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$,
sia $x_0 \in \text{Int}(\Omega)$

↑ vettore

• Dato $v \in \mathbb{R}^n$ con $|v| > 0$, abbiamo

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha v) - f(x_0)}{\alpha} \quad (\text{se esiste})$$

↑
numero

• Dato $i \in \{1, \dots, n\}$ def. la deriv. part. risp. a x_i come

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha e_i) - f(x_0)}{\alpha}$$

dove e_i è l' i -esimo vett. della base canonica

$$e_i = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pos. } i.}}{1}, 0, \dots, 0)$$

— 0 — 0 —

Def. Si dice gradiente di f nel pto $x_0 \in \text{Int}(\Omega)$
il vettore che ha come componenti le deriv. parziali di f nel punto x_0 .

$$\nabla f(x_0) = (f_{x_1}(x_0), \dots, f_{x_n}(x_0))$$

↑
NABLA

Oss. (quasi teorema) Se $x_0 \in \text{Int}(\Omega)$ è pto di max/min per f , e $\nabla f(x_0)$ esiste (cioè esistono le deriv. parziali), allora

$$\nabla f(x_0) = 0 \quad (\text{sono } n \text{ equazioni})$$

Idea per le derivate direzionali.

Dim. x_0 è pto di max/min per tutte le restrizioni.
— 0 — 0 —

DIFFERENZIALE In 2 variabili $f(x, y)$ stesso setting.

Def. Si dice che f è diff. in (x_0, y_0) se esistono α e β tali che

$$f(x_0 + R, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \alpha R + \beta k + o(\sqrt{R^2 + k^2})$$

Oss. L'enorme differenza è che R è piccolo implica una funzione $r(R, k)$ tale che

$$\lim_{(R, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{r(R, k)}{\sqrt{R^2 + k^2}} = 0$$

↑
Limite in 2 variabili

In n variabili diventa: f è diff. in x_0 se $\exists \alpha \in \mathbb{R}^n$ t.c.

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + \langle \alpha, R \rangle + o(|R|)$$

↑
vettori

↑
prod. scalare
di vettori

↑
norma di
un vettore

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{r(R)}{|R|} = 0$$

↑
Limite in n variabili

Oss. La funzione $R \rightarrow \langle \alpha, R \rangle$ è un'applicazione lineare in $\mathbb{R}$, quindi posso ridare la definizione dicendo che f è diff. in x_0 se esiste un'applic. lineare

$$L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + L R + o(|R|)$$

Ancora più in generale, siano

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \quad x_0 \in \text{Int}(\Omega), \quad f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$$

si dice che f è diff. in x_0 se esiste un'appl. lineare

$$L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

tale che

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Lh + o(|h|)$$

vettore
n-dim

matrice
 $m \times n$

vettore
n-dim.

$h(h)$

m var.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h(h)|}{|h|} = 0$$

m var.

Oss. Torniamo in 2 variabili

$$f(\underbrace{x_0+h}_x, \underbrace{y_0+k}_y) = f(x_0, y_0) + \alpha h + \beta k + o(|(h, k)|)$$

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + o(|(x - x_0, y - y_0)|)$$

eq. del piano tangente al grafico
di $f(x, y)$ nel pto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

Discorso analogo in n variabili

— o — o —

Per il futuro: sotto ipotesi decenti sarà

$$\alpha = \nabla f(x_0)$$

Nel caso di $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, la matrice L sarà la matrice JACOBIANA definita da

$$Jf(x_0) = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\}$$

i - esima comp. di f
j - esima variabile

ANALISI 2

-

LEZIONE 006

Titolo nota

29/09/2017

Relazioni tra differenziabilità, derivabilità, continuità

Setting : $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{Int}(\Omega)$.

Consideriamo le seguenti proprietà

- (i) f è continua in x_0 ,
- (ii) esistono deriv. part. in x_0 ,
- (iii) esistono tutte le deriv. direz. in x_0 ,
- (iv) f è differenziabile in x_0 .

Teorema

$$(iii) \Rightarrow (ii)$$

(ovvio)

$$(iv) \Rightarrow (i) + (ii) + (iii)$$

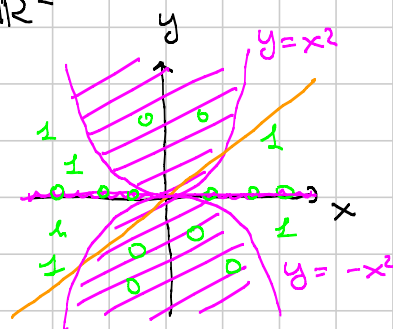
Ancora più importante: tutto il resto è falso, in particolare

$$(iii) \not\Rightarrow (i)$$

(Brutalmente = (iii) è come ragionare solo sulle rette)

Esempio 1 (Semplice, ma burocratico) $\Omega = \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{su asse } x + \text{parabole} \\ 1 & \text{altrove} \end{cases}$$



Tutte le deriv. direz. in $(0,0)$ esistono e sono $=0$,
perché la restrizione ad ogni retta è $=0$ vicino all'origine

D'altra parte $\left. \begin{array}{l} f(t, \frac{1}{2}t^2) \rightarrow 1 \text{ per } t \rightarrow 0 \\ f(t, 0) \rightarrow 0 \text{ per } t \rightarrow 0 \end{array} \right\} f \text{ non è cont. in } (0,0)$

Esempio 2 (Menu semplice e menu burocratico)

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \right)^2 & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Visto molte volte che non è continua in $(0, 0)$.

Vediamo che tutte le deriv. direzionali esistono e sono $= 0$.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(\alpha R, \beta R) - f(0, 0)}{R} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{R} \left(\frac{\alpha^2 \beta R^3}{\alpha^4 R^4 + \beta^2 R^2} \right)^2$$

→ se $\beta \neq 0$ allora denom. $\sim R^2$ e $\lim = 0$

→ se $\beta = 0$, ancora meglio.

Oss. Il $\square$ serve solo a rendere il limite $= 0$.

Dim. teorema

$$(io) \Rightarrow (i) \quad f(x_0 + R) = f(x_0) + \langle \alpha, R \rangle + o(|R|)$$

$$f(x_0 + R) - f(x_0) = \langle \alpha, R \rangle + o(|R|)$$

$$|f(x_0 + R) - f(x_0)| \leq |\langle \alpha, R \rangle| + |o(|R|)|$$

$$\leq |\alpha| \cdot |R| + \frac{|o(|R|)|}{|R|} |R|$$

$$\text{Quindi } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{R \rightarrow 0} f(x_0 + R) = 0.$$

$$(iv) \Rightarrow (iii) \quad f(x_0 + R) = f(x_0) + \langle \alpha, R \rangle + o(|R|)$$

Presa una qualunque direzione v vado a calcolare

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \quad \text{(uso def. di diff. con } R = tv \text{)}$$

$$\stackrel{\text{Def}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0) + \langle \alpha, tv \rangle + o(|tv|) - f(x_0)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \langle \alpha, v \rangle + \underbrace{\frac{o(|tv|)}{|tv|}}_{\downarrow 0} \underbrace{\frac{|tv|}{t}}_{\substack{\text{numero} \\ \text{fisso}}} = \langle \alpha, v \rangle$$

Formula per le derivate direzionali

Se f è diff. in x_0 , allora

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \alpha, v \rangle \quad \forall v \neq 0$$

Usando come v i vettori della base canonica otteniamo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \langle \alpha, e_i \rangle = \alpha_i \quad (\text{i-esima comp. di } \alpha)$$

Quindi $\alpha = \nabla f(x_0)$ e in conclusione

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle} \quad \text{Formula per deriv. direzionali se } f \text{ è diff. in } x_0$$

Achtung! Può succedere che f soddisfa (iii), ma le deriv. direz. non sono date dalla formula

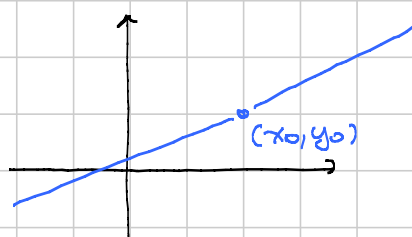
(Basta prendere l'esempio 2 senza il quadrato)

Significato geometrico del gradiente

Calcoliamo der. direz. dimostriamo ad vettori $|v|=1$. Allora

$$\left| \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) \right| = |\langle \nabla f(x_0), v \rangle| \leq |\nabla f(x_0)| \cdot |v| = 1$$

La deriv. direz. è max se v è l'unico multiplo positivo di $|\nabla f(x_0)|$ che abbia norma 1.



$(x_0, y_0) + t v$

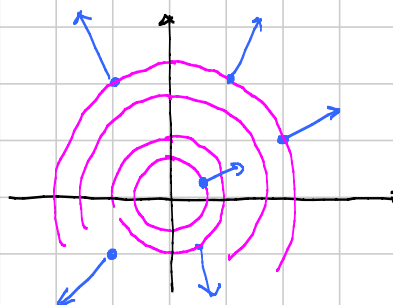


$f((x_0, y_0) + t v)$

$\nabla f(x_0)$ è la direzione in cui andare per salire il più possibile

Esempio $f(x, y) = x^2 + y^2$

Il gradiente è $\perp$ alle linee di livello $f(x, y) = \lambda$ e punta nella direzione λ sale



— o — o —

Domande

- ① Come calcolo le deriv. parziali
- ② " " " " direzionali
(se so fare ③ e ①, per queste c'è la formula)
- ③ Come stabilisco se f è diff. in x_0 .

Le derivate parziali si calcolano "congelando la variabile rispetto alla quale non derivo"

Esempi

$$f(x, y) = x^2 + y^3$$

$$f_x(x, y) = 2x$$

$$f_y(x, y) = 3y^2$$

$$f(x, y) = x^2 y^3$$

$$f_x(x, y) = 2xy^3$$

$$f_y(x, y) = 3x^2 y^2$$

$$f(x, y) = x \sin(xy^2)$$

$$f_x(x, y) = \sin(xy^2) + x \cos(xy^2) y^2$$

$$f_y(x, y) = x \cos(xy^2) \cdot 2xy$$

$$f(x, y) = x^y$$

$$f_x(x, y) = y x^{y-1}$$

$$f_y(x, y) = x^y \log x$$

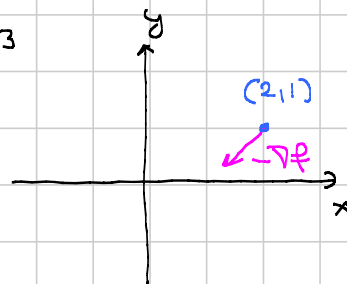
Esempio $f(x, y) = x^3 + x^2 y^4$

Metto una pallina nel p.to sopra (2,1). Dove va la pallina?

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^4$$

$$f_y(x, y) = 4x^2 y^3$$

$$\nabla f(2, 1) = (16, 16)$$



ANALISI 2

-

LEZIONE 007

Note Title

03/10/2017

Come dimostro che $f(x)$ è diff. in x_0 ?

Risposta: se le derivate parziali esistono e sono continue, allora Ok.

Teorema del differenziale totale (In ipotesi comode)

Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$, sia $\delta > 0$, e sia $f: B_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che tutte le derivate parziali di f

(i) esistano in $B_\delta(x_0)$,

(ii) siano continue in x_0 .

Allora f è diff. in x_0 .

Dim. Per semplicità consideriamo il caso $n=2$, quindi $x_0 \sim (x_0, y_0)$

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) =$$

$$= f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) \\ + f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)$$

$$= k f_y(x_0 + h, y_0 + c)$$

(Lagrange in y)

$$+ h f_x(x_0 + d, y_0)$$

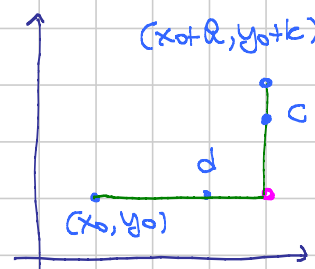
(Lagrange in x)

$$= k f_y(x_0, y_0) + k [f_y(x_0 + h, y_0 + c) - f_y(x_0, y_0)] \\ + h f_x(x_0, y_0) + h [f_x(x_0 + d, y_0) - f_x(x_0, y_0)]$$

$r(h, k)$

Resta da dim. che $r(h, k) = o(\sqrt{h^2 + k^2})$, cioè

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{|r(h, k)|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$



Basta dim. per i 2 termini separatamente

$$0 \leq \underbrace{\frac{|k|}{\sqrt{R^2+k^2}}}_{\leq 1} \underbrace{|f_y(x_0+R, y_0+c) - f_y(x_0, y_0)|}_{\downarrow 0}$$

perché quando $(R, k) \rightarrow (0, 0)$ anche $(R, c) \rightarrow (0, 0)$ e abbiamo supposto f_y continua in (x_0, y_0)

L'altro termine è analogo usando la continuità di f_x .
— 0 — 0 —

Oss. Abbiamo usato ipotesi (i) nel fare Lagrange e (ii) per passare al limite alla fine.

Oss. Se fossimo in dim n , dovremmo aggiungere e togliere $n-1$ p.ti in modo da fare n volte Lagrange, oppure procedere per induzione (esercizio di formalizzazione).
— 0 — 0 —

Teorema del diff. totale (risparmioso) (versione $\mathbb{R}^2$)

Sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, sia $\delta > 0$, sia $f: (x_0-\delta, x_0+\delta) \times (y_0-\delta, y_0+\delta) \rightarrow \mathbb{R}$

Supponiamo che

(i) $f_y(x, y)$ esista in tutto il rettangolo,

(ii) " continua in (x_0, y_0) ,

(iii) $f_x(x, y)$ esista (anche solo) in (x_0, y_0) .

Allora $f(x, y)$ è diff. in (x_0, y_0) .

Dim. Procediamo come prima

$$\begin{aligned} f(x_0+R, y_0+k) - f(x_0, y_0) &= f(x_0+R, y_0+k) - f(x_0+R, y_0) \\ &\quad + f(x_0+R, y_0) - f(x_0, y_0) \\ &= k f_y(x_0+R, y_0+c) \\ &\quad + f(x_0+R, y_0) - f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Le derivate parziali in $(0,0)$ esistono e sono nulle
 (sono le derivate delle restrizioni agli assi, che sono $\equiv 0$)
 Sia $v = (\alpha, \beta) \neq (0,0)$ una direzione. Allora

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) &= \lim_{R \rightarrow 0} \frac{f(\alpha R, \beta R) - f(\underset{0}{0}, \underset{0}{0})}{R} \\ &= \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{R} \frac{\alpha^2 R^2 \beta R}{\alpha^2 R^2 + \beta^2 R^2} = \frac{\alpha^2 \beta}{\alpha^2 + \beta^2}\end{aligned}$$

Quindi le deriv. esistono MA non rispettano la formula

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \langle \nabla f(\underset{0}{0}, \underset{0}{0}), v \rangle$$

Quindi f NON è diff. in $(0,0)$.

Si poteva vedere direttamente? Sì, usando la def.

Se f fosse diff., dovrebbe valere

$$f(R, k) = f(\underset{0}{0}, \underset{0}{0}) + f_x(\underset{0}{0}, \underset{0}{0})R + f_y(\underset{0}{0}, \underset{0}{0})k + o(\sqrt{R^2 + k^2})$$

Quindi dovrebbe essere

$$0 = \lim_{(R,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(R,k)}{\sqrt{R^2 + k^2}} = \lim_{(R,k) \rightarrow (0,0)} \frac{R^2 k}{(R^2 + k^2) \sqrt{R^2 + k^2}}$$

(in coord. polari è del tipo $\frac{\rho^3}{\rho^3}$, quindi tira bruttaria)

Rigorosamente : ovvio $(t,0)$ ottiene 0
 ovvio (t,t) " $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. FINE.

ANALISI 2

LEZIONE 008

Note Title

03/10/2017

Derivate successive in più variabili

Esempio $f(x, y) = x^2 + 2x^3y^2 + y^4$

$$f_x(x, y) = 2x + 6x^2y^2$$

$$f_y(x, y) = 4x^3y + 4y^3$$

$$f_{xx}(x, y) = 2 + 12xy^2$$

$$f_{xy}(x, y) = (f_x)_y(x, y) = 12x^2y$$

$$f_{yx}(x, y) = 12x^2y$$

$$f_{yy}(x, y) = 4x^3 + 12y^2$$

Uno può andare avanti, ottenendo $f_{xxx}(x, y) = 12y^2$ e così via...

Oss. A priori, le derivate parziali k -esime di una funzione di n variabili sarebbero n^k

Notazioni $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = D_{xx}f = \partial_{xx}f$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = D_{xy}f = \partial_{xy}f$$

$$\frac{\partial^{2+2} f}{\partial y^{200} \partial x^{27}}$$

È vero che le derivate miste coincidono sempre?

→ In generale NO

→ Sotto ipotesi ragionevoli SI.

Corollario Sotto hp ragionevoli, le derivate k -esime di una funzione di 2 variabili sono $k+1$ e non 2^k
(conta solo quante volte derivo rispetto ad x)

E se possiamo in n variabili?

$$f_{xyxy} = f_{xyyx} = f_{yxxy} = f_{yyxx} = f_{yyxy}$$

Oss. Basta dimostrare il te. di scambio in due variabili per le derivate seconde miste.

Teorema (di scambio dell'ordine di derivazione)
(Teorema di Schwarz)

Sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, sia $\delta > 0$, sia $f: (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione.

Supponiamo che

(i) $f_{xy}(x, y)$ e $f_{yx}(x, y)$ esistono in tutto il rettangolo

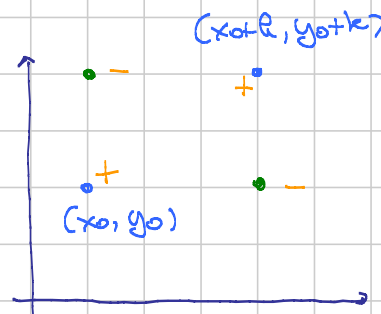
(ii) $f_{xy}(x, y)$ e $f_{yx}(x, y)$ sono continue in (x_0, y_0) .

Allora

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Dim. Considero la funzione

$$g(r, k) = f(x_0 + r, y_0 + k) + f(x_0, y_0) - f(x_0 + r, y_0) - f(x_0, y_0 + k)$$



Considero altre due funzioni di 1 variabile

$$\varphi(t) := f(t, y_0 + k) - f(t, y_0) \quad \varphi'(t) = f_x(t, y_0 + k) - f_x(t, y_0)$$

$$\psi(t) := f(x_0 + r, t) - f(x_0, t) \quad \psi'(t) = f_y(x_0 + r, t) - f_y(x_0, t)$$

$$g(r, k) = \underset{\textcircled{1} \text{ e } \textcircled{3}}{\varphi(x_0 + r)} - \underset{\textcircled{2} \text{ e } \textcircled{4}}{\varphi(x_0)} = r \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lagrange}}}{\varphi'(x_0 + c_1)}$$

$$= R [f_x(x_0+c_1, y_0+k) - f_x(x_0+c_1, y_0)]$$

=
↑

Lagrange nella
2^a variabile

Analogamente

$$Rk f_{xy}(x_0+c_1, y_0+c_2)$$

$$g(R, k) = \psi(y_0+k) - \psi(y_0) =$$

(1e4)

(2e3)

$$= k \psi'(y_0+c_3)$$

$$= k [f_y(x_0+R, y_0+c_3) - f_y(x_0, y_0+c_3)]$$

$$= kR f_{yx}(x_0+c_4, y_0+c_3)$$

Ora osservo che

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{g(R, R)}{R^2} = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{R^2 f_{xy}(x_0+c_1, y_0+c_2)}{R^2} = f_{xy}(x_0, y_0)$$

mentre usando l'altra formula viene

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{g(R, R)}{R^2} = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{R^2 f_{yx}(x_0+c_4, y_0+c_3)}{R^2} = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Teorema (Altro teorema di inversione)

Stesso setting di Schwarz.

Supponiamo che

(i) $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ esistano nel rettangolo

(ii) $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ sono diff. in (x_0, y_0)

Allora

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

Dim. Come sopra si definiscono $g(a, k)$, $\varphi(t)$ e $\psi(t)$.
Come sopra arrivo a

$$g(a, k) = R [f_x(x_0 + c_1, y_0 + k) - f_x(x_0 + c_1, y_0)]$$

Ora uso la diff. di f_x e ottengo

$$f_x(x_0 + c_1, y_0 + k) = f_x(x_0, y_0) + f_{xx}(x_0, y_0)c_1 + f_{xy}(x_0, y_0)k + o(\dots)$$

$$f_x(x_0 + c_1, y_0) = f_x(x_0, y_0) + f_{xx}(x_0, y_0)c_1 + o(\dots)$$

da cui
$$g(a, k) = Rk f_{xy}(x_0, y_0) + R \cdot o(\dots)$$

Analogamente, ragionando con l'altra formula ottengo

$$g(a, k) = Rk f_{yx}(x_0, y_0) + k o(\dots)$$

Come prima concludo calcolando in 2 modi il

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{g(a, a)}{a^2} = f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

C'è da stare attenti agli o piccolo, ma si gestiscono come sempre.

Tra i vari termini avrei

$R o(\sqrt{c_1^2 + k^2})$... quando metto $a=k$ e divido per a^2 trovo

$$\frac{R o(\sqrt{c_1^2 + R^2})}{R^2} = \frac{\sqrt{c_1^2 + R^2}}{R} \leq \frac{\sqrt{R^2 + R^2}}{R} \leq \sqrt{2}$$

$\downarrow$
 o

Controesempi

Costruttore di controesempi: prendiamo $R(x,y)$ tale che

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \alpha}} R(x,0) \neq \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ \beta}} R(0,y)$$

Allora $f(x,y) = xy R(x,y)$ ha $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$

Prendiamo per esempio $R(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, da cui

$$f(x,y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Si può dimostrare che f è continua e diff. in $(0,0)$ e $f_x(0,0) = f_y(0,0) = f(0,0) = 0$ (come lezione precedente è del tipo $\frac{p^4}{p^2}$).

$$f_x(x,y) = y R(x,y) + xy R_x(x,y) \quad \text{quindi}$$

$$f_x(0,y) = y R(0,y) \quad \text{da cui}$$

$$f_{xy}(0,0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def.}}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_x(0,t) - f_x(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} R(0,t) = -1$$

Analogamente $f_y(x,y) = x R(x,y) + xy R_y(x,y)$
da cui

$$f_y(x,0) = x R(x,0)$$

e quindi

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_y(t,0) - f_y(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} R(t,0) = 1$$

— 0 — 0 —

LEZIONE 009

04/10/2017

Cosa diventa il teorema di Lagrange per funzioni di più variabili

$$||| \mathbf{M} ||| = \left(\sum_{i,j} M_{i,j}^2 \right)^{1/2}$$

↑
el. della matrice

$$\|Mu\| \leq \|M\| \cdot \|u\|$$

$\uparrow$ norma su n variabili $\uparrow$ norma su m variabili
 $\uparrow$ norma su $n \cdot m$ variabili

$$(Mv)_i = \langle R_i, v \rangle \quad \text{quindi}$$

$$|(Mu)_i|^2 \stackrel{\text{C.S.}}{\leq} |R_i|^2 \cdot |U|^2$$

$$\begin{aligned} \|Mu\|^2 &= \sum_{i=1}^n |(Mu)_i|^2 \leq \sum_{i=1}^n |R_i|^2 \cdot |u|^2 = |u|^2 \cdot \sum_{i=1}^n |R_i|^2 \\ &= |u|^2 \cdot \|M\|^2. \end{aligned}$$

Corollario Le funzioni affini sono Lipschitziane

Dim Una funzione $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ affine si scrive come

$$\varphi(x) = Ax + b \quad A \text{ matrice, } b \text{ vettore}$$

Quindi $|\varphi(y) - \varphi(x)| = |Ax + b - Ay - b|$

$$= |A(x-y)| \leq |A| \cdot |x-y|$$

↑
norma della matrice

Teorema (Lagrange direzionale) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, siano $a \in A$ e $b \in A$ due punti.

Supponiamo che

- (i) tutto il segmento di estremi a e b è contenuto in $\text{Int}(A)$
- (ii) f ammette derivate direzionali in $\text{Int}(A)$.

Allora esiste almeno un pto c nel segmento di estremi a e b tale che

$$f(b) - f(a) = |b-a| \frac{\partial f}{\partial v}(c) \quad \text{con } v = \frac{b-a}{|b-a|}$$

Dim Considero la restrizione di f alla retta passante per a e b

$$t \rightarrow a + \frac{b-a}{|b-a|} t$$

$t=0 \rightsquigarrow a$
 $t=|b-a| \rightsquigarrow b$

$\varphi(t) := f(a + vt)$ è una funzione di 1 variabile a cui applico Lagrange di AN.1

$$f(b) - f(a) = \varphi(|b-a|) - \varphi(0) = |b-a| \varphi'(t_0)$$

$$\begin{aligned} &= |b-a| \frac{\partial f}{\partial v}(a + vt_0) \\ &= |b-a| \frac{\partial f}{\partial v}(c). \end{aligned}$$

Corollario Nelle stesse ipotesi di prima, supponiamo in aggiunta che f sia differenziabile.
Allora la tesi diventa

$$f(b) - f(a) = \langle \nabla f(c), b-a \rangle$$

dove c sta sul
segmento di estremi
 a e b

Dim. $f(b) - f(a) = |b-a| \frac{\partial f}{\partial v}(c)$ con $v = \frac{b-a}{|b-a|}$

$$= |b-a| \langle \nabla f(c), v \rangle$$

$$= |b-a| \langle \nabla f(c), \frac{b-a}{|b-a|} \rangle = \langle \nabla f(c), b-a \rangle.$$

Prop Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto convesso (se contiene 2 p.ti, contiene tutto il segmento)
e sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f è diff. in D ,

(ii) ∇f è limitato in D , cioè esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|\nabla f(x)| \leq M \quad \forall x \in D.$$

Allora f è Lip. con costante M in D .

Dim. Uso Lagrange direzionale

$$|f(y) - f(x)| = | \langle \nabla f(c), y-x \rangle | \leq |\nabla f(c)| \cdot |y-x|$$

$\uparrow$ sul segmento $\uparrow$ c.s.

$$\leq M |y-x|.$$

Achtung! Lagrange direzionale non vale se la funzione è a valori in $\mathbb{R}^m$ con $m \geq 2$.

Esempio: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ $f(t) := (\cos t, \sin t)$
 $f'(t) = (-\sin t, \cos t)$
 quindi $f'(t) \neq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$

Tuttavia $\underbrace{f(2\pi) - f(0)}_{=0} \stackrel{?}{=} 2\pi \cdot \underbrace{f'(0)}_{\neq 0}$

Proposizione Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso.
 Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione
 Siano a e b due p.ti distinti di D .
 Supponiamo che f sia diff. in D e sia J la sua matrice jacobiana.

Allora esiste c sul segmento di estremi a e b tale che

$$|f(b) - f(a)| \leq |J(c)(b-a)| \quad \text{Disuguaglianza di Lagrange direzionale}$$

Dim. (Dimostrazione per dualità)

Sia $v \in \mathbb{R}^m$ un qualunque vettore. Considero la funzione

$$D \ni x \rightarrow \langle f(x), v \rangle \in \mathbb{R}$$

$\uparrow$ prod. scalare in $\mathbb{R}^m$

Così ho definito una funzione $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \langle f(x), v \rangle$$

Per questa funzione vale il Lagrange direzionale, quindi

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \langle \nabla \varphi(c), b-a \rangle$$

Cui è $\nabla \varphi$? Siano $f_1(x), \dots, f_m(x)$ le componenti di f .
Siano $v_1, \dots, v_m$ le comp. di v

Allora

$$\varphi(x) = v_1 f_1(x) + \dots + v_m f_m(x)$$

da cui

$$\nabla \varphi(x) = v_1 \nabla f_1(x) + \dots + v_m \nabla f_m(x) = v J$$

↑
prima riga
di J

↑
 m -esima
riga di J



Sostituendo otteniamo

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \langle v J(c), b-a \rangle$$

riga ↑ ↑ ↑
 matrice colonna

da cui

$$\langle f(b), v \rangle - \langle f(a), v \rangle = \langle v J(c), b-a \rangle$$

"

$$\langle f(b) - f(a), v \rangle = \langle v J(c), b-a \rangle$$

Uso come vettore $v = f(b) - f(a)$ e ottengo

$$|f(b) - f(a)|^2 = \langle (f(b) - f(a)) J(c), b-a \rangle$$

$$= \langle f(b) - f(a), J(c)(b-a) \rangle$$

$$\leq \underbrace{|f(b) - f(a)|}_{\text{c.s.}} \cdot |J(c)(b-a)|$$

Semplice (se posso) $|f(b) - f(a)|$ e ottengo

$$|f(b) - f(a)| \leq |J(c)(b-a)|$$

vettore ↑ matrice ↑ ↑
 di m $m \times n$ colonna lunga n

ANALISI 2

LEZIONE 010

Note Title

04/10/2017

Caso particolare di disuguaglianza di Lagrange direzionale

Supponiamo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ con componenti $f_1, \dots, f_m$
 In questo caso

$$J = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ \vdots \\ f_m'(t) \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ m \\ \downarrow \end{matrix} = f'(t)$$

Tesi: $|f(b) - f(a)| \leq |f'(t_0)(b-a)| = |f'(t_0)| \cdot |b-a|$

$\uparrow$ $\uparrow$
 vettore numero

Dim Per ogni $v \in \mathbb{R}^m$ pensato come colonna considero

$$\varphi(t) = \langle f(t), v \rangle = v_1 f_1(t) + \dots + v_m f_m(t)$$

Applico Lagrange di Analisi 1 a $\varphi(t)$:

$$\begin{aligned} \varphi(b) - \varphi(a) &= (b-a) \varphi'(t_0) \\ &= (b-a) (v_1 f_1'(t_0) + \dots + v_m f_m'(t_0)) \\ &= (b-a)^t v J \\ &= {}^t v J (b-a) \end{aligned}$$

$\uparrow$
 è un numero

da cui

$$\langle f(b) - f(a), v \rangle = |{}^t v J (b-a)| = |b-a| \langle v, J \rangle$$

Prendo $v = f(b) - f(a)$ e ho

$$|f(b) - f(a)|^2 = |b-a| \langle f(b) - f(a), J \rangle \\ \leq |b-a| \cdot |f(b) - f(a)| \cdot |f'(t_0)|$$

Se $f(b) = f(a)$ non avevo nulla da dimostrare
Altrimenti divido e ho la tesi

— o — o —

Corollario Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$, sia $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$

Supponiamo che

(i) D aperto e convesso

(ii) f diff. su D

(iii) la matrice jacobiana Jf è limitata su D , cioè

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \quad |Jf| \leq M.$$

Allora f è M -lip. su D .

Dim. Uso disug. Lagrange direz.

Prop. norme matrici

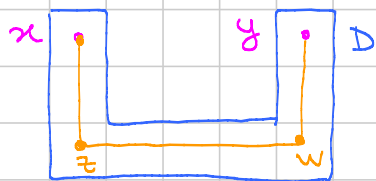
$$\underbrace{|f(y) - f(x)|}_{\substack{\text{vettore} \\ \text{lungo } m}} \leq \underbrace{|Jf(c)(y-x)|}_{\substack{\uparrow \\ \text{Disug.} \\ \text{Lagrange}}} \leq \underbrace{|Jf(c)| \cdot |y-x|}_{\substack{\leq M \cdot |y-x| \\ \uparrow \\ \text{vettore lungo } n}}$$

— o — o —

Achtung! Se f è diff. su D e $|Jf| \leq M$ su D
ma D non è convesso, non posso
dedurre che f è M -lip.

Non è vero nemmeno se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

In certi casi è "quasi vero" : $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ con $|\nabla f| \leq M$ limitato.



Posso dedurre che è Lip. anche se con una costante $> M$ perché posso fare il giro

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leq |f(y) - f(w)| + |f(w) - f(z)| + |f(z) - f(x)| \\ &\leq M|y-w| + M|w-z| + M|z-x| \\ &\leq 3M|y-x| \end{aligned}$$

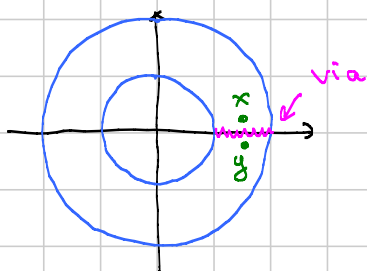
Quello che vale sempre è

$$|f(y) - f(x)| \leq M \cdot \underbrace{\text{dist}(y, x)}$$

"
lunghezza della + corta
spezzata che congiunge
y e x restando in D.

Esempio perverso 1

$D =$ corona circolare meno un raggio



$f(x, y) = \theta$ delle coord. polari

Questa ha $|\nabla f|$ limitato, ma non è Lip. !!!

(Basta prendere x e y vicinissimi come in figura $f(y) \sim 2\pi$ $f(x) \sim 0$)

Esempio perverso 2

D limitato, $|\nabla f|$ limitato



$\Downarrow \leftarrow$ NO !!!
 f limitata

Basta prendere f che sale lentamente in un intorno di una spirale di lunghezza infinita.

DIFF. DELLA FUNZIONE COMPOSTA

Analisi 1: $[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Teorema Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ $D \subseteq \mathbb{R}^n$
 $g: E \rightarrow \mathbb{R}^k$ $E \subseteq \mathbb{R}^m$

Supponiamo

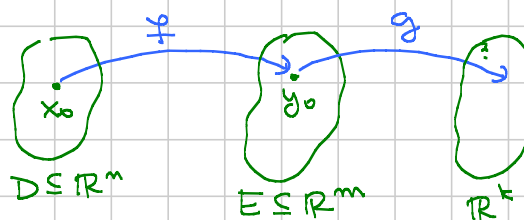
$x_0 \in D$ aperto

$y_0 = f(x_0) \in E$ aperto

$f(D) \subseteq E$

f diff. in x_0 con $Jf(x_0)$

g diff. in y_0 con $Jg(y_0)$



Allora $g \circ f$ è diff. in x_0 e

$$J(g \circ f)(x_0) = Jg(y_0) \cdot Jf(x_0)$$

osservare che le dim. sono compatibili

Dim. Sia $\varphi(x) = g(f(x))$ la composizione.

Ipotesi

$\begin{matrix} 0 \\ \uparrow \end{matrix}$ per $R \rightarrow 0$

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + Jf(x_0)R + |R| \underbrace{\omega_f(R)}_{\begin{matrix} 0 \\ \uparrow \end{matrix} \text{ per } R \rightarrow 0}$$

$$g(y_0 + k) = g(y_0) + Jg(y_0)k + |k| \underbrace{\omega_g(k)}_{\begin{matrix} 0 \\ \uparrow \end{matrix} \text{ per } k \rightarrow 0}$$

Posso supporre che $\omega_f(R)$ sia definita anche per $R=0$ e valga 0. Stesso discorso per $\omega_g(k)$.

$$\varphi(x_0 + R) = g(f(x_0 + R))$$

$$= g \left(\underbrace{f(x_0)}_{y_0} + \underbrace{f(x_0 + R) - f(x_0)}_{k} \right)$$

$$= \underbrace{g(f(x_0))}_{\varphi(x_0)} + Jg(y_0) [f(x_0+h) - f(x_0)] + \underbrace{|f(x_0+h) - f(x_0)| \cdot \omega_g(f(x_0+h) - f(x_0))}_{\text{...}}$$

$$Jg(y_0) [f(x_0+h) - f(x_0)] = Jg(y_0) [Jf(x_0)h + |h| r_f(h)]$$

$$= \underbrace{Jg(f(x_0)) \cdot Jf(x_0) \cdot h}_{\text{...}} + Jh(x_0)h$$

$$+ Jg(f(x_0)) |h| r_f(h)$$

Ci serve che i restanti due termini siano $o(|h|)$.

Vediamo il 2°

$$|Jg(f(x_0)) |h| r_f(h)| \leq |Jg(f(x_0))| \cdot |h| \cdot |r_f(h)|$$

e quindi quando divido per $|h|$ tende a 0 grazie a $|r_f(h)|$

Per quanto riguarda il 1°, basta dire che

$$\frac{|f(x_0+h) - f(x_0)|}{|h|}$$

è limitato (a quel punto il prodotto tende a 0 per merito di $\omega_g(\dots)$)

$$= \frac{1}{|h|} |Jf(x_0)h + |h| r_f(h)|$$

$$\leq \frac{1}{|h|} (|Jf(x_0)h| + |h| \cdot |r_f(h)|) \\ \leq |Jf(x_0)| \cdot |h|$$

$$= \underbrace{|Jf(x_0)|}_{\text{fisso}} + \underbrace{|r_f(h)|}_{\rightarrow 0} \quad \text{no limitato.}$$

Consiglio Ripetere la dim. scrivendo i vari oggetti cosa sono (matrici / vettori e di quali dimensioni).

ANALISI 2

—

LEZIONE 011

Note Title

10/10/2017

CHAIN RULE = Derivate (parziali delle funzioni composte)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^e \\ (x_1, \dots, x_n) & (y_1, \dots, y_m) & \end{array} \quad \varphi = g \circ f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^e$$

Sotto opportune ipotesi vale

$$J\varphi(x_0) = Jg(f(x_0)) \cdot Jf(x_0)$$

Indichiamo con $\varphi_1, \dots, \varphi_e$ le componenti di φ . Allora

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(x_0) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(f(x_0)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0)$$

anche se compaiono solo der. parziali, serve come ipotesi la differenziabilità

Dim. $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(x_0) = (J\varphi(x_0))_{k,i}$
 $\uparrow$ k -esima riga, i -esima colonna

(prodotto righe per colonne)

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^m (Jg(f(x_0)))_{k,j} \cdot (Jf(x_0))_{j,i} \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(f(x_0)) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0). \end{aligned}$$

Caso speciale

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

t $x_1, \dots, x_m$

$$\varphi = g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{Analisi 1!!}$$

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial x_i}(f(t)) \cdot f'_i(t)$$

Caso ultra speciale $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x, y, z)$

$\varphi(t) = g(f_1(t), f_2(t), f_3(t))$. Allora

$$\varphi'(t) = g_x(f_1(t), f_2(t), f_3(t)) \cdot f_1'(t) + g_y(\dots) \cdot f_2'(t) + g_z(\dots) f_3'(t)$$

Esempio $g(x, y) = x^2 - xy^3$ $\varphi(t) = g(\sin t, t^2)$

1° modo $\varphi(t) = \sin^2 t - t^6 \sin t$
 $\varphi'(t) = 2 \sin t \cdot \cos t - 6t^5 \sin t - t^6 \cos t$

2° modo Provo ad usare la formula $g_x = 2x - y^3$, $g_y = -3xy^2$

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= g_x(\sin t, t^2) \cdot \cos t + g_y(\sin t, t^2) \cdot 2t \\ &= (2 \sin t - t^6) \cos t + (-3 \sin t \cdot t^4) \cdot 2t \\ &= 2 \sin t \cdot \cos t - t^6 \cdot \cos t - 6t^5 \cdot \sin t \quad \text{☺} \\ &\quad \underline{\quad 0 \quad \quad 0 \quad \quad} \end{aligned}$$

Esempio 2 $f(x, y)$ $f(\varphi(x, y), \psi(x, y)) = g(x, y)$

$$g_x(x, y) = f_x \varphi_x + f_y \psi_x = f_x(\varphi(x, y), \psi(x, y)) \varphi_x(x, y) + f_y(\varphi(x, y), \psi(x, y)) \psi_x(x, y)$$

$$g_y(x, y) = f_x \varphi_y + f_y \psi_y = [\text{esplicitazione}]$$

$$g_{xx}(x, y) = (f_x)_x \varphi_x + f_x (\varphi_x)_x + (f_y)_x \psi_x + f_y (\psi_x)_x$$

$$\begin{aligned} &= (f_{xx} \varphi_x + f_{xy} \psi_x) \varphi_x + f_x \varphi_{xx} + \\ &\quad + (f_{yx} \varphi_x + f_{yy} \psi_x) \psi_x + f_y \psi_{xx} = \text{esplicitazione} \dots \end{aligned}$$

Per esercizio scrivere g_{xy} e g_{yy} .

Gradiente in coordinate polari

Sia $f(x, y)$ una funzione di 2 variabili. Pongo

$$g(\rho, \theta) := f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$

Domanda: legame tra f_x, f_y e g_ρ, g_θ

Calcolo le derivate (parziali) di g in funzione di quelle di f .

$$g_\rho = f_x x_\rho + f_y y_\rho = f_x \cos \theta + f_y \sin \theta$$

↑
CHAIN RULE

$$= f_x(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \cos \theta + \dots$$

$$g_\theta = f_x x_\theta + f_y y_\theta = f_x \cdot (-\rho \sin \theta) + f_y \cdot (\rho \cos \theta)$$

Ora calcolo

$$(g_\rho)^2 + \frac{1}{\rho^2} (g_\theta)^2 = f_x^2 \cos^2 \theta + f_y^2 \sin^2 \theta + 2 f_x f_y \cos \theta \sin \theta + f_x^2 \sin^2 \theta + f_y^2 \cos^2 \theta - 2 f_x f_y \cos \theta \sin \theta$$

Conseguenza:

$$|\nabla f|^2 = f_x^2 + f_y^2 = (g_\rho)^2 + \frac{1}{\rho^2} (g_\theta)^2$$

Norma del
gradiente in
coord. polari

Esplicitando le dipendenze, la formula diventa

$$[f_x(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)]^2 + [f_y(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)]^2 = [g_\rho(\rho, \theta)]^2 + \frac{1}{\rho^2} [g_\theta(\rho, \theta)]^2$$

Esempio $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x$ $\nabla f(x, y) = (2x - 3, 2y)$

$$|\nabla f(x, y)|^2 = 4x^2 - 12x + 9 + 4y^2$$

$$g(\rho, \theta) = \rho^2 - 3\rho \cos \theta \quad g_\rho = 2\rho - 3\cos \theta \quad g_\theta = 3\rho \sin \theta$$

$$g_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} g_\theta^2 = (2\rho - 3\cos \theta)^2 + 9 \sin^2 \theta$$

$$= 4\rho^2 - 12\rho \cos \theta + 9\cos^2 \theta + 9\sin^2 \theta$$

$$= |2f(x, y)|^2 \text{ riscritto in coord. polari}$$

Esempio PDE 1 (Partial Differential Equation)

Trovare tutte le funzioni $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$f_x(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Risposta: sono tutte le funzioni della sola y , cioè quelle del tipo

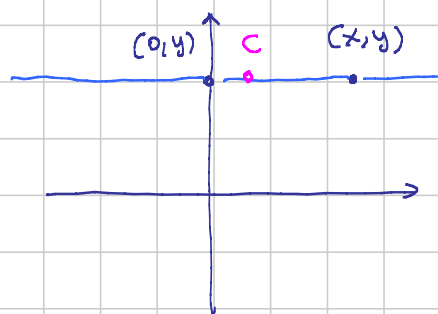
$$f(x, y) := g(y)$$

Lo dimostro con un Lagrange direzionale sulle rette // asse x

Osservo che

$$f(x, y) - f(0, y) = x \cdot \overset{0}{f_x(c, y)} = 0$$

↑
Lagr. diriz.



Quindi abbiamo dim. che

$$f(x, y) = f(0, y) =: g(y)$$

In modo equivalente posso considerare la restrizione $\varphi(t) = f(t, y)$ e osservare che $\varphi'(t) = 0$.

Esempio PDE 2 Trovare tutte le $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$f_x(x,y) = f_y(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Risposta: sono tutte e sole quelle del tipo

$$f(x,y) = g(x+y)$$

è ovvio che vanno bene,
ma non è ovvio che sono
le uniche

Idea: dimostrare che f è costante sulle rette del tipo $x+y = \lambda$
cioè sulle rette // alla bisettrice del II e IV quadrante

$$\gamma: (x_0+t, y_0-t) \quad \varphi(t) = f(x_0+t, y_0-t)$$

$$\varphi'(t) = \text{CHAIN RULE}$$

$$= f_x(x_0+t, y_0-t) \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ x_t}}{1} +$$

$$+ f_y(x_0+t, y_0-t) \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ y_t}}{(-1)} = 0$$

$\Rightarrow \varphi$ non dipende da t e quindi

$$f(x_0, y_0) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso } t=y_0}}{f(x_0+y_0, 0)} =: g(x_0+y_0)$$

Posso assegnare come mi pare f sull'asse x e poi estenderlo a tutto $\mathbb{R}^2$ rispettando l'equazione.

Oss. Anche se g fosse non differenziabile (non derivabile) possiamo pensare $f(x,y) = g(x+y)$ come una qualche soluz. di $f_x = f_y$.



ANALISI 2

LEZIONE 012

Note Title

10/10/2017

TAYLOR IN PIÙ VARIABILI

Analisi 1 $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $f: (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$.

Allora

$$f(x_0 + R) = \underbrace{\sum_{k \leq m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} R^k}_{\text{pol. di Taylor di ordine } n} + \underbrace{r_m(R)}_{\text{resto}}$$

→ **PEANO** $r_m(R) = o(R^m)$, cioè $\lim_{R \rightarrow 0} \frac{r_m(R)}{R^m} = 0$

Ipotesi: f derivabile $(m-1)$ volte in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

f derivabile m volte in x_0

→ **LAGRANGE** $r_m(R) = \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!} R^{m+1}$ con c compreso tra x_0 e $x_0 + R$

Ipotesi: f derivabile $(m+1)$ volte in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Analisi 2 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$, $f: B_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$.

Allora

$$f(x_0 + R) = \underbrace{\sum_{|p| \leq m} \frac{D^p f(x_0)}{p!} R^p}_{\text{pol. di Taylor di ordine } n \text{ con centro in } x_0} + \underbrace{r_m(R)}_{\text{resto}}$$

Per il resto esistono due versioni

→ **PEANO** $r_m(R) = o(|R|^m)$ cioè $\lim_{R \rightarrow 0} \frac{r_m(R)}{|R|^m} = 0$

$\uparrow$ limite su n variabili $\uparrow$ norma

Ipotesi: f ammette derivate

parziali di ordine fino a $(m-1)$ in $B_\delta(x_0)$

- le derivate di ordine $(m-1)$ di f sono differenz. in x_0 .

→ **LAGRANGE** $r_m(R) = \sum_{|p|=m+1} \frac{D^p f(c)}{p!} R^p$

dove c è un pto sul segmento di estremi x_0 e x_0+R

Ipotesi: f ammette derivate parziali fino all'ordine $(m+1)$ in $B_\delta(x_0)$.

— o — o —

FORMALISMO DEI MULTI-INDICI

Un multi-indice p è un vettore n -dim. a componenti naturali

$$p = (p_1, \dots, p_m) \quad p_i \in \mathbb{N}$$

Se p è multiindice, allora

- $|p| := p_1 + \dots + p_m \in \mathbb{N}$

- $p! := p_1! \cdot \dots \cdot p_m!$

- Se $x \in \mathbb{R}^m$, allora $x^p := x_1^{p_1} \cdot \dots \cdot x_m^{p_m}$

- Se $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, allora

$$D^p f(x_0) := \frac{\partial^{p_1 + \dots + p_m} f}{\partial x_1^{p_1} \cdot \dots \cdot \partial x_m^{p_m}}(x_0)$$

Scrittura dei primi termini di Taylor in dimensione 2 con centro in $(x_0, y_0) = (0, 0)$

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= f(0, 0) && \text{(ordine 0)} \\
 &+ f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y && \text{(ordine 1)} \\
 &+ \frac{1}{2!} [f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2] && \text{(ord. 2)} \\
 &+ \frac{1}{3!} [f_{xxx}(0, 0)x^3 + 3f_{x^2y}(0, 0)x^2y + 3f_{xy^2}(0, 0)xy^2 \\
 &\quad + f_{yyy}(0, 0)y^3] && \text{(ordine 3)}
 \end{aligned}$$

Coeff. di f_{xx} è $\frac{1}{2!} = \frac{1}{(2, 0)!}$

" " f_{xy} è $\frac{3}{3!} = \frac{1}{2} = \frac{1}{(2, 1)!}$ $\frac{1}{3!} \frac{3!}{2!1!}$

Brutalmente, all'ordine n viene una specie di binomio di Newton, cioè il termine di ordine n è

$$\frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n \frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^{n-i}}(0, 0) x^i y^{n-i} \binom{n}{i}$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{n!} \binom{n}{i} = \frac{1}{n!} \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{1}{(i, n-i)!} \\
 &= \sum_{|p|=n} \frac{D^p f(0, 0)}{p!} (x, y)^p
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n!} (x\partial_x + y\partial_y)^n$$

In 3 o più variabili, si tratta di fare la potenza del trinomio o peggio.

$$(x_1 + \dots + x_n)^k = \sum_{|p|=k} \frac{k!}{p!} x^p$$

Multiplinio di Newton scritto con i multi-ndici

Dimostrazione di Taylor

Lemma 1 (Derivate di un monomio)

$$D^q x^p(0) = \begin{cases} 0 & \text{se } q \neq p \\ p! & \text{se } q = p \end{cases} \quad (p \text{ e } q \text{ sono multi-indici})$$

Dim. Calcolare $D^q x^p$ è equivalente a calcolare

$$\frac{\partial^{q_1}}{\partial x_1^{q_1}} x_1^{p_1} \cdots \frac{\partial^{q_m}}{\partial x_m^{q_m}} x_m^{p_m} \quad \text{e poi è analisi 1.}$$

Lemma 2 (Derivate di un polinomio)

Sia $P(x)$ un polinomio in n variabili, che scrivo come

$$P(x) = \sum_{|p| \leq d} a_p x^p$$

↑ grado del polinomio (confermato dopo video)

Allora

$$(D^p P)(0) = p! a_p$$

Dim. Segue dal Lemma del monomio.

Lemma 3 (Caratterizzazione dei polinomi di Taylor)

Sia $P(x) := \sum_{|p| \leq n} \frac{D^p f(x_0)}{p!} x^p$. Allora

$$D^p P(0) = D^p f(x_0) \quad \forall p \text{ con } |p| \leq n$$

Dim. Segue dal Lemma del polinomio.

A questo punto si pone

$$\varphi(\mathbf{R}) := \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{R}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$$

e si osserva che tutte le derivate parziali di φ si annullano in $\mathbf{0}$ fino all'ordine n , cioè

$$D^p \varphi(\mathbf{0}) = 0 \quad \forall p \text{ con } |p| \leq n.$$

Lemma (alla Lagrange) Se φ ammette derivate fino all'ordine $(n+1)$ e quelle fino all'ordine n si annullano, allora

$$\varphi(\mathbf{R}) = \sum_{|p|=n+1} \frac{D^p \varphi(\mathbf{c})}{p!} \mathbf{R}^p$$

con $\mathbf{c}$ compreso tra $\mathbf{0}$ ed $\mathbf{R}$

Caso speciale in cui siamo in 2 variabili : $\varphi(\mathbf{R}, \mathbf{k})$

Pongo $\psi(t) := \varphi(\mathbf{R}t, \mathbf{k}t)$ (funzione di 1 variabile)
e osservo che

$$\varphi(\mathbf{R}, \mathbf{k}) = \psi(1) = \sum_{i=0}^n \frac{\psi^{(i)}(0)}{i!} \underset{\substack{\uparrow \\ t=1}}{t^i} + \frac{\overset{\substack{\uparrow \\ \text{conetto dopo video}}}{\psi^{(n+1)}(\mathbf{c})}}{(n+1)!} \underset{\substack{\uparrow \\ t=1}}{t^{n+1}}$$

Cui sono le derivate di ψ ? CHAIN RULE!

$$\psi'(t) = \varphi_x(\mathbf{R}t, \mathbf{k}t) \mathbf{R} + \varphi_y(\mathbf{R}t, \mathbf{k}t) \mathbf{k}$$

$$\psi''(t) = \varphi_{xx}(\mathbf{R}t, \mathbf{k}t) \mathbf{R}^2 + 2\varphi_{xy}(\mathbf{R}t, \mathbf{k}t) \mathbf{R}\mathbf{k} + \varphi_{yy}(\mathbf{R}t, \mathbf{k}t) \mathbf{k}^2$$

: per induzione

$$\psi^{(j)}(t) = \sum_{i=0}^j \frac{\partial^j \varphi}{\partial x^i \partial y^{j-i}}(\mathbf{R}t, \mathbf{k}t) \mathbf{R}^i \mathbf{k}^{j-i} \quad \text{da cui la tesi.}$$

ANALISI 2

LEZIONE 013

Note Title

11/10/2017

Taylor (finale) $x_0 \in \mathbb{R}^m$, $\delta > 0$, $f: B_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

$$f(x_0 + h) = \sum_{|p| \leq n} \frac{D^p f(x_0)}{p!} h^p + r_n(h)$$

• (PEANO) Supponiamo che

→ le deriv. parz. fino all'ordine $(n-1)$ esistono in $B_\delta(x_0)$

→ " " " " " " " solo differ. in x_0

(in particolare $D^p f(x_0)$ esiste fino all'ordine $|p| \leq n$ e valgono i teoremi di scambio)

Allora

$$r_n(h) = o(|h|^n)$$

• (LAGRANGE) Supponiamo che

→ le deriv. parz. fino all'ordine $(n+1)$ esistono in $B_\delta(x_0)$

→ avere ipotesi suff. per usare i te. di scambio fino all'ordine $(n+1)$, ad esempio tutte le deriv. parz. fino all'ordine n diff. in $B_\delta(x_0)$.

Allora

$$r_n(h) = \sum_{|p|=n+1} \frac{D^p f(c)}{p!} h^p$$

dove c sta sul segmento di estremi x_0 e $x_0 + h$ (ed è lo stesso per ogni p).

Caratterizzazione del polinomio di Taylor

Sotto le ipotesi date è l'unico $P(h)$, di grado $\leq n$, tale che

$$D^p P(0) = D^p f(x_0) \quad \forall |p| \leq n$$

Per dimostrare le formule, possiamo supporre per semplicità $x_0 = 0$ e considerare la funzione

$$\varphi(x) := f(x) - P(x)$$

la quale soddisfa

$$D^p \varphi(0) = 0 \quad \forall |p| \leq n. \quad (\star)$$

Lemma 4 (versione Peano) Supponiamo che $\varphi: B_\delta(0) \rightarrow \mathbb{R}$ abbia la regolarità prevista da Taylor - Peano e soddisfi $(\star)$. Allora

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{|x|^m} = 0 \quad (\text{cioè } \varphi(x) = o(|x|^m))$$

Dim. Il caso $m=0$ è la def. di funzione continua.
Il caso $m=1$ è la def. di differenziabile.

Per gli n successivi si procede per induzione.

Supponiamo la tesi vera per un certo n e dim. per $n+1$.

Sia φ che verifica le ipotesi di Taylor - Peano con ordine $n+1$.

Allora tutte le sue derivate prime soddisfano h_p di ordine n , dunque sono $o(|x|^m)$. Ma allora

$$|\nabla \varphi(x)| = o(|x|^m).$$

Ora per Lagrange - direzionale vale

$$|\varphi(x)| = |\varphi(x) - \varphi(0)| = |\langle \nabla \varphi(c), x \rangle| \leq |\nabla \varphi(c)| \cdot |x|$$

$\uparrow$ Lagrange $\uparrow$ c.s.

Ora

$$\frac{|\varphi(x)|}{|x|^{m+1}} \leq \underbrace{\frac{|\nabla \varphi(c)|}{|c|^m}}_{=0} \underbrace{\frac{|c|^m}{|x|^m}}_{\leq 1 \text{ perché } |c| \leq |x|} \frac{|x|}{|x|}$$



In alternativa, posso usare più la definizione.
Dato $\varepsilon > 0$ esiste $R > 0$ t.c.

$$|\nabla \varphi(y)| \leq \varepsilon |y|^m \quad \text{se } |y| \leq R$$

Ora concludo osservando che per $|x| \leq R$ vale

$$\frac{|\varphi(x)|}{|x|^{m+1}} \leq \frac{|\nabla \varphi(c)| \cdot |x|}{|x|^{m+1}} \leq \frac{\varepsilon |c|^m \cdot |x|}{|x|^{m+1}} \leq \frac{\varepsilon |x|^{m+1}}{|x|^{m+1}} = \varepsilon.$$

$\uparrow$
 $|c| \leq R$
 $\text{---} \quad \circ \quad \text{---} \quad \circ \quad \text{---}$

Lemma 4 (Versione Lagrange) Supponiamo $\varphi: B_\delta(0) \rightarrow \mathbb{R}$ abbia la regolarità ... e soddisfi $(\star)$.

Allora per ogni $x \in B_\delta(x)$ esiste c sul segmento di estremi 0 ed x t.c.
 $\uparrow$ dipende da x

$$\varphi(x) = \sum_{|p|=m+1} \frac{D^p \varphi(c)}{p!} x^p$$

(Se siamo in 2 variabili la dimostrazione è ragionevole)

"Dim" Fissato $x \in B_\delta(0)$, considero la funzione di una variabile

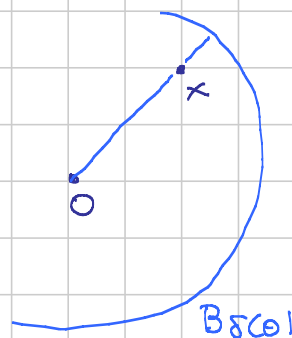
$$\psi(t) := \varphi(tx)$$

definita in un intorno di $[-1, 1]$

alla quale posso applicare il
Taylor Lagrange di Analisi 1.

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^m \frac{\psi^{(k)}(0)}{k!} t^k + \frac{\psi^{(m+1)}(t_0)}{(m+1)!} t^{m+1}$$

da cui



$$\varphi(x) = \varphi(1) = \sum_{k=0}^n \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{\varphi^{(n+1)}(t_0)}{(n+1)!} \quad t_0 \in (0,1)$$

Per concludere devo calcolare le derivate di φ in funzione di quelle di φ usando la chain-rule.

La formula è

$$\varphi^{(k)}(t) = k! \sum_{|p|=k} \frac{D^p \varphi(tx)}{p!} x^p$$

Si dirà, per inclus. benino se $m=2$ (es. prec.) e malino per un generico (come il m-nomio di Newton)

Da questa formula segue la tesi (anzi qui non serve nemmeno l'ipotesi $(\star)$).

Il c richiesto è $t_0 x$.

— o — o —

Come calcolo praticamente i polinomi di Taylor? Analisi 1!!

Esempio 1 $f(x,y) = \sin(x+y) e^{xy} \quad n=4$

$$\sin(x+y) = (x+y) - \frac{1}{6}(x+y)^3 + o((x+y)^4)$$

$$e^{xy} = 1 + xy + \frac{1}{2}x^2y^2 + o(|(x,y)|^4) \quad o(|(x,y)|^4)$$

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2$$

$$f(x,y) = (x+y) - \frac{1}{6}(x+y)^3 + xy(x+y) + o(p^4)$$

Esempio 2 $f(x,y) = y \arctan(x^2) + \sin(xy^2) \quad n=5$

$$f(x,y) = y(x^2 + o(x^2)) + xy^2 = yx^2 + xy^2 + o(p^5) \quad o((x^2+y^2)^{5/2})$$

Quale sarebbe il termine successivo?

Sarebbe $-\frac{1}{3}yx^6$, quello dopo $-\frac{1}{6}x^3y^6$

Esempio 3 Sia $f(x,y)$ come sopra.

Calcolare $\frac{\partial^8 f}{\partial x^6 \partial y^2}(0,0)$.

Banalmente 0, perché nel pol. di Taylor sarebbe il coeff. di $x^6 y^2$.
In questo caso tutte le derivate di ordine 8 si annullano.

Calcolare $\frac{\partial^7 f}{\partial x^6 \partial y}(0,0)$

Guardo Taylor!

$$f(x,y) = \dots - \frac{1}{3} x^6 y + \dots = \frac{D^{(6,1)} f(0,0)}{(6,1)!} x^6 y$$

$$\leadsto D^{(6,1)} f(0,0) = -\frac{1}{3} \cdot (6,1)! = -\frac{1}{3} \cdot 6! = -240.$$

Esempio 4 $f(x,y) = \arctan(y \sin x)$ $n=4$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \arctan\left(y\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)\right) \\ &= \arctan\left(xy - \frac{1}{6}x^3y + o(yx^4)\right) \\ &= xy - \frac{1}{6}x^3y + o(p^4) \end{aligned}$$

Se volessi $n=6$ dovrei aggiungere un termine nello sviluppo di $\sin x$ e tenere conto di $-\frac{1}{3}x^3y^3$ che arriva da $\arctan$.

ANALISI 2

-

LEZIONE 014

Titolo nota

11/10/2017

Ripasso forme quadratiche

Def. Una forma quadratica in n variabili è una somma di monomi di grado 2, quindi un pol. di grado 2.
In simboli

$$q(x) := \sum_{|p|=2} a_p x^p$$

Esempi In dim. 2 sono tutte e sole quelle del tipo

$$q(x, y) = ax^2 + by^2 + 2cxy$$

$$\text{Dim 3} \rightsquigarrow q(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2eyz + 2fzx$$

Scrittura matriciale A ogni forma quadratica posso associare una matrice M simmetrica t.c.

$$q(x) = x^t M x$$

$$ax^2 + by^2 + 2cxy \rightsquigarrow M = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

$$\text{Dim 3} \rightsquigarrow M = \begin{pmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{pmatrix}$$

— o — o —

Prop. Una forma è

- def. pos. $\Leftrightarrow i_+ = n$ (quindi $i_- = i_0 = 0$)
- semidef. pos $\Leftrightarrow i_- = 0$ (quindi $i_+ + i_0 = n$)
- def. neg. $\Leftrightarrow i_- = n$
- semidef. neg $\Leftrightarrow i_+ = 0$
- indefinita $\Leftrightarrow i_+ \geq 1$ e $i_- \geq 1$

Come si calcolano i 3 indici ? Ci sono almeno 4 modi

① Faccio gli autovalori della matrice. Vengono reali perché è simmetrica. A quel punto

$$\begin{array}{lcl} i_+ = \# \text{ autov. positivi} & & \\ i_- = \# \text{ " neg.} & \} & \text{tenendo conto delle} \\ i_0 = \# \text{ " nulli} & & \text{multiplicità} \end{array}$$

Commento : praticamente molto scomodo

② Completamento dei quadrati : scrivo la forma come somma / differenza di $\square$ di termini lin. indep.

A quel punto

$$\begin{array}{l} i_+ = \# \text{ termini con segno +} \\ i_- = \# \text{ termini con segno -} \\ i_0 = \text{ciò che rimane} \end{array}$$

Esempio $x^2 + 2y^2 + 4xy = x^2 + 4xy + 4y^2 - 2y^2$

$$= (x+2y)^2 - (\sqrt{2}y)^2$$

quindi $i_+ = i_- = 1$ e $i_0 = 0$.

③ Metodo dei minori orlati



Scrivo il segno del det. sulla diag. princ., metto un + a sx e guardo variazioni e permanenze di segno

i_-

i_+

aggiunto

Esempio: matrice 5×5 con segni

$$\begin{array}{c}
 + \mid + + - + + \\
 \underbrace{\quad} \underbrace{\quad} \underbrace{\quad} \underbrace{\quad} \underbrace{\quad} \\
 p \quad p \quad v \quad v \quad p
 \end{array}$$

$i_+ = 3 \quad i_- = 2.$

Esempio matrice 6×6

$$\begin{array}{c}
 + \mid + - 0 + - 0 \\
 \underbrace{\quad} \underbrace{\quad} \underbrace{\quad} \underbrace{\quad} \underbrace{\quad} \\
 ++ -- \\
 ++ ----
 \end{array}$$

$i_0 = 1, i_+ = 2, i_- = 3.$

Oss. Posso procedere anche in dir. diversa



④ Cotesio: quando i coeff. $\neq 0$ del pol. caratteristico

i_0 = quando termine grado minimo

variazioni = i_+ , i_- = ciò che rimane

— 0 — 0 —

corretto dopo video

Dim. prop. principale Dimostro che vale la tesi con

$$m := \min \{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \}$$

↑ autovalori della matrice M .

Sappiamo che la matrice è simmetrica. Per il teo. spettrale sappiamo che è diag. mediante matrice ortogonale, cioè esiste A t.c.

$$A M A^{-1} = D$$

A^t

$$A M A^t = D$$

oppure, che è lo stesso,

$$M = A^t D A$$

Ora

$$q(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def.}}}{x^t} M \underset{\substack{\uparrow \\ \text{formula}}}{x} = x^t A^t D A x = (Ax)^t D (Ax)$$

$$\begin{aligned} &\geq m |Ax|^2 \\ &= m |x|^2 \end{aligned}$$

spero $\nearrow$

L'ultimo passaggio segue da

$$|Ax|^2 = (Ax)^t Ax = x^t \underbrace{A^t A}_{Id} x = x^t x = |x|^2$$

Resta solo da dimostrare che

$$v^t D v \geq m |v|^2 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

La matrice D ha sulla diagonale $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gli autov. di M .
Scritto $v = (v_1, \dots, v_n)$ otteniamo

$$v^t D v = \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \dots + \lambda_n v_n^2$$

$$\geq m (v_1^2 + \dots + v_n^2) = m |v|^2.$$

se
 $\lambda_i \geq m$
per ogni i

— o — o —

Def. Si definisce matrice Hessiana la matrice che ha come elementi le derivate seconde di una funzione di n variabili

$$(Hf(x_0))_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (x_0)$$

Sotto ip. ragionevoli è simmetrica e gioca il ruolo della derivata 2^a di analisi 1.

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 015

Note Title

13/10/2017

Matrice Hessiana e studio locale di un pto stazionario

$$\{Hf(x_0)\}_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \quad \text{matrice } n \times n$$

Taylor di ordine 2

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), R \rangle + \frac{1}{2} q(R) + o(|R|^2)$$

dove $q(R)$ è una forma quadratica in R che è quella associata alla matrice Hessiana, quindi

$$q(R) = R^t Hf(x_0) R$$

Ad esempio, se siamo in due variabili, la formula diventa

$$f(x_0 + R, y_0 + k) = f(x_0, y_0)$$

$$+ f_x(x_0, y_0) R + f_y(x_0, y_0) k$$

$$+ \frac{1}{2} [f_{xx}(x_0, y_0) R^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0) Rk + f_{yy}(\dots) k^2]$$

$$q(R, k) = (R, k) \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ k \end{pmatrix}$$

$$+ o(R^2 + k^2)$$

Def. Un p.to x_0 si dice stazionario per $f(x)$ se

$$\nabla f(x_0) = 0$$

sistema di n equazioni

Teorema Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$, sia $\delta > 0$, sia $f: B_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione

Supponiamo che

(i) f ammette derivate parziali fino all'ordine 2 continue in $B_\delta(x_0)$ (ma forse un po' si può risparmiare)

(ii) x_0 p.to stazionario.

Allora valgono queste implicazioni.

- $Hf(x_0)$ def. pos. $\Rightarrow x_0$ p.to di min. loc.
- $Hf(x_0)$ def. neg. $\Rightarrow x_0$ p.to di max. loc.
- $Hf(x_0)$ indefinita $\Rightarrow x_0$ non è né max, né min. loc.
- $Hf(x_0)$ solo semidef. pos./neg. $\Rightarrow$ BOM (entrano in gioco i termini succ.)

Dim. $Hf(x_0)$ def. pos. Per la proprietà fondamentale

$$\exists m > 0 \quad \text{t.c.} \quad q(R) \geq m |R|^2 \quad \forall R \in \mathbb{R}^n$$

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + \underbrace{\langle \nabla f(x_0), R \rangle}_0 + \frac{1}{2} q(R) + |R|^2 \omega(R) \geq m |R|^2$$

$$f(x_0 + R) - f(x_0) \geq m |R|^2 + |R|^2 \omega(R)$$

$$= |R|^2 (m + \omega(R))$$

$\downarrow$
 $\exists \delta_0 \in (0, \delta)$ t.c. questo termine è ≥ 0 se $|R| \leq \delta_0$

Da questo deduco che

$$f(x_0 + R) \geq f(x_0) \quad \text{se} \quad |R| \leq \delta_0$$

Posso in realtà fare meglio, cioè scegliere δ_0 t.c.

$$u + w(R) \geq \frac{m}{2} \quad \forall R \text{ con } |R| \leq \delta_0$$

Così facendo ottengo che

$$f(x_0 + R) > f(x_0) \quad \forall R \text{ con } 0 < |R| < \delta_0$$

cioè x_0 è un pto di min. loc. stretto.

Hf(x_0) def. neg. Stessa cosa con $q(R) \leq -m|R|^2$ con $m > 0$.

Hf(x_0) indefinita Per ipotesi sappiamo che

$$\begin{aligned} \exists v \in \mathbb{R}^n & : q(v) < 0 \\ \exists w \in \mathbb{R}^n & : q(w) > 0 \end{aligned}$$



Considero

$$\begin{aligned} f(x_0 + tw) &= f(x_0) + \frac{1}{2} q(tw) + |tw|^2 w(tw) \\ \uparrow \\ \text{mi muovo in} & \text{ direzione } w \\ &= f(x_0) + \frac{1}{2} t^2 q(w) + t^2 |w|^2 w(tw) \end{aligned}$$

$$f(x_0 + tw) - f(x_0) = t^2 \left(\underbrace{\frac{1}{2} q(w) + |w|^2 w(tw)}_{\substack{\downarrow \\ \frac{1}{2} q(w), \text{ quindi è positivo} \\ \text{quando } t \text{ è abbastanza} \\ \text{vicino a } 0}} \right)$$

Analogamente

$$f(x_0 + tv) - f(x_0) = t^2 \left(\underbrace{\frac{1}{2} q(v) + |v|^2 v(tv)}_{\substack{\downarrow \\ \text{negativo quando } t \text{ è vicino a } 0. \\ \text{---} \text{ } 0 \text{ } \text{---} \text{ } 0 \text{ } \text{---}}}} \right)$$

Interpretazione "montana"



Direzioni con $q(v) < 0 \leadsto$ si vede un max locale
 " " $q(w) > 0 \leadsto$ si vede un min. locale.

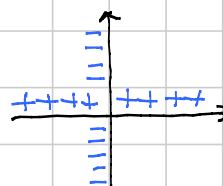
Achtung! Negli altri casi non si può dedurre nulla

• $f(x, y) = x^2 + y^4$ $Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0$ (semidef. pos.)

$(0, 0)$ è p.to di min. loc. stretto perché $f(x, y) > 0$ se $(x, y) \neq (0, 0)$

• $f(x, y) = x^2 - y^4$ $Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0$ come prima

$(0, 0)$ non è max/min



Esempio 1 $f(x, y) = \sin x \cdot \arctan y$ $(x_0, y_0) = (0, 0)$

$f(x, y) = xy + o(x^2 + y^2) \Rightarrow \nabla f(0, 0) = (0, 0) \Rightarrow$ p.to staz.

$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ indefinita $\Rightarrow (0, 0)$ non è p.to di max/min $\leadsto$ sella.

Esempio 2 $f(x, y) = \cos x \cdot \cos y$ $(x_0, y_0) = (0, 0)$

$f(x, y) = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{2}\right) + o(x^2 + y^2)$

$= 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + o(x^2 + y^2) \Rightarrow \nabla f(0, 0) = (0, 0)$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{def. neg.} \Rightarrow (0,0) \text{ p.to di max}$$

(pure globale perché $f(x,y) \leq 1$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $f(0,0) = 1$)

Esempio 3 $f(x,y) = x \cos y - y \cos x$

$$f(x,y) = x - y + o(\sqrt{x^2 + y^2}) \Rightarrow (0,0) \text{ non è stazionario}$$

Esempio 4 $f(x,y) = x \arctan y - y \arctan x$

$$f(x,y) = \cancel{xy} - \cancel{yx} + o(x^2 + y^2) \Rightarrow \text{gradiente e } Hf(0,0) \text{ nulli !!}$$

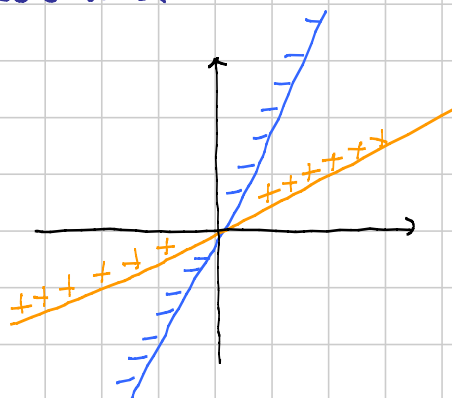
Entrano in gioco i termini successivi

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x \left(y - \frac{1}{3} y^3 \right) - y \left(x - \frac{1}{3} x^3 \right) + o((x^2 + y^2)^2) \\ &= -\frac{1}{3} xy^3 + \frac{1}{3} yx^3 = \frac{1}{3} xy(x^2 - y^2) + o(\dots) \end{aligned}$$

non ha un segno

$$f(2t, t) = \frac{1}{3} 2t \cdot t (3t^2) + o(t^4) \rightsquigarrow \text{qui vedo min}$$

$$f(t, 2t) = -\frac{1}{3} 2t^4 + o(t^4) \rightsquigarrow \text{qui vedo max}$$



Esempio 5 $f(x,y) = x^4 + y^2 + x^2y$

$$\nabla f(0,0) = (0,0) \quad Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \geq 0$$

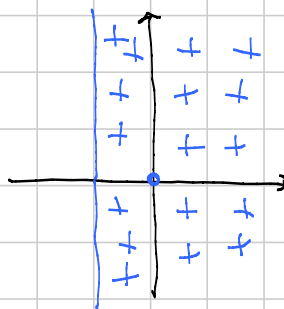
$$f(x,y) = x^4 + x^2y + \frac{y^2}{4} + \frac{3y^2}{4} = \left(x^2 + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$$

$\Rightarrow f(x,y) \geq 0$ sempre $\Rightarrow (0,0)$ p.to min. loc.

Esempio 6 $f(x,y) = x^4 + y^2 + xy^2$

$$f(x,y) = x^4 + y^2 \underbrace{(1+x)}_{\substack{\text{positivo} \\ \text{vicino a } (0,0)}}$$

$\Rightarrow f(x,y) \geq 0$ per (x,y) vicino all'origine



ANALISI 2

—

LEZIONE 016

Note Title

13/10/2017

Esercizio 1 Consideriamo $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = |x|^2.$$

Calcolare $\nabla f(x)$ e $Hf(x)$.

Provo a dedurli da Taylor

$$f(x_0 + R) = |x_0 + R|^2 = |x_0|^2 + |R|^2 + 2 \langle x_0, R \rangle$$

$$= |x_0|^2 + \langle 2x_0, R \rangle + |R|^2$$

$$\begin{array}{ccc} \text{"} & \text{"} & \uparrow \\ f(x_0) & \langle \nabla f(x_0), R \rangle & \frac{1}{2} R^t Hf(x_0) R \end{array}$$

$$\Rightarrow \nabla f(x_0) = 2x_0$$

$$Hf(x_0) = 2 \text{Id}$$

In alternativa: penso $f(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$ e faccio i conti

Esercizio 2 Sia M una matrice qualunque, di dim. $n \times n$.
Stessa cosa con la funzione

$$f(x) = \langle Mx, x \rangle \quad \begin{array}{l} \text{(si può scrivere anche se} \\ \text{ } M \text{ non è simmetrica)} \\ \uparrow \text{ canonico} \end{array}$$

$$f(x_0 + R) = \langle M(x_0 + R), x_0 + R \rangle = \langle Mx_0 + MR, x_0 + R \rangle$$

$$= \underbrace{\langle Mx_0, x_0 \rangle}_{f(x_0)} + \underbrace{\langle Mx_0, R \rangle + \langle MR, x_0 \rangle}_{\langle \nabla f(x_0), R \rangle} + \underbrace{\langle MR, R \rangle}_{\frac{1}{2} R^t Hf(x_0) R}$$

$$\begin{aligned} \langle Mx_0, R \rangle + \langle MR, x_0 \rangle &= \langle Mx_0, R \rangle + \langle x_0, MR \rangle \\ &= \langle Mx_0, R \rangle + \langle M^t x_0, R \rangle \\ &= \langle (M + M^t)x_0, R \rangle \end{aligned}$$

da cui deduco che $\nabla f(x_0) = (M + M^t)x_0$

$$f(x) = \langle Mx, x \rangle = (Mx)^t x = x^t M^t x = \langle x, M^t x \rangle$$

$$\langle Mx_0, R \rangle = (Mx_0)^t R = x_0^t M^t R = \langle x_0, M^t R \rangle$$

$$\langle x_0, MR \rangle = x_0^t MR = (M^t x_0)^t R = \langle M^t x_0, R \rangle$$

$$\langle MR, x_0 \rangle = (MR)^t x_0 = R^t M^t x_0 = \langle R, M^t x_0 \rangle$$

$$\begin{aligned} &= (R^t M^t x_0)^t = x_0^t M R \\ &= (M^t x_0)^t R \\ &= \langle M^t x_0, R \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle Mx_0, R \rangle + \langle MR, x_0 \rangle &= \langle Mx_0, R \rangle + \langle M^t x_0, R \rangle \\ &= \langle (M + M^t)x_0, R \rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \nabla f(x_0) = (M + M^t)x_0$$

Per l'Hessiana devo scrivere $\langle MR, R \rangle = \frac{1}{2} R^t H_f(x_0) R$
↑
simmetrica!!!

Quello che lo fa funzionare è

$$H_f(x_0) = M + M^t \quad (\text{basta fare il conto!})$$

Osservazione finale Dall'altro potevo scrivere

$$M = \underbrace{\frac{1}{2} (M + M^t)}_{\text{parte simm.}} + \underbrace{\frac{1}{2} (M - M^t)}_{\text{parte antisimm.}} = S + A$$

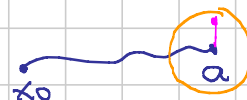
$$\text{A quel p.to} \quad \underbrace{\langle Mx, x \rangle}_{=0} = \underbrace{\langle Sx, x \rangle}_{=0}$$

Esercizio 3 Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto connesso.

Allora D è connesso per archi, addirittura per archi C^1 o C^∞ .

Prendo $x_0 \in D$ e chiamo A l'insieme dei punti $a \in D$ per cui esiste un arco che congiunge x_0 ed a .

Fatto 1 : A è aperto : se da x_0 arrivo in a , poi arrivo in ogni p.to di un intorno di a andando lungo il segmento. Se lo voglio C^∞ basta fare un raccordo.



Fatto 2 : A è chiuso in D . Lo dim. con la succ.

Sia $\{a_m\} \subseteq A$ una succ. tale che $a_m \rightarrow a_\infty \in D$.
Devo dim. che $a_\infty \in A$.

Prendo una $B_\delta(a_\infty) \subseteq D$,
prendo un $a_m \in B_\delta(a_\infty)$, e ne ho infiniti a disposizione, e poi faccio il cammino



$x_0 \rightsquigarrow a_m \rightsquigarrow a_\infty$
 $\quad \uparrow \quad \quad \uparrow$
 esiste dirrettissima
 perché $a_m \in A$

Fatto 3 : $x_0 \in A$

Quindi $A \neq \emptyset$, A è aperto e chiuso in $D \Rightarrow A = D$ per connessione.

— o — o —

Esercizio 4 Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e CONNESSO. Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile. Supponiamo che

$$\nabla f(x) = 0 \quad \forall x \in D.$$

Allora f è costante in D .

Dim. SE D fosse CONVESSO, allora sarebbe Lagrange
direzionale.

Fisso $x_0 \in D$ e pongo

$$A := \{x \in D : f(x) = f(x_0)\}$$

• Fatto 1 : $A \neq \emptyset$ ($x_0 \in A$)

• Fatto 2 : A è chiuso in D . Segue dalla continuità
e dal fatto che

$$A = f^{-1}(\{f(x_0)\}) \quad (\text{controimmagine di un chiuso})$$

• Fatto 3 : A è aperto. Se $a \in A$, e $B_\delta(a) \subseteq D$, allora
in $B_\delta(a)$ posso usare Lagrange direzionale

Per connessione $A = D$.



Variante interessante

Vale la stessa conclusione se
assumo solo che f_x e f_y esistono e
sono nulle in ogni p.to ?

(serve una specie di connessione per
anche // agli assi)

Esercizio 5 Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Sia $I = \text{immagine di } f$.

Allora tutti gli elementi di I , tranne al + 2, sono
assunti infinite volte, cioè

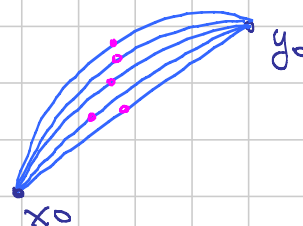
$f^{-1}(\{i\})$ ha infiniti elementi $\forall i \in I$
 $\uparrow$
 con al max
 2 eccezioni

Supponiamo che $i \in I$ non sia max/min.

Allora necessariamente

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}^n : f(x_0) > i$$

$$\exists y_0 \in \mathbb{R}^n : f(y_0) < i$$



Esistono infinite curve

continue che vanno da x_0 a y_0 senza intersecarsi se non negli estremi.

Su ogni curva c'è un pto in cui $f(x) = i$ e non è un estremo (basta considerare la restrizione)

Quindi le linee di livello o sono $\emptyset$, o hanno infiniti pti, o sono quelle che corrispondono a max/min.

Esercizio (HARD-HARD) Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ .

Supponiamo che f abbia esattamente due punti di min. globale

Possiamo dire che ha almeno un altro pto stazionario?

ANALISI 2

LEZIONE 017

Note Title

17/10/2017

TEOREMA (Caratterizzazioni della compattezza)Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme $\neq \emptyset$.

Allora i seguenti fatti sono equivalenti.

- (1) K è CHIUSO e LIMITATO
- (2) K è compatto per successioni
- (3) K è compatto per ricoprimenti

Ripasso definizioni

- chiuso vuol dire che il complementare è aperto

$$\forall x_0 \notin K \quad \exists r > 0 \quad \text{t.c.} \quad B_r(x_0) \cap K = \emptyset$$

- limitato vuol dire che $\exists R > 0$ t.c. $K \subseteq B_R(0)$

- compatto per succ. vuol dire $\forall \{x_n\} \subseteq K \quad \exists x_\infty \in K$ ed $\exists \{n_k\} \subseteq \mathbb{N}$ strett. cresc. t.c. $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$

- compatto per ricopr. vuol dire $\forall \{U_i\}_{i \in I}$ di aperti di $\mathbb{R}^n$ con

$$K \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

$$\exists J \subseteq I, \text{ con } J \text{ finito, t.c.} \quad K \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i.$$

Dim di (2) $\Rightarrow$ (1)

- (2) $\Rightarrow$ limitato. Supponiamo per assurdo che K non sia limitato. Allora

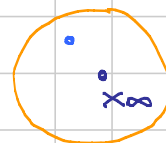
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in K \setminus B_n(0)$$

Questa x_n non può avere s.succ.com. (le succ. com. sono lim.)

- (2) $\Rightarrow$ chiuso. Supponiamo che K non lo sia. Allora

$\exists x_\infty \in \text{Clos}(K) \setminus K$, cioè

$\forall r > 0 \quad \exists x \in K \cap B_r(x_\infty)$



Me la gioco con $r = \frac{1}{n}$ e trovo x_n t.c. $x_n \rightarrow x_\infty \notin K$
 $\Rightarrow x_n$ non può avere s.succ. conv. ad el. di K .

Dim. che (1) $\Rightarrow$ (2) Per semplicità supponiamo $K \subseteq \mathbb{R}^2$

Sia $\{(x_n, y_n)\} \subseteq K$ una succ.

Essendo K limitato, esiste almeno un $R > 0$ t.c.

$$x_n^2 + y_n^2 \leq R^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- Da sopra deduco che $|x_n| \leq R \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Allora $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ è una succ. limitata.

Bolzano - Weierstrass $\Rightarrow \exists x_{n_k} \rightarrow x_\infty \in \mathbb{R}$

- Sempre da sopra deduco che $|y_{n_k}| \leq R \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Allora $\{y_{n_k}\} \subseteq \mathbb{R}$ è una succ. lim.

Bolzano - W $\Rightarrow$

$$\exists y_{m_{k_i}} \rightarrow y_\infty \in \mathbb{R}$$

Osservo che $x_{m_{k_i}} \rightarrow x_\infty \in \mathbb{R}$ (sotto della prec.)

Dico che $(x_{m_{k_i}}, y_{m_{k_i}}) \rightarrow (x_\infty, y_\infty) \in K$

Sta in K perché è chiuso. La conv. segue da

$$\sqrt{(x_{m_{k_i}} - x_\infty)^2 + (y_{m_{k_i}} - y_\infty)^2} \rightarrow 0$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 0 0

Oss. La dimostrazione è analoga, solo che ogni volta devo estrarre la s.succ. dalla precedente.
Formalmente è involuzione.

Esercizio Dimostrare le equivalenze con la (3) 😊

Teorema di Weierstrass Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $f: K \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f sia continua

(ii) K sia compatto. ($K \neq \emptyset$)

Allora esistono $\max/\min \{f(x) : x \in K\}$

Se sei accontento del minimo, basta assumere f SC!
 ↑
semicont. inf.

Dim Pongo

$$I := \inf \{f(x) : x \in K\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

$$\exists \{y_n\} \subseteq f(K) \text{ t.c. } y_n \rightarrow I \quad (\text{solito lemma})$$

$$\exists \{x_n\} \subseteq K \text{ t.c. } f(x_n) = y_n \quad (\text{def. di min.})$$

$$\exists x_{n_k} \rightarrow x_\infty \in K \quad (K \text{ compatto})$$

Finale con continuità:

$$f(x_\infty) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} y_{n_k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = I$$

↑
f cont.
↑
def. x_n
↑
s.succ.
↑
def. y_n

Finale con SC!

$$I \leq f(x_\infty) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) = \liminf_{k \rightarrow +\infty} y_{n_k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = I$$

↑
def. I
↑
SC
↑
def. x_n
↑
s.succ. di
succ. conv.
↑
def di I

Conclusione: $f(x_\infty) = I$, che finalmente è reale ed è minimo.

— o — o —

Variaute 1 Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ con $D \neq \emptyset$, sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f è sc1

(ii) esiste un sottolivello non vuoto contenuto in un compatto, cioè

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \exists K \subseteq D \text{ compatto t.c. } \underbrace{\{x \in D : f(x) \leq M\}}_{\text{sottolivello}} \subseteq K$$

Allora esiste

$$\min \{f(x) : x \in D\}.$$

Dim. (La battaglia per il min. si gioca nel sottolivello)

Per W vero sappiamo che f ammette min. su K .

Sia $x_0 \in K$ un p.to di min. su K . Dico che x_0 è p.to di min. su D . Prendo un qualunque $x \in D$ e osservo che

• se $x \in K$, allora $f(x) \geq f(x_0)$ (per defn. di x_0)

• se $x \notin K$, allora $f(x) > M \geq f(x_0)$
 $\uparrow$ def. di K $\uparrow$ gli el. di D contribuiscono al minimo.

— o — o —

Variaute 2 Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che

(i) f è sc1

(ii) vale che

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Allora esiste

$$\min \{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$$

Dim. Scelgo un pto a caso, ad esempio 0, e considero

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \underbrace{f(0)}_M\}$$

È evidente che il sottolivello è

- $\neq \emptyset$ ($0 \in \text{s.liv.}$)
- chiuso (f è sc1) (se $x_n \rightarrow x_\infty$, $f(x_\infty) \leq \liminf f(x_n) \leq f(0)$)
- limitato. Infatti per il limite esiste R t.c.

$$f(x) \geq f(0) + 2017 \quad \text{quando } |x| \geq R$$

quindi tutti gli el. del sottolivello stanno in $B_R(0)$.

Quindi il sottoliv. è cpt. $\Rightarrow$ variante precedente.

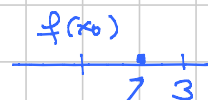
Esercizio Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f è sc1

(ii) $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 3$

(iii) esiste $x_0 \in \mathbb{R}^n$ t.c. $f(x_0) < 3$



Dim. Considero $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \frac{3+f(x_0)}{2}\}$

Oss. Stessa conclusione se assumo $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n : f(x_0) = 3$

Infatti

- $\circ$ esiste pure $y_0 \in \mathbb{R}^n$ t.c. $f(y_0) < 3 \leadsto$ come prima
- $\circ$ $f(x) \geq 3$ sempre $\leadsto 3$ è il minimo.

Supponiamo $K \subseteq \mathbb{R}^n$ cpt. e $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ continua.
Quali sono candidati ad essere p.ti di max/min?
Tre categorie

① p.ti stazionari interni, cioè $x \in \text{Int}(K)$ t.c.

$$\nabla f(x) = 0 \quad (\text{sistema di } n \text{ equ. in } n \text{ incognite})$$

↑
Deve esistere...

② p.ti singolari interni, cioè $x \in \text{Int}(K)$ t.c.

$\nabla f(x)$ non esiste.

③ p.ti $x \in \partial K$ (e questi sono sempre infiniti p.ti)

Dim. Sia x_0 p.to di max/min.

• Se sta in ② o ③, allora bene

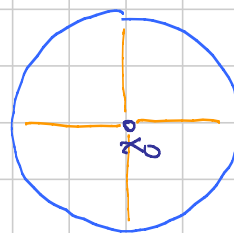
• Se $x_0 \in \text{Int}(K)$ e $\nabla f(x_0)$ esiste, allora devo dedurre che

$$\nabla f(x_0) = 0.$$

Basta osservare che x_0 è p.to di max/min per le restrizioni alle rette $x_0 + te_i$.

Quindi se le derivate parziali esistono sono nulle per forza.

— o — o —



ANALISI 2

-

LEZIONE 018

Titolo nota

17/10/2017

ROAD MAP PER PROBLEMI MAX/MIN

Setting : data $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, trovare max/min.

Esistenza $\rightarrow$ banale se f continua + D compatto
 $\rightarrow$ grosso pbm. se D non è cpt. (nessuna regola, se non le varianti di W.)

Trovare esplicitamente

- $\rightarrow$ vedere a occhio
- $\rightarrow$ linee di livello
- $\rightarrow$ procedura standard con staz., sing. e pti di bordo.

Per il bordo vedremo 2 metodi

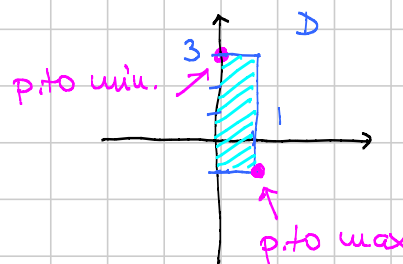
- param. del bordo
- moltiplicatori di Lagrange.

— o — o —

Esempio 1 $f(x,y) = 3x - 2y$ $D = [0,1] \times [-1,3]$

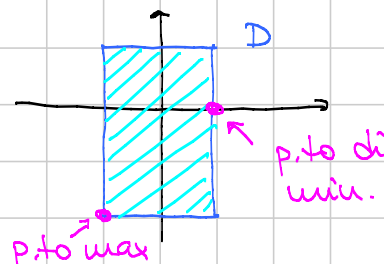
A occhio vedo che

- $\max f = f(1, -1) = 5$
 $\uparrow$
 $x + \text{grande possibile}$
 $y + \text{neg. possibile}$
- $\min f = f(0, 3) = -6$



Esempio 2 $f(x,y) = y^2 - 3x$ $D = [-1,1] \times [-2,1]$

- $\max f = f(-1, -2) = 7$
- $\min f = f(1, 0) = -3$



Esempio 3 $f(x,y) = x + 2y$

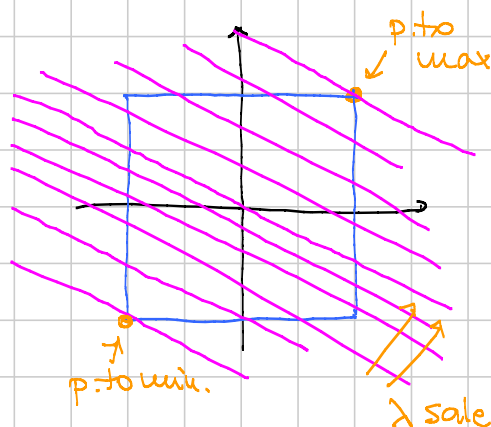
$$D = [-1, 1] \times [-1, 1]$$

- $\max f = f(1, 1) = 3$
- $\min f = f(-1, -1) = -3$

In alternativa, guardo le linee di livello di $f(x,y)$:

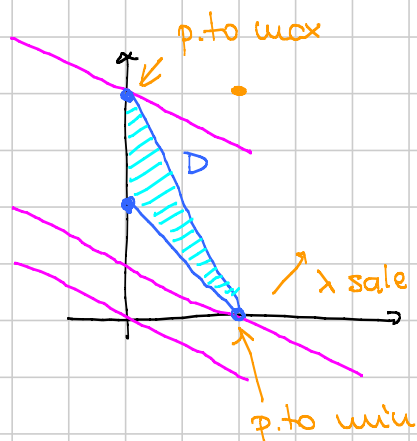
$$x + 2y = \lambda \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{\lambda}{2}$$

- $\max f =$ massimo valore di λ per cui la linea tocca D
- $\min f =$ minimo " " " " " "



Esempio 4 $f(x,y) = x + 2y$

$D =$ triangolo chiuso con vertici in $(0,1), (0,2), (1,0)$



Non pensare nemmeno:

$\max f = x + \text{grande} + y + \text{grande}$
 $\leadsto (1,2) \leadsto 7$

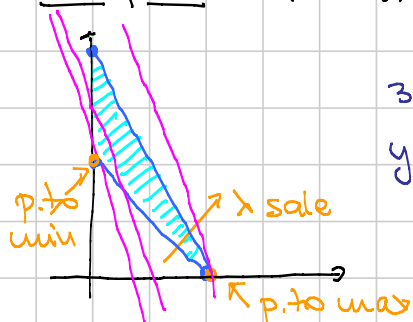
Guardando le linee di livello

$$\bullet \max f = f(0, 2) = 4$$

$$\bullet \min f = f(1, 0) = 1$$

Esempio 5 $f(x,y) = 3x + y$

$D =$ triang. di prima



$$3x + y = \lambda$$

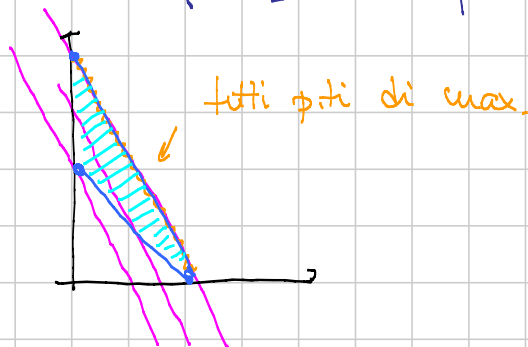
$$y = \lambda - 3x$$

$$\bullet \max f = f(1, 0) = 3$$

$$\bullet \min f = f(0, 1) = 1$$

Esempio 6 $f(x,y) = 2x + y$ $D =$ come prima

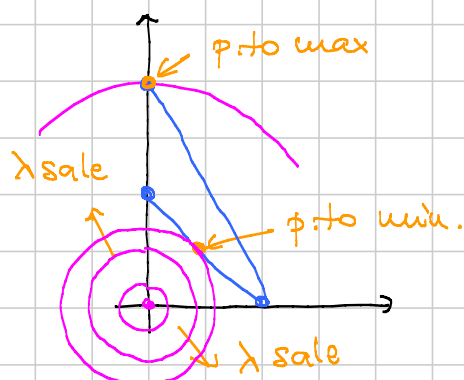
- $\min f = 1 \rightsquigarrow$ p.to di min = $(0,1)$
- $\max f = 2 \rightsquigarrow$ p.ti di max = tutti gli infiniti p.ti del lato con estremi $(1,0)$ e $(0,2)$



Esempio 7 $f(x,y) = x^2 + y^2$ $D =$ come prima

$$x^2 + y^2 = \lambda \rightsquigarrow \text{circonferenza}$$

- $\min f = f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$
- $\max f = f(0,2) = 4$.



Esempio 8 $f(x,y) = x - y$

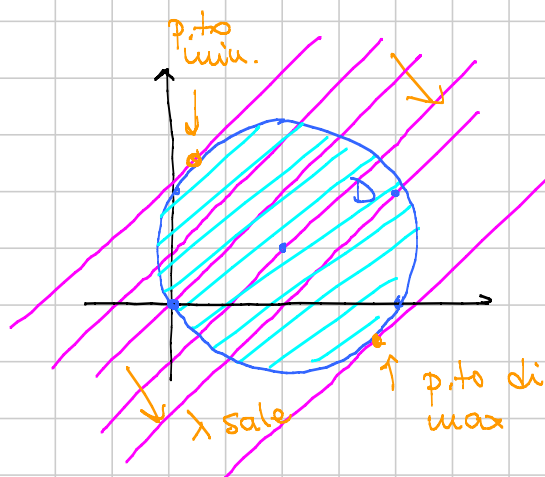
$$x - y = \lambda \quad y = x - \lambda$$

$D =$ cerchio (chiuso)
con centro in $(2,1)$
e passante per $(0,0)$

Per trovare p.ti di max min
cerco i p.ti di tangenza
tra la circ.

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5 \\ x - y = \lambda \end{cases}$$

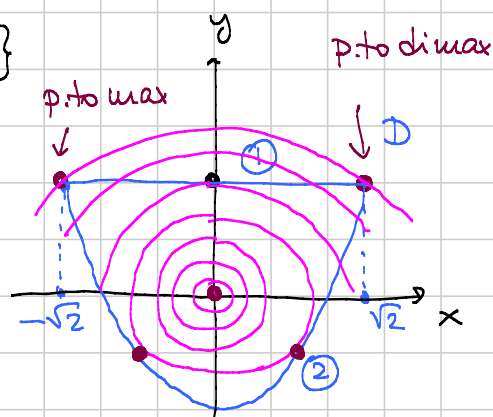
$$\rightsquigarrow \Delta = 0 \rightsquigarrow \text{precorso.}$$



Esempio 9 $f(x,y) = x^2 + y^2$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 1\}$$

Con le linee di livello non è chiuso 😞



Procedimento sistematico

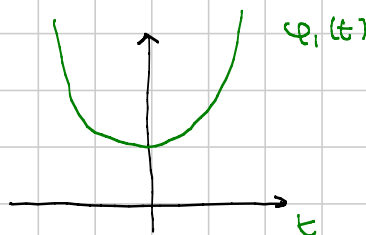
→ stat. interni: $\nabla f(x,y) = 0 \quad (2x, 2y) = (0,0)$
 $\leadsto \boxed{(0,0)}$ candidato #1

→ sing. interni: $\emptyset$

→ bordo: è fatto di 2 pezzi che vedo a parametrizzazione

$$\textcircled{1} = \{(t, 1) : t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]\}$$

$$\varphi_1(t) = f(t, 1) = t^2 + 1$$



Studiando $\varphi_1(t)$ per $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ trovo

min per $t=0 \leadsto$ p.to $\boxed{(0,1)}$
 max per $t = \pm\sqrt{2} \leadsto$ p.ti $\boxed{(\pm\sqrt{2}, 1)}$] p.ti corrispondenti sul segmento

$$\textcircled{2} = \{(t, t^2 - 1) : t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]\}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(t) &= f(t, t^2 - 1) = t^2 + (t^2 - 1)^2 = t^2 + t^4 - 2t^2 + 1 \\ &= t^4 - t^2 + 1 \end{aligned}$$

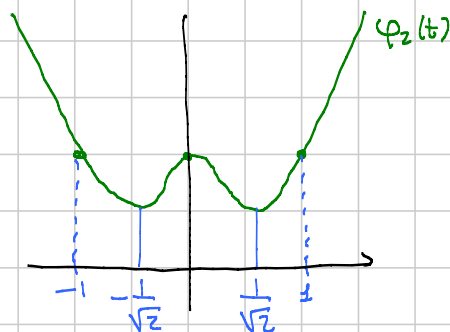
Studio $\varphi_2(t)$ per $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

$$\varphi_2'(t) = 4t^3 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \quad t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Quindi per $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ abbiamo

$$\text{max per } t = \pm\sqrt{2} \rightsquigarrow (\pm\sqrt{2}, 1)$$

$$\text{min per } t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \rightsquigarrow \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$$



Morale: i candidati sono

$$(0, 0) \rightsquigarrow f = 0 \quad \leftarrow$$

$$(\pm\sqrt{2}, 1) \rightsquigarrow f = 3 \quad \leftarrow$$

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right) \rightsquigarrow f = \frac{3}{4}$$

$$(0, 1) \rightsquigarrow f = 1$$

Conclusione

• $\text{max} = 3$, p.to di max $(\sqrt{2}, 1), (-\sqrt{2}, 1)$

• $\text{min} = 0$, p.to di min. $(0, 0)$

Esercizio Provare a fare con questa procedura alcuni degli esempi precedenti.

ANALISI 2

-

LEZIONE 019

Note Title

18/10/2017

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE (Caso di un moltiplicatore)

Def. (Luogo di zeri) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funs.
L'insieme

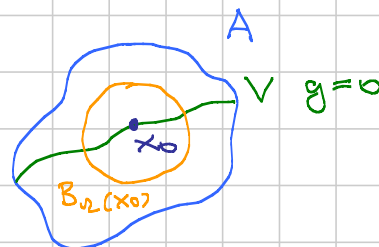
$$V := \{x \in A : g(x) = 0\} \quad (\text{vincolo})$$

si dice luogo di zeri di g .

Def. (Max/min locale vincolato) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: A \rightarrow \mathbb{R}$
Sia V come sopra (luogo di zeri di g). Sia $x_0 \in V$.
Diciamo che x_0 è p.to di min. locale per f ristretto al
vincolo V se

$$\exists r > 0 : f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in B_r(x_0) \cap V$$

La def. è analoga per i p.ti di max locale vincolato.

**Teorema** (Misterioso)

Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$, sia $r > 0$, siano $f: B_r(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: B_r(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$
Sia V il luogo di zeri di g .

Supponiamo che

- (i) $x_0 \in V$ è p.to di max/min. locale per f in V
- (ii) f e g diff. in $B_r(x_0)$

Allora si ha almeno una delle seguenti possibilità

- (1) $\nabla g(x_0) = 0$
- (2) $\nabla f(x_0)$ è multiplo di $\nabla g(x_0)$, cioè

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$$

moltiplicatore di
Lagrange

Utilizzo operativo

- Devo fare max/min di f su un certo insieme V
- Scrivo V come luogo di zeri di una certa g .
(non cambia nulla se l'eq. di V è $g(x) = 0$)
- Cerco i p.ti di V che rientrano nella categoria (1),
cioè risolvo il sistema

$$\begin{array}{l} \nabla g(x) = 0 \rightarrow n \text{ equ.} \\ g(x) = 0 \rightarrow 1 \text{ equ.} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \nabla g(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} (n+1) \text{ equ. in } n \text{ incognite} \\ \text{"spesso" non ci saranno} \\ \text{soluzioni} \end{array}$$

- Cerco i p.ti di V che rientrano nella categoria (2),
cioè risolvo il sistema

$$\begin{array}{l} \nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \\ g(x) = 0 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \\ g(x) = 0 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} (n+1) \text{ equ., con } (n+1) \text{ incognite } (x \text{ e } \lambda) \\ \text{"spesso" ci sarà un numero finito} \\ \text{di soluzioni} \end{array}$$

- Prendo i p.ti x trovati risolvendo i 2 sistemi (nel secondo caso mi dimentico del λ) e quelli sono i candidati ad essere i p.ti di max/min (di f ristretta a V).

Oss. Se siamo in dim. 2, i due sistemi diventano

$$\begin{array}{l} g_x(x,y) = 0 \\ g_y(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{array} \quad \text{1° sist}$$

3 equ.
2 incognite

$$\begin{array}{l} f_x(x,y) = \lambda g_x(x,y) \\ f_y(x,y) = \lambda g_y(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{array} \quad \text{2° sist.}$$

3 equ.
3 incognite: x, y, λ

Oss. Risolvere il 2° sistema equivale a trovare i pti stazionari della funzione di 3 variabili

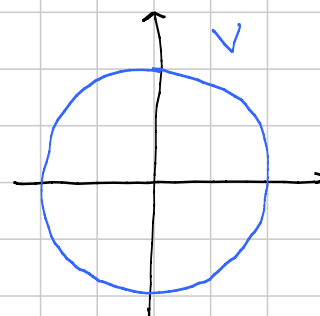
$$F(x, y, \lambda) := f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

La terza equ. è equivalente a $F_\lambda(x, y, \lambda) = 0$.

In n variabili diventa $F(x, \lambda) := f(x) - \lambda g(x)$
 $n \text{ var.} \quad 1 \text{ var.}$

Esempio 1 $A = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = 2x - y$,

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$



Weierstrass $\Rightarrow$ max e min. esistono

V è luogo di zeri di $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

1° sistema

$\downarrow$
NO SOL.

$$\begin{cases} g_x = 0 \\ g_y = 0 \\ g = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow (x, y) = (0, 0) \text{ che è incompatibile con 3ª equ.}$$

2° sistema

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2 = \lambda \cdot 2x \\ -1 = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Osservo che per forza $\lambda \neq 0$ e ricavo x e y dalle prime 2

$$x = \frac{1}{\lambda}, \quad y = -\frac{1}{2\lambda} \quad \text{vado nella 3ª: } \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1$$

$$1 + \frac{1}{4} = \lambda^2 \rightsquigarrow \lambda^2 = \frac{5}{4} \rightsquigarrow \lambda = \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \rightsquigarrow \text{ricavo } x \text{ e } y$$

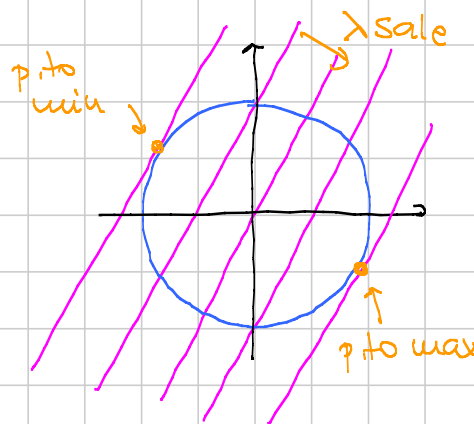
$$(x, y) = \left(+\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right) \quad \text{pto di max} \quad (x, y) = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \quad \text{pto di min.}$$

Sostituendo scopro quale dei due è p.to di max/min.

Oss. Allo stesso risultato si arrivava con le linee di livello

$$2x - y = \lambda$$

$$y = 2x - \lambda$$



Oss. Visto che λ alla fine si butta, si può risolvere il sistema senza calcolarlo.

$$\begin{cases} 1 = \lambda x \\ -1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{1}{x}$$

$$\lambda = -\frac{1}{2y}$$

$$\leadsto \frac{1}{x} = -\frac{1}{2y} \leadsto x = -2y$$

Sostituendo nella 3ª equ. trovo $4y^2 + y^2 = 1 \leadsto y = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$
 $\downarrow$
 $x = \mp \frac{2}{\sqrt{5}}$

Esempio 2 $A = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^2 + y^2$

$$V = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + 2y^4 = 1 \} \quad g(x, y) = x^4 + 2y^4 - 1$$

V è cpt. (chiuso e contenuto in $[-1, 1] \times [-1, 1]$)

$W \Rightarrow$ max e min esistono

1º sistema

$$\begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 8y^3 = 0 \\ x^4 + 2y^4 = 1 \end{cases}$$

$\leadsto$ NO SOLUZ.

2° sistema $\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g = 0 \end{cases} \begin{cases} 2x = 4\lambda x^3 \\ 2y = 8\lambda y^3 \\ x^4 + 2y^4 = 1 \end{cases} \begin{cases} x = 2\lambda x^3 \\ y = 4\lambda y^3 \\ x^4 + 2y^4 = 1 \end{cases}$

Occhio a risolvere il sistema

1° equ $\swarrow \searrow$

$x=0$ $\downarrow$ 3° equ $2y^4=1$
 $y = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$
 $\boxed{(0, \pm \sqrt[4]{\frac{1}{2}})}$
 2 candidati

$1 = 2\lambda x^2 \leadsto \lambda = \frac{1}{2x^2}$ 2° equ $\swarrow \searrow$
 $y=0$ $\downarrow$ 3° equ $x^4=1, x=\pm 1$
 $\boxed{(\pm 1, 0)}$
 2 candidati

$\lambda = \frac{1}{4y^2}$
 $\frac{1}{2x^2} = \frac{1}{4y^2} \leadsto 2y^2 = x^2$
 $\downarrow$
 $4y^4 = x^4$
 $\downarrow$ 3° equ $6y^4=1$
 $y = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{6}}$
 $x^4 = \frac{2}{3} \leftarrow x = \pm \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$
 $\boxed{(\pm \sqrt[4]{\frac{2}{3}}, \pm \sqrt[4]{\frac{1}{6}})}$
 4 candidati

Sostituendo gli 8 pti trovo max/min

$(0, \pm \sqrt[4]{\frac{1}{2}}) \leadsto \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ $(\pm 1, 0) \leadsto 1$ $(\pm \sqrt[4]{\frac{2}{3}}, \pm \sqrt[4]{\frac{1}{6}}) \leadsto \sqrt[4]{\frac{2}{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}}$
 minimo $\swarrow$ se si gioca per il max $\searrow$

ANALISI 2

LEZIONE 020

Titolo nota

18/10/2017

$$\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{1}{6}} \stackrel{?}{>} 1 \quad \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + 2\sqrt{\frac{1}{9}} \stackrel{?}{>} 1 \quad \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \stackrel{?}{>} 1 \quad \boxed{SI}$$

Esercizio (dei vecchi televisori) Cosa rappresentano

$$\begin{aligned} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 = 1\} \\ x^6 + y^6 = 1 \\ |x|^a + |y|^a = 1 \end{aligned}$$

Se $a=2$, si tratta di una circ.

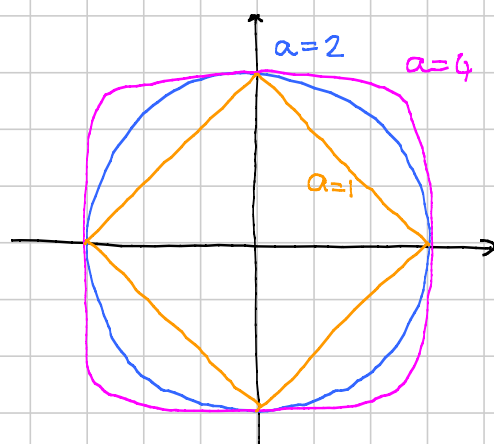
Se $a=1$, si tratta di un quadrato
"ruotato"

Osserviamo che quando a "cresce"

l'insieme "contiene" il precedente, ad esempio

$$x^2 + y^2 \leq 1 \Rightarrow x^4 + y^4 \leq 1 \Rightarrow x^6 + y^6 \leq 1$$

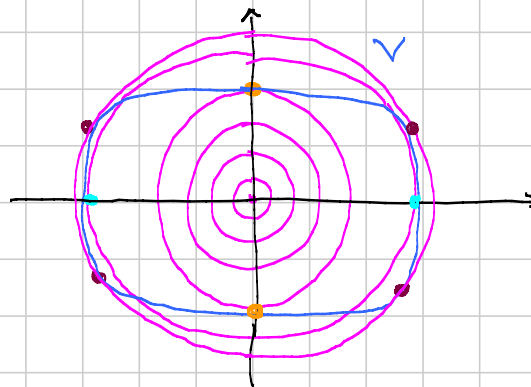
Quando $a \rightarrow +\infty$, l'insieme "tende al quadrato".



Esempio della les. prec. con linee di livello

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 + y^2 \\ V &= \{(x,y) : x^4 + 2y^4 = 1\} \end{aligned}$$

Quando faccio "il sale" il primo
contatto è nei pti $(0, \pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}})$
che sono i pti di min.



Succ. avviene un contatto in $(\pm 1, 0)$

L'ultimo contatto avviene in 4 pti simmetrici, che sono in effetti i 4 pti di max/min.

Brutal mode :

- i pti di max/min sono pti in cui le linee di livello di f sono tangenti a V
- nei pti di max/min le linee di livello di f e g sono tangenti, quindi hanno la stessa retta tangente
- le rette tangenti sono $\perp$ al gradiente
- Allora ∇f e ∇g devono essere paralleli nei pti di max/min.

— o — o —

Esempio $f(x,y) = 3x+y$

$$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,1], x^2 = y^3\}$$

V è cpt. $\Rightarrow$ max e min esistono

$$g(x,y) = x^2 - y^3$$

1° sistema

$$\begin{cases} g_x = 0 \\ g_y = 0 \\ g = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 0 \\ -3y^2 = 0 \\ x^2 = y^3 \end{cases}$$

$(0,0)$ resolve il 1° sistema !!!

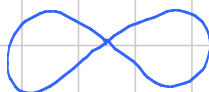
Brutale: quando il 1° sistema ha soluzione, è probabile che in quel pto succeda qualcosa di strano, tipo



cuspidi



autointersezioni



anche nulla



2° sistema

$$f_x = \lambda g_x$$

$$3 = 2\lambda x$$

$$x = \frac{3}{2\lambda}$$

$$f_y = \lambda g_y$$

$$1 = -3\lambda y^2$$

$$y = \sqrt{\frac{-1}{3\lambda}}$$

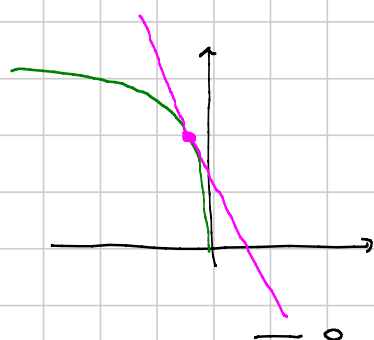
$$g = 0$$

$$x^2 = y^3$$

$$3^a \text{ equ. } \leadsto \frac{9}{4\lambda^2} = -\frac{1}{3\lambda} \sqrt{\frac{-1}{3\lambda}}$$

$$\frac{81}{16\lambda^4} = \frac{-1}{9\lambda^2 \cdot 3\lambda}$$

$\leadsto$ semplifico λ^3 e trovo 1 sol.
con $\lambda < 0$ quindi $x < 0$



(p.to in cui la famiglia
 $y = \lambda - 3x$
è tangente a γ)

Esempio 2 (Utilizzo misto di moltiplicatori e altre tecniche)

$$f(x,y) = x - y^2$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$$

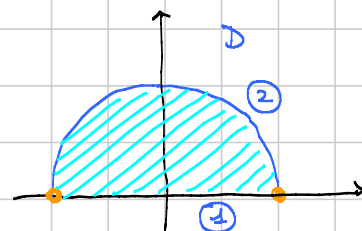
Max/min di f in D .

$\rightarrow$ Esistono per W.

$\rightarrow$ sing. interni : $\emptyset$

$\rightarrow$ stat. interni : $\nabla f(x,y) = 0$

$$\begin{cases} 1 = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \leadsto \emptyset$$



$\rightarrow$ bordo, fatto da 2 pezzi

① lo parametrizzo

$$\textcircled{1} = \{(t,0) : t \in [-1,1]\}$$

$$\varphi_1(t,0) = t \leadsto \text{candidati : } \boxed{(-1,0) \text{ e } (1,0)}$$

② Potrei parametrizzarlo come $\{(\cos t, \sin t) : t \in [0, \pi]\}$ e studiare

$$\varphi_2(t) := \cos t - \sin^2 t \quad \text{per } t \in [0, \pi]$$

In alternativa posso usare i moltiplicatori di Lagrange con $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

- MA**
- devo considerare solo i candidati nella parte alta
 - devo includere d'ufficio gli estremi del pezzo ② (bordi dei bordi, detti anche piti di taglio).

1° sistema $\leadsto \dots \leadsto$ non ha soluzioni

$$2^\circ \text{ sistema } \leadsto \begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} +1 = 2\lambda x \\ -2y = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

2ª equ

$y = 0$
 $\downarrow 3^\circ \text{ equ.}$
 $x = \pm 1$
 $\downarrow$
 $(\pm 1, 0)$

$\lambda = -1$
 $\downarrow 1^\circ \text{ equ}$
 $x = -\frac{1}{2}$
 $\downarrow 3^\circ \text{ equ}$
 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

Dal sistema si trovano i piti

$(1, 0)$

$(-1, 0)$

$(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

$(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

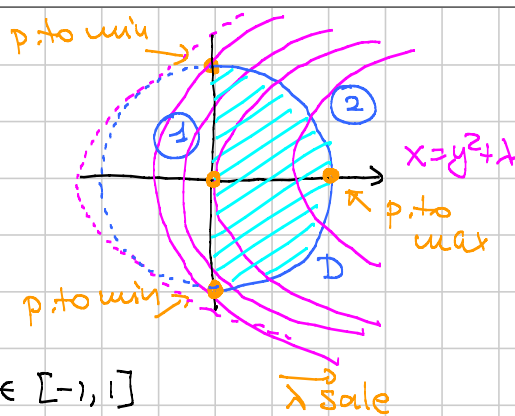
$\downarrow$
No perché sta sotto

Sostituendolo si vede chi è max/min.

Esempio 3 $f(x,y) = x - y^2$

- Esistenza, sing. int. e stat. int.
come sopra

Passiamo al bordo



- ① $\varphi_1(t) := -t^2$ da studiare per $t \in [-1, 1]$

max per $t = 0 \rightsquigarrow (0, 0)$

min per $t = \pm 1 \rightsquigarrow (0, 1), (0, -1)$

- ② Con i moltiplicatori trovo gli stessi pti di prima

$(1, 0)$

OK

$(-1, 0)$

NO BUONI!

$(-\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2})$

— o — o —

ANALISI 2

-

LEZIONE 021

Note Title

20/10/2017

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE (Più moltiplicatori)Setting : un sottoinsieme $V \subseteq \mathbb{R}^n$ descritto da k equazioni

$$V := \{x \in \mathbb{R}^n : g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0\}$$

dove $g_1, \dots, g_k : D \rightarrow \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$ Obiettivo : trovare max/min di una certa $f(x)$ data ristretta all'insieme V .Brutale : ogni equazione che aggiungo "fa scendere di 1 la dimensione di V " che quindi "normalmente" avrai dimensione $n-k$ (k si dice co-dimensione)Teorema (Moltiplicatori di Lagrange) (Misterioso)Siano $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, $f : B_r(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$, $g_1, \dots, g_k : B_r(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$.Sia V il luogo di zeri di $g_1, \dots, g_k$.

Supponiamo che

(i) $f, g_1, \dots, g_k$ sono di classe C^1 in $B_r(x_0)$ (ii) $x_0 \in V$ (iii) x_0 sia p.to di max/min per f ristretta a $V \cap B_r(x_0)$

Allora vale ALMENO una delle seguenti possibilità

(1) $\nabla g_1(x_0), \dots, \nabla g_k(x_0)$ sono k vettori LINEARMENTE DIP.(cioè la matrice che li ha come righe ha rango $\leq k-1$)(2) $\nabla f(x_0)$ è combinazione lineare di $\nabla g_1(x_0), \dots, \nabla g_k(x_0)$ cioè esistono numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tali che

$$\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(x_0)$$

moltiplic.
di Lagrange.

Operativamente:

- Spero che Weierstrass garantisca esistenza di max/min.
- Cerco i p.ti di tipo (1). Per questo devo risolvere un sistema (1° sistema) composto da
 - k equazioni di V $g_1 = \dots = g_k = 0$
 - Le equazioni di annullamento di tutti i minori $k \times k$ della matrice che ha $\nabla g_1, \dots, \nabla g_k$ come righe $\binom{n}{k}$ equazioni.

In tutto sono $k + \binom{n}{k}$ equazioni $\rightarrow$ mi aspetto NO soluz.

- Cerco i p.ti di tipo (2). Devo risolvere il 2° sistema composto da

$$\begin{cases} \nabla f(x) = \lambda_1 \nabla g_1(x) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(x) & n \text{ equ.} \\ g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0 & k \text{ equ.} \end{cases}$$

In tutto $n+k$ equ. in $n+k$ incognite $\leadsto$ mi aspetto sol. in numero FINITO

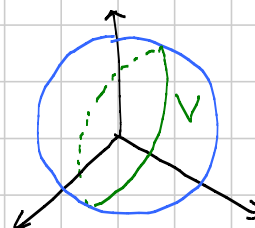
Oss. Risolvere il 2° sistema è equivalente a trovare i p.ti stazionari della funzione di $n+k$ variabili

$$F(x, \lambda_1, \dots, \lambda_k) := f(x) - \lambda_1 g_1(x) - \dots - \lambda_k g_k(x)$$

Esempio Supponiamo

$$V := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + y^2 + z^2 = 1}_{\text{sfera}}, \underbrace{x + 2y + 3z = 0}_{\text{piano}} \}$$

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \nabla g_1 \\ \nabla g_2 \end{matrix}$$



La matrice ha rango 1 $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} 4x - 2y &= 0 & y &= 2x \\ 6y - 4z &= 0 & z &= 3x \\ 6x - 2z &= 0 & z &= 3x \end{aligned}$$

∇g_1 e ∇g_2 sono lin. DIP. $\Leftrightarrow y = 2x$ e $z = 3x$

Se sostituisco nell'eq. del piano trovo $x=y=z=0$, il che non è compatibile con la sfera.

Il 1° sistema non ha soluzione.

Domanda: se fosse $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x+y+z = a\}$ per quali valori di a il 1° sistema avrebbe soluzione?

Risposta: per i valori di a per cui il piano è tangente alla sfera (fare i conti per rendersene conto).

— 0 — 0 —

Esempio $f(x,y,z) = x+y+z$ $D = \mathbb{R}^3$

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x+2y+z^2 = 5, xy=1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

Domanda: max/min di f in V .

Passo 1 V è chiuso (intersezione di chiusi)

Passo 2 V è limitato. Dalla 1ª equ. + disuguaglianze deduco che $x \in [0, \frac{5}{2}]$, $y \in [0, \frac{5}{2}]$, $z \in [0, \sqrt{5}]$

Passo 3 Weierstrass $\Rightarrow$ esistono max e min (ho usato continuità di $f(x,y,z)$ e V cpt.)

Passo 4 Impostiamo il 1° sistema

$$\nabla g_1 \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2z \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_2 \quad \begin{pmatrix} y & x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rango} \leq 1 \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2xz = 0 \\ -2yz = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{matrix} x = y \\ xz = 0 \end{matrix}$$

$$xz = 0 \quad \nearrow \quad x = 0 \rightsquigarrow y = 0 \rightsquigarrow \text{incompatibile con } xy = 1$$

$$\searrow \quad z = 0 \rightsquigarrow x + y = \frac{5}{2} \rightsquigarrow x = y = \frac{5}{4} \rightsquigarrow \text{incomp. con } xy = 1$$

$$\quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow$$

$$\quad \quad \quad g_1 = 0 \quad \quad \quad x = y$$

Conclusione: il 1° sistema non ha soluzione. ☹️

Passo 5 Secondo sistema $\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = 2\lambda + \mu y \\ 1 = 2\lambda + \mu x \\ 1 = 2\lambda z \\ 2x + 2y + z^2 = 5 \\ xy = 1 \end{array} \right. \rightarrow \text{sottraggo} \rightsquigarrow \mu(x - y) = 0$$

$$\mu(x - y) = 0 \rightsquigarrow \mu = 0$$

$$\rightsquigarrow x = y \rightsquigarrow x = y = 1 \rightsquigarrow z = 1 \rightsquigarrow (1, 1, 1)$$

$$\quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow$$

$$\quad \quad \quad xy = 1 \quad \quad \quad g_1, e \ z \geq 0$$

$$\quad \quad \quad x \geq 0 \ y \geq 0$$

$$\mu = 0 \rightsquigarrow \lambda = \frac{1}{2} \rightsquigarrow z = 1 \rightsquigarrow x + y = 2 \rightsquigarrow x = y = 1$$

$$\quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow$$

$$\quad \quad \quad 3^a \text{ equ.} \quad \quad \quad g_1 \quad \quad \quad g_2$$

Passo 6 Controllo i "bordi dei bordi", cioè vado a vedere che succede quando i $\geq$ diventano $=$.

- $x=0 \rightsquigarrow$ nessun p.to $xy=1$
- $y=0 \rightsquigarrow$ Idem
- $z=0 \rightsquigarrow x+y = \frac{5}{2} \rightsquigarrow x=2, y=\frac{1}{2}$ o viceversa
 $\uparrow$
 $xy=1$

Produce i candidati

$$\left(\frac{1}{2}, 2, 0\right)$$

$$\left(2, \frac{1}{2}, 0\right)$$

Passo 7 Sostituisco i candidati in $f(x, y, z)$

p.to max.
 $f(1, 1, 1) = 3 \leftarrow \text{MAX}$

$f\left(\frac{1}{2}, 2, 0\right) = f\left(2, \frac{1}{2}, 0\right) = \frac{5}{2} \leftarrow \text{MIN}$
 p.to min.

Procedimento alternativo : **SOSTITUZIONE DEL VINCOLO**

$$f(x, y, z) = x + y + z$$

$$2x + 2y + z^2 = 5$$

$$xy = 1$$

$$\downarrow$$

$$x + y = \frac{5 - z^2}{2}$$

Quindi finché rimango in V vale

$$f(x, y, z) = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} z^2 + z$$

Quindi fare max/min di $x+y+z$ equivale a fare max/min di $\frac{5}{2} - \frac{1}{2} z^2 + z$.

Dove varia z quando $(x, y, z) \in V$? $z^2 = 5 - 2x - 2y$
 z^2 varia da 0 al $5 - 2$ (min $x+y$), che si realizza per $x=y=1$.

Quindi non resta che studiare $\frac{5}{2} - \frac{1}{2}z^2 + z$ al variare di z in $[0,1]$



— 0 — 0 —

ANALISI 2

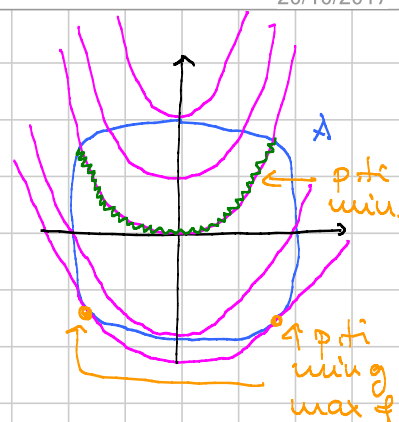
LEZIONE 022

Note Title

20/10/2017

Esercizio 1 $f(x,y) = |y-x^2|$
 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leq 5\}$

Domanda: max/min di $f(x,y)$ in A



• Weierstrass $\Rightarrow$ max/min esistono

• Studio max/min della funzione senza valore assoluto

Pongo $g(x,y) = y - x^2$

$\rightarrow$ stat. interni: $\emptyset$ $\nabla g(x,y) = (-2x, 1) \neq (0,0)$

$\rightarrow$ sing. int.: $\emptyset$

$\rightarrow$ bordo: uso i moltiplicatori con vincolo $x^4 + y^4 - 5 = 0$

* 1° sistema:
$$\begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 4y^3 = 0 \\ x^4 + y^4 = 5 \end{cases} \leadsto \text{NO SOL.}$$

* 2° sistema:
$$\begin{aligned} -2x &= 4\lambda x^3 \\ 1 &= 4\lambda y^3 \\ x^4 + y^4 &= 5 \end{aligned}$$

1° equ $\swarrow \searrow$

$x=0$ $\downarrow$ 3° equ. $y = \pm 5$ $\downarrow$ $(0, \pm \sqrt[4]{5})$

$-2 = 4\lambda x^2 \leadsto \lambda = -\frac{1}{2x^2}$ 2° equ $\leadsto \lambda = \frac{1}{4y^3}$

$\leadsto 2x^2 = -4y^3 \leadsto x^2 = -2y^3$

3° equ $\leadsto 4y^6 + y^4 = 5 \leadsto z = y^2$

$$4z^3 + z^2 - 5 = 0 \leadsto z = 1$$

$$4z^2 + 5z + 5 > 0 \text{ sempre } \text{☺}$$

$$\begin{array}{r|l} 4z^3 + z^2 - 5 & z-1 \\ -4z^3 + 4z^2 & \\ \hline 5z^2 - 5 & \end{array}$$

$$\leadsto y = \pm 1 \xrightarrow{\text{3ª equ}} x^4 = 4 \leadsto x = \pm \sqrt{2} \leadsto (\pm \sqrt{2}, \pm 1)$$

Oss. Se ero più saggio e usavo $x^2 = -zy^3$ vedevo che $y = +1$ non va bene, una pazienza.

Limitandoci allo studio di g abbiamo i candidati

$$(0, \pm \sqrt[4]{5}) \leadsto g = \pm \sqrt[4]{5}$$

$$(\pm \sqrt{2}, 1) \text{ (abusivo)} \leadsto g = 1 - 2 = -1$$

$$(\pm \sqrt{2}, -1) \leadsto g = -1 - 2 = -3$$

Conclusione: $\max g = \sqrt[4]{5}$ p.to di max = $(0, \sqrt[4]{5})$

$\min g = -3$ p.ti di min = $(\pm \sqrt{2}, -1)$

Mettere i valori assoluti = ribaltare le parti negative, quindi

$$\max \{ f(x,y) : (x,y) \in A \} = 3 \quad \text{p.ti di max} = (\pm \sqrt{2}, -1)$$

$$\min \{ \quad \quad \quad \} = 0 \quad \text{p.ti di min} = \text{tutti i p.ti della parabola } y = x^2 \text{ che cascano in } A.$$

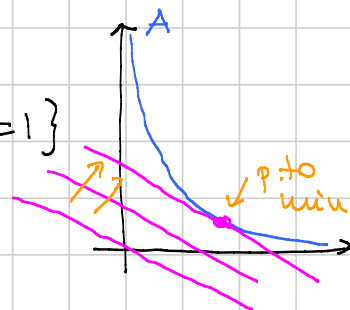
↑ tutti p.ti singolari interni

Tecnica standard : se c'è da fare max/min di $|f(x)|$, lo faccio per $f(x)$ e poi deduco.

Esempio 2 $f(x,y) = x+2y$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, xy=1\}$$

A non è cpt. (non è lim.) $\Rightarrow$ guai !!



Facile : $\sup \{f(x,y) : (x,y) \in A\} = +\infty$ ($\Rightarrow$ max N.E.)

$$f\left(t, \frac{1}{t}\right) = t + \frac{2}{t} \rightarrow +\infty \text{ per } t \rightarrow +\infty$$

$\underbrace{\quad}_{\in A \text{ per ogni } t > 0}$

SE Sapessi che il min. esiste, potrei usare i moltiplicatori con $f(x,y) = x+2y$, $g(x,y) = xy-1$

• 1° sistema: $\emptyset$

• 2° sistema

$$\begin{cases} 1 = \lambda y \\ 2 = \lambda x \\ xy = 1 \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{1}{y} \leadsto x = 2y$$

$$\lambda = \frac{2}{x}$$

osservo che
 $x \neq 0, y \neq 0$

$$2y^2 = 1 \leadsto y = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = \sqrt{2}$$

Per forza $(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ è il pto di min. e il min vale $2\sqrt{2}$.

Resta il pbm. di quel SE, senza il quale non abbiamo dim. nulla. Come ce la caviamo?

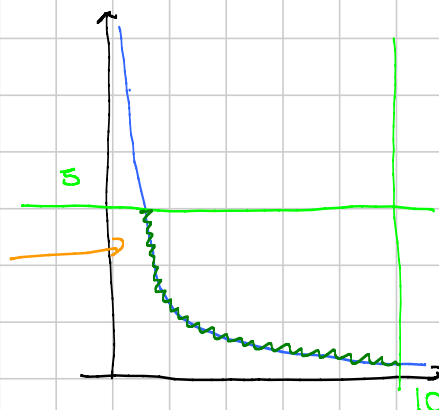
1° modo Provo ad usare W. generalizzato, quindi cerco un sottolivello $\neq \emptyset$ e compatto

$$f(x,y) \leq 10, \text{ cioè } x+2y \leq 10$$

Tenendo conto che in A vale $x \geq 0$ e $y \geq 0$, da questa deduciamo che $x \in [0, 10]$, $y \in [0, 5]$.

Il sottolivello è non vuoto perché $f(\underbrace{1,1}_{\in A}) \leq 10$

il sottolivello sta
in questa zona
che è opt.



Questo sistema tutto.

2° metodo Sostituzione del vincolo $y = \frac{1}{x} \quad x > 0$

$f(x,y) = x + \frac{2}{x}$ che studio per $x > 0$ e diventa
analisi 1.

Esempio 3 $A = \mathbb{R}^4 \setminus \{(0,0,0,0)\}$ $f(x,y,z,w) = \frac{xyz^2w^2}{x^6+y^6+z^6+w^6}$

Inf / sup / max / min di f in A .

Si potrebbero fare gradiente (e magari pure Hessiano!) 😞

A non è né chiuso, né limitato 😞

Osservazione chiave : $f(x,y,z,w)$ è omogenea di grado 0,
cioè

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda w) = f(x, y, z, w)$$

Quindi f è costante sulle semirette uscenti dall'origine.

(oss.: quindi se c'è un min, ci sono infiniti p.ti in cui $\nabla f = 0$ e in tutti quei p.ti H_f ha autov. nullo)

Dalla 0-omogeneità deduciamo che max/min su A coincidono con max/min su $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$.

La sfera è cpt. $\Rightarrow$ max e min esistono 😊

Altra oss.: max e min su A coincidono con max/min su

$$x^6 + y^6 + z^6 + w^6 = 1 \quad (\text{o anche } 2017, \text{ se mi torna meglio})$$

Quindi alla fine è equivalente a calcolare max/min di

$$f(x, y, z, w) = xyz^2w^2$$

con il vincolo che $g(x, y, z, w) = x^6 + y^6 + z^6 + w^6 - 1 = 0$

E questo viene abbastanza facile con i moltiplicatori
(occhio a non semplificare x, y, z, w nel sistema!).
— 0 — 0 —

ANALISI 2

LEZIONE 023

Note Title

24/10/2017

INSIEMI E FUNZIONI CONVESSE

Def (Insieme convesso) Sia V uno sp. vett., sia $C \subseteq V$ un sottoinsieme. Si dice che C è convesso se

$$\forall x \in C \quad \forall y \in C \quad \forall \lambda \in [0,1] \quad \lambda x + (1-\lambda)y \in C$$

(Brutalmente: se C contiene x e y , allora C contiene tutto il segmento di estremi x e y)

Def. Dati x e y in V sp. vett., si dice segmento di estremi x e y l'insieme dei p.ti del tipo

$$\lambda x + (1-\lambda)y \quad \lambda \in [0,1]$$

Def. (Combinazione convessa) Dati $x_1, \dots, x_n$ in V sp. vett., si dice comb. convessa ogni p.to del tipo

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \quad \text{con } \lambda_i \in [0,1] \quad i=1,\dots,n \\ \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$$

Lemma Sia C convesso in V sp. vettoriale. Sia $n \geq 1$ intero. Siano $x_1, \dots, x_n$ in C .

Allora tutte le comb. conv. di $x_1, \dots, x_n$ stanno in C .

Dim Induzione su n .

$n=1 \rightsquigarrow$ banale 😊

$n=2 \rightsquigarrow$ def. di insieme convesso.

Passaggio induttivo $n \Rightarrow n+1$ - Prendiamo $n+1$ p.ti e una loro comb. convessa

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}$$

- Se $\lambda_{n+1} = 1$, allora gli altri sono 0 e la tesi è ovvia
- Se $\lambda_{n+1} < 1$, allora $1 - \lambda_{n+1} > 0$ e posso scrivere

$$(1 - \lambda_{n+1}) \left(\underbrace{\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}}}_{\mu_1} x_1 + \dots + \underbrace{\frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}}}_{\mu_n} x_n \right) + \lambda_{n+1} x_{n+1}$$

$$\mu_1 + \dots + \mu_n = 1$$

Per ipotesi induttiva $(\dots) \in C$ e concludo usando nuovamente la def. di convesso.

— o — o —

Def. (funzione convessa) Sia C sottoinsieme convesso di V sp. vett.. Sia $f: C \rightarrow \mathbb{R}$.

Si dice che f è convessa se

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

$$\forall x \in C$$

$$\forall y \in C$$

$$\forall \lambda \in [0, 1]$$

Si dice che f è strett. convessa se la disug. è stretta ogni volta che $x \neq y$ e $\lambda \in (0, 1)$.

Def. Si dice che $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ è concava se soddisfa la proprietà analoga con $\geq$.
È equivalente a dire che $-f$ è convessa.

Teorema (Jensen) Sia $C \subseteq V$ e sia $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ convessa.

Sia $n \geq 1$ intero, siano $x_1, \dots, x_n \in C$ e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ con $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$.

Allora

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)$$

sta in C grazie al
lemma di prima

Dim. $n=1$ banale, $n=2$ def. di f convessa, $n \Rightarrow n+1$ come nel lemma.

— o — o —

Proposizione (La convessità è un fatto uno-dimensionale)

Sia $C \subseteq V$ convesso e sia $f: C \rightarrow \mathbb{R}$.

Allora i seguenti fatti sono equivalenti.

(1) f è convessa in C

(2) $\forall x_0 \in C, \forall v \in V$ la funzione $\varphi(t) := f(x_0 + tv)$ è convessa per i valori di t per cui è definita.

Dim. $[1) \Rightarrow (2)]$

$$\varphi(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) = f(x_0 + \lambda t_1 v + (1-\lambda)t_2 v)$$

↓ splitto x_0

$$= f(\lambda x_0 + \lambda t_1 v + (1-\lambda)x_0 + (1-\lambda)t_2 v)$$

$$= f(\lambda(x_0 + t_1 v) + (1-\lambda)(x_0 + t_2 v))$$

(uso f convessa) $\leq \lambda f(x_0 + t_1 v) + (1-\lambda)f(x_0 + t_2 v)$

$$= \lambda \varphi(t_1) + (1-\lambda)\varphi(t_2)$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Prendo x_0 e x_1 in C e
una loro comb. conv.

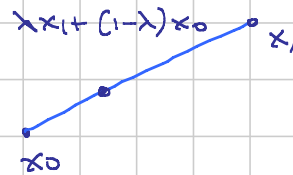
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_0) = f(x_0 + \lambda \overbrace{(x_1 - x_0)}^v)$$

$$= \varphi(\lambda)$$

$$= \varphi(\lambda \cdot 1 + (1-\lambda) \cdot 0)$$

(uso φ convessa) $\leq \lambda \varphi(1) + (1-\lambda) \varphi(0)$

$$= \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_0).$$

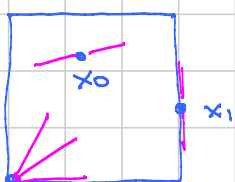


Def. (Punto estremo) Sia C convesso in V vett.

Un p.to $x_0 \in C$ si dice ESTREMALE se (ogni volta che sta in un segmento contenuto in C , allora è un estremo)

$$x \in C, y \in C, x \neq y, \lambda \in [0, 1], x_0 = \lambda x + (1-\lambda)y \Rightarrow \lambda \in \{0, 1\}$$

Esempio 1 $C = [0, 1] \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$



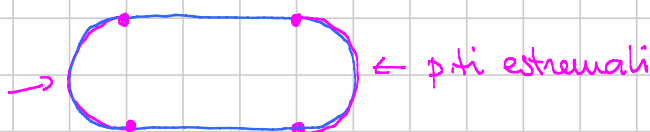
x_0 e x_1 non sono estremali

I vertici sono gli unici p.ti estremali

Esempio 2 $C = \text{cerchio}$ P.ti estremali = circonferenza

Esempio 3

p.ti
estremali



Esempio 4 Semipiano : no p.ti estremali

Prop. Sia $C \subseteq V$ e sia $f: C \rightarrow V$ strett. convessa.
 Sia $x_0 \in C$ un p.to di max per f .
 Allora x_0 è per forza un p.to estremo.

Dim. Supponiamo per assurdo x_0 non estremo.
 Allora

$$x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$$

con $\lambda \in (0,1)$ e $x_1 \neq x_2$. Ma allora

$$\begin{aligned} f(x_0) &< \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \\ &\leq f(x_0) \quad \leq f(x_0) \quad \text{se } x_0 \text{ p.to max} \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

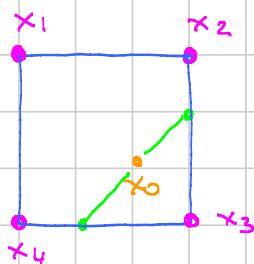
— o — o —

Teo. misterioso Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme convesso e COMPATTO.

Allora

- (1) esistono dei p.ti estremali
- (2) ogni p.to $x_0 \in C$ si può scrivere come comb. conv. di al massimo $(n+1)$ p.ti estremali di C .

Esempio



x_0 si può scrivere come
 comb. convessa di x_2, x_3, x_4

Prop Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso e sia $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ convessa.
 Supponiamo che
 (i) C compatto
 (ii) f continua

e basta

$$\max \{ f(x) : x \in C \} = \max \{ f(x) : x \in \text{p.ti estrem. di } C \}$$

Oss. Non è vero che tutti i pti di max sono estremali, ma ce ne sono che lo sono.

Dim. Segue dal teorema misterioso.

L'esistenza del max segue da M.

Sia x_0 un pto di max.

Per il teo. misterioso lo posso scrivere come

$$x_0 = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{m+1} x_{m+1} \quad \text{con } x_i \text{ estremali}$$

$$f(x_0) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_{m+1} f(x_{m+1}) \quad \begin{array}{l} \text{almeno quelli con} \\ \nearrow \text{coeff. } \neq 0. \end{array}$$

Questo basta per dire che tutti gli $f(x_i)$ sono uguali ad $f(x_0)$. Se uno fosse minore, WLOG $f(x_1)$, avremmo

$$\begin{aligned} f(x_0) &\leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_{m+1} f(x_{m+1}) \\ &< \underbrace{f(x_0)} && \underbrace{\leq f(x_0)} \\ &< (\lambda_1 + \dots + \lambda_{m+1}) \underbrace{f(x_0)} = \underbrace{f(x_0)} \end{aligned}$$

ANALISI 2

LEZIONE 024

Note Title

24/10/2017

CONVESSITÀ E CONTINUITÀ

Analisi 1 Se $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa ($C \subseteq \mathbb{R}$ è convesso) allora

- (i) f è continua in $\text{Int}(C)$
- (ii) f è loc. Dip. in $\text{Int}(C)$, cioè f è Dip. in A per ogni compatto $A \subseteq \text{Int}(C)$.

Analisi 2 Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso e sia $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ convessa. Allora

- (i) f è continua in $\text{Int}(C)$
- (ii) f è Dip. in A per ogni $A \subseteq \text{Int}(C)$ con A cpt.

Esempi di ottimalità: vedi Analisi 1.

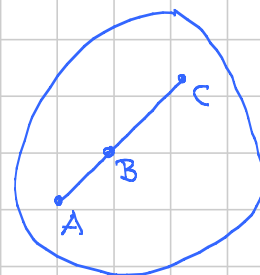
— o — o —

- Road map**
- ① f è loc. Limitata dall'alto in $\text{Int}(C)$
 - ② f è continua in $\text{Int}(C)$
 - ③ f è loc. Limitata dal basso in $\text{Int}(C)$
 - ④ f è loc. Dip. in $\text{Int}(C)$.

— o — o —

Lemma Anche in $\mathbb{R}^n$ vale che $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa se e solo se verifica la disug. dei 3 rapp. incrim.

$$\frac{f(B) - f(A)}{|B - A|} \leq \frac{f(C) - f(A)}{|C - A|} \leq \frac{f(C) - f(B)}{|C - B|}$$



Dim. Già sappiamo che la convessità è un fatto 1-dim., quindi basta restringersi al segmento AC .

1 Locale limitatezza dall'alto in $\text{Int}(C)$

Prop Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme qualunque.

Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione qualunque.

Allora i seguenti due fatti sono equivalenti

- (1) Per ogni $x_0 \in \text{Int}(A)$ esiste un intorno B di x_0 in A in cui f è limitata dall'alto.
- (2) Per ogni compatto $K \subseteq \text{Int}(A)$ si ha che f è limitata dall'alto in K .



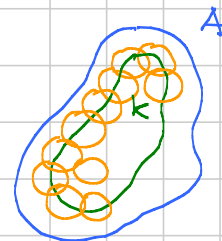
Dim. $(2) \Rightarrow (1)$ Basta prendere un intorno B cpt $\subseteq \text{Int}(A)$

$(1) \Rightarrow (2)$ Prendo $K \subseteq \text{Int}(A)$

Per ogni $x_0 \in K$ trovo un intorno in cui f è limitata dall'alto (la costante può dipendere dall'intorno).

Questi intorni ricoprono K che è cpt., quindi un s. ricopr. finito basta.

Ora prendo come limitazione dall'alto il max di quelle sugli intorni.



Def. Una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è loc. limitata dall'alto in $\text{Int}(A)$ se verifica una delle 2 propr. equivalenti.

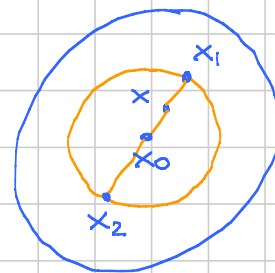
Teorema Se $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso e $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa, allora f è loc. Dim. dall'alto in $\text{Int}(C)$.

Dim. Lo dim. in versione 1 usando intorni "ipercubici".

Questi hanno un numero finito di pti estremali e quindi f è $\leq$ del max dei valori assunti nei pti estremali.

2) Continuità di f in $\text{Int}(C)$

Sia $x_0 \in \text{Int}(C)$. Sia $B_r(x_0)$ una palla in cui f è limitata dall'alto.
Sia $x \in B_r(x_0)$.



- Supponiamo $f(x) \geq f(x_0)$. Considero x_1 come in figura.
Per il lemma dei 3 rapporti vale

$$0 \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{|x - x_0|} \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\underbrace{|x_1 - x_0|}_{\approx r}} \leq \frac{\overset{\text{lim. dall'alto}}{M - f(x_0)}}{r}$$

- Supponiamo ora $f(x) \leq f(x_0)$. Considero x_2 come in fig.
Uso il lemma con $x \sim x_0 \sim x_2$. Ottengo

$$0 \leq \frac{f(x_0) - f(x)}{|x_0 - x|} \leq \frac{\overset{\leq M}{f(x_2) - f(x_0)}}{\underbrace{|x_2 - x_0|}_{\approx r}} \leq \frac{M - f(x_0)}{r}$$

In ogni caso ho dimostrato che

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \underbrace{\frac{M - f(x_0)}{r}}_{\substack{\text{non dipende} \\ \text{da } x}} |x - x_0|$$

Quando faccio il limite per $x \rightarrow x_0$ ho la tesi.

— 0 — 0 —

3) Loc. limitatezza di f in $\text{Int}(C)$

Dem In versione (2) considero un qualunque cpl. $K \subseteq \text{Int}(C)$
so già che f è continua in K .
Per w ammette min. $\leadsto$ è limitata dal basso.

4 Locale Lipschitzianità in Int(C)

Versione debole Per ogni $x_0 \in \text{Int}(C)$ esiste $r > 0$ tale che f è lip. in $B_r(x_0)$

Versione forte Per ogni cpt. $K \subseteq \text{Int}(C)$ si ha che f è lip. in K .

Dim. versione debole Prendo $x_0 \in \text{Int}(C)$.

Fisso $R > 0$ tale che $B_R(x_0) \subseteq \text{Int}(C)$

Fisso $r \in (0, R)$ $\uparrow$ chiusa

Dico che f è lip. in $B_r(x_0)$

Prendo 2 pti qualunque x e y in $B_r(x_0)$ e vedo che succede. Suppongo wlog $f(y) \geq f(x)$ e prendo z come in figura. Per il solito lemma vale

$$0 \leq \frac{f(y) - f(x)}{|y - x|} \leq \frac{f(z) - f(x)}{|z - x|}$$

Ora

$$f(z) - f(x) \leq M - m$$

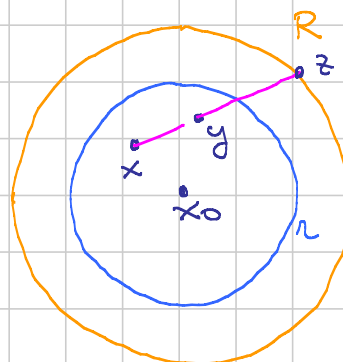
$\uparrow \quad \uparrow$
limitazioni dall'alto e dal basso in $B_R(x_0)$

$$|z - x| \geq R - r$$

Se fosse così avrei concluso che

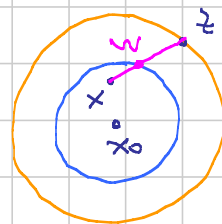
$$|f(y) - f(x)| \leq \boxed{\frac{M - m}{R - r}} |y - x|$$

$\hookrightarrow$ non dipende da x e y



Dimostriamo per bene che $|z-x| \geq R-\epsilon$

$$\begin{aligned} R = |z-x_0| &\leq |z-w| + |w-x_0| \\ &= |z-w| + \epsilon \\ &\leq |z-x| + \epsilon \end{aligned}$$



Aggiustando diventa proprio $|z-x| \geq R-\epsilon$.

Dovrebbe essere vero che le 2 versioni di locale lip. coincidono, ed in particolare che debole $\Rightarrow$ forte.

Idea Per ogni pto di K esiste un intorno in cui f è lip.

Estraggo un ricoprimento finito $B_1, \dots, B_k$ e spero che sia vero che

f lip. in B_i per ogni $i=1, \dots, k$



f lip. in $\bigcup_{i=1}^k B_i$.

Esercizio Indagare se l'implicazione è vera e perché.

ANALISI 2

—

LEZIONE 025

Note Title

25/10/2017

Teoria classica funzioni convesseCONVESSITÀ E CONTINUITÀ

Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso, sia $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ convessa.

Allora

- f è continua in $\text{Int}(C)$
- f è loc. dip. in $\text{Int}(C)$

CONVESSITÀ E DERIVATA PRIMA

Teorema Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un convesso APERTO

Sia $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1

Allora i seguenti fatti sono equivalenti

- (1) f è convessa in C
- (2) ∇f è monotono (debolmente crescente)
- (3) il grafico di f sta sopra i piani tangenti

CONVESSITÀ E DERIVATA SECONDA

Teorema Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un convesso APERTO

Sia $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2

Allora sono equivalenti

- (1) f è convessa in C
- (2) $Hf \geq 0$ in C (la matrice Hessiana è semidef. pos. in C)

Oss. Per la stretta convessità valgono caratterizz. analoghe come ad analisi 1 (esercizio).

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme qualunque, e sia
 $g: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione (vettoriale)
 stesso n.

Si dice che g è monotona (debolmente crescente) se

$$\langle g(y) - g(x), y - x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in A, \forall y \in A$$

Oss. Se $n=1$, questa è la debbole crescenza

Oss. Se g è la rot. di 90° intorno all'origine in $\mathbb{R}^2$, allora
 è monotona (il prod. scalare viene sempre 0).

Dim. di convessità vs derivata prima

(1) $\Rightarrow$ (2) Hp: f convessa C^1 Tesi ∇f monotono

Dati x_0 e x_1 in C , poniamo $v := x_1 - x_0$ e consideriamo

$$\varphi(t) := f(x_0 + tv)$$

f conv. $\Rightarrow \varphi$ conv. $\Rightarrow \varphi'(t)$ monotona $\nearrow$

$$\varphi'(t) = \langle \nabla f(x_0 + tv), v \rangle$$

$$\varphi'(1) \geq \varphi'(0) \Rightarrow \langle \nabla f(\underbrace{x_0 + v}_{x_1}), v \rangle \geq \langle \nabla f(x_0), v \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \nabla f(x_1), v \rangle \geq \langle \nabla f(x_0), v \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \nabla f(x_1) - \nabla f(x_0), x_1 - x_0 \rangle \geq 0$$

$$\Rightarrow \nabla f \text{ è monotono in } C.$$

(1) $\Rightarrow$ (3) Come sopra sappiamo che $\varphi(t)$ è convessa su $t \in [0, 1]$, quindi sta sopra la retta tang. in $t=0$.

$$\varphi(t) \geq \varphi(0) + \varphi'(0)t \quad \text{Pongo } t=1 \text{ e ottengo}$$

$$\varphi(1) \geq \varphi(0) + \varphi'(0), \text{ cioè}$$

$$f(x_1) \geq \underbrace{f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x_1 - x_0 \rangle}_{\text{piano tangente al grafico in } x_0 \text{ calcolato in } x_1} \quad x \rightarrow f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Hp : ∇f monotono Tesi : f convessa

Basta dim. che le $\varphi(t)$ come sopra sono convesse, cioè che hanno $\varphi'(t)$ debolmente crescente.

$$\varphi'(t) = \langle \nabla f(x_0 + t u), u \rangle$$

Prendo $t_2 > t_1$ e vedo se $\varphi'(t_2) \geq \varphi'(t_1)$

$$\varphi'(t_2) \geq \varphi'(t_1) \Leftrightarrow \langle \nabla f(x_0 + t_2 u), u \rangle \geq \langle \nabla f(x_0 + t_1 u), u \rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle \nabla f(x_0 + t_2 u) - \nabla f(x_0 + t_1 u), u \rangle \geq 0$$

$$(u \text{ so } t_2 > t_1) \Leftrightarrow \underbrace{\langle \nabla f(x_0 + t_2 u) - \nabla f(x_0 + t_1 u), (t_2 - t_1) u \rangle}_{\substack{y_2 \\ y_1 \\ y_2 - y_1}} \geq 0$$

L'ultima disug. è vera per monotonia del gradiente.

(3) $\Rightarrow$ (2) Hp: f sta sopra i piani tangenti
 Tesi: ∇f è monotono

Siano x_1 e x_0 in C . Sappiamo che

$$\begin{aligned} f(x_1) &\geq f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x_1 - x_0 \rangle \\ f(x_0) &\geq f(x_1) + \langle \nabla f(x_1), x_0 - x_1 \rangle \end{aligned}$$

Quando sommiamo, le f si semplificano e troviamo

$$0 \geq \langle \nabla f(x_0), x_1 - x_0 \rangle + \langle \nabla f(x_1), x_0 - x_1 \rangle - \langle \nabla f(x_1), x_1 - x_0 \rangle$$

Raccogliendo ho la tesi.

— o — o —

Dimostrazione di convessità vs derivata seconda

Definiamo $\varphi(t)$ come al solito. Ora sono di classe C^2 e quindi

f convessa $\Leftrightarrow$ le $\varphi(t)$ sono convesse $\Leftrightarrow$ le $\varphi''(t) \geq 0$

Tutto sta a calcolare $\varphi''(t)$ con $\varphi(t) := f(x_0 + tv)$

Questo si può fare usando la chain-rule oppure usando Taylor. Usiamo Taylor

$$f(y_0 + k) = f(y_0) + \langle \nabla f(y_0), k \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(y_0) k, k \rangle + o(|k|^2)$$

$$\varphi(t_0 + R) = f(x_0 + (t_0 + R)v) = f(\underbrace{(x_0 + t_0 v)}_{y_0} + \underbrace{Rv}_k)$$

$$\begin{aligned}
 \varphi(t_0 + R) &= f(x_0 + t_0 v) + \langle \nabla f(x_0 + t_0 v), R v \rangle \\
 &\quad + \frac{1}{2} \langle H f(x_0 + t_0 v) R v, R v \rangle + o(|R v|^2) \\
 &= \varphi(t_0) + \underbrace{\langle \nabla f(x_0 + t_0 v), v \rangle R}_{\varphi'(t_0)} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \underbrace{\langle H f(x_0 + t_0 v) v, v \rangle R^2}_{\varphi''(t_0)} + o(R^2)
 \end{aligned}$$

Abbiamo scoperto che $\varphi''(t) := \langle H f(x_0 + t v) v, v \rangle$

Quindi $\varphi''(t) \geq 0 \Leftrightarrow H f \geq 0$ in tutti i punti.
 — o — o —

Achtung! Le funzioni possono essere convesse senza essere C^1 o C^2 . In quel caso occorre usare la definizione.

Esempio $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|$

Per vedere che è convessa uso la def.

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

$$|\lambda x + (1-\lambda)y| \leq \lambda |x| + (1-\lambda)|y|$$

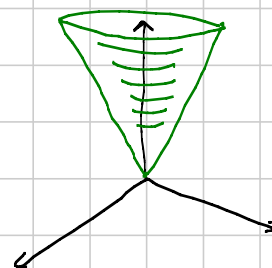
$$|\lambda x + (1-\lambda)y| \leq \lambda |x| + (1-\lambda)|y| = \lambda |x| + (1-\lambda)|y|$$

↑
triang.

Come si dim. la triangolare? $|x+y| \leq |x| + |y| \Leftrightarrow$

$$|x+y|^2 \leq (|x| + |y|)^2 \Leftrightarrow \cancel{|x|^2} + \cancel{|y|^2} + 2\langle x, y \rangle \leq \cancel{|x|^2} + \cancel{|y|^2} + 2|x| \cdot |y|$$

c.s.

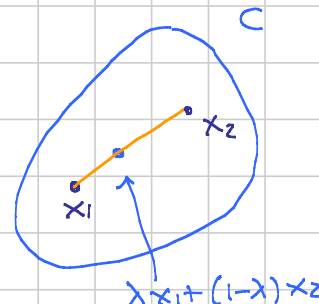


Esercizio Se $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa, allora i sottolivelli

$$S_M := \{x \in C : f(x) \leq M\}$$

sono a loro volta insiemi convessi

Siano x_1 e x_2 in un certo S_M . Voglio dim. che tutto il segmento di estremi x_1 e x_2 sta in S_M



$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &\leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \\ &\leq \lambda M + (1-\lambda)M \\ &= M \end{aligned}$$

Vale il viceversa? Se i sottolivelli sono convessi, allora f è convessa

Falso già ad analisi 1 !!! $f(x) = \sqrt{|x|}$

I sottolivelli sono segmenti, ma non è convessa
— o — o —

Esercizio $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa $\Leftrightarrow$

il sopragrafico $\{(x, y) \in C \times \mathbb{R} : y \geq f(x)\}$

è un sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^{n+1}$.

ANALISI 2

-

LEZIONE 026

Titolo nota

25/10/2017

Esercizio 1 Dimostrare il teo. fondamentale dell'algebra.

Cosa ci aspettiamo di dover usare?

→ Qualcosa che riguarda i reali, tipo assioma di continuità.

→ Qualcosa della struttura algebrica di $\mathbb{C}$.

Consideriamo un polinomio

$$p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$$

con $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Voglio dim. che esiste $z_0 \in \mathbb{C}$
t.c. $p(z_0) = 0$.

Penso $\mathbb{C}$ come $\mathbb{R}^2$ e definisco

$$f(x, y) := |p(x + iy)|$$

Il teo. è ridotto a dimostrare che $\min \{ f(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \} = 0$.

Passo 1 Dimostriamo che il minimo esiste. È chiaro che f è continua. Per Weierstrass generalizzato basta far vedere che

$$\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ |z|^2}} f(x, y) = +\infty$$

$$p(z) = z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right)$$

Quindi

$$|p(z)| = \overbrace{|z|^n}^{+\infty \uparrow} \cdot \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right|$$

$|a_n| \neq 0$
 $\uparrow$

Osservo che $\frac{|a_{n-1}|}{|z|} \rightarrow 0$ per $|z| \rightarrow +\infty$
 $\frac{|a_{n-k}|}{|z|^k} \rightarrow 0$ per $|z| \rightarrow +\infty$ se $k \geq 1$

(Ho usato che il termine di grado + alto comanda)

Oss. Questo passo della dim. è costruttivo, cioè si può esibire esplicitamente, in funzione dei coeff. e di M , un raggio R tale che

$$|p(z)| \geq M \quad \forall z \text{ con } |z| \geq R.$$

(basta fare in modo che $\frac{|a_{n-k}|}{|z|^k}$ siano $\leq \frac{a_n}{2^n}$)

Passo 2 Ora sappiamo che $|p(z)|$ ha minimo per un certo z_0 .

Posso supporre wlog che $z_0 = 0$, altrimenti considero il polinomio $q(z) = p(z - z_0)$.

Resta quindi da dimostrare che $p(0) = 0$.

Supponiamo che non sia così. Allora

$$p(z) = a_0 + \underbrace{a_k z^k}_{\neq 0} + \text{termini di grado + alto}$$

Dimostro che spostandomi in una direzione opportuna $|p(z)|$ scende. Considero

$$p(tw) = a_0 + a_k w^k t^k + o(t^k)$$

Idea: fare in modo che $a_k w^k = -a_0$

Posso, perché basta scegliere come w una radice k -esima di $-\frac{a_0}{a_k}$ (momento algebrico: esistenza della radice k -esima si dim. con formula trigonometrica)

$$\begin{aligned}\text{Otteniamo} \quad p(tw) &= a_0 - a_0 t^k + o(t^k) \\ &= a_0 (1 - t^k) + o(t^k)\end{aligned}$$

$$\text{da cui} \quad |p(tw)| \leq |a_0| (1 - t^k) + o(t^k) < |a_0|$$

$\uparrow$ triang. $\uparrow$ vero per t piccolo.

(Nell'ultimo passaggio ho usato che $a_0 \neq 0$).

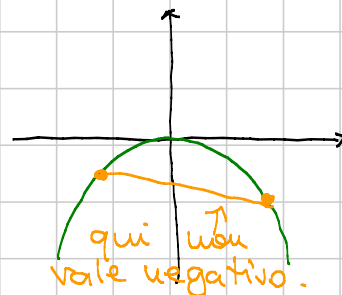
Esercizio 2 La funzione $f(x, y) = y + x^2$ è convessa in $\mathbb{R}^2$?

$$f_x = +2x \quad f_y = 1 \quad f_{xx} = 2 \quad f_{yy} = 0 \quad f_{xy} = 0$$

$$Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0 \quad \text{e questo basta per concludere}$$

La funzione $g(x, y) = |y + x^2|$ NON è convessa in $\mathbb{R}^2$

L'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) \leq 0\}$ è la parabola $y = -x^2$ e quindi non è un insieme convesso.

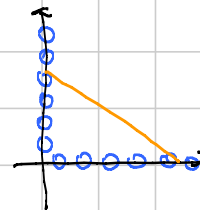


Esercizio 3 (Praticamente sbagliato in AM2-16)

Consideriamo $f(x,y) = x^a y^b$ definita per $x \geq 0, y \geq 0$ con a e b esponenti positivi.

• Quando è convessa? MA1

Si annulla sugli assi, e altrove è positiva



• Quando è concava? Impongo $Hf \leq 0$.

$$f_x = a x^{a-1} y^b$$

$$f_y = b x^a y^{b-1}$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} a(a-1)x^{a-2}y^b & abx^{a-1}y^{b-1} \\ abx^{a-1}y^{b-1} & b(b-1)x^a y^{b-2} \end{pmatrix}$$

$$Hf \leq 0 \Leftrightarrow \text{tizi sulla diag} \leq 0 \quad \text{Det} \geq 0$$

$$a(a-1) \leq 0$$

$$a \in [0,1]$$

$$b(b-1) \leq 0$$

$$b \in [0,1]$$

$$\text{Det} = [a(a-1)b(b-1) - a^2b^2] x^{2a-2} y^{2b-2}$$

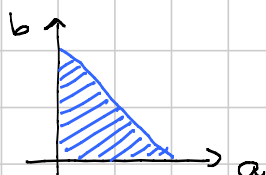
$$a(a-1)b(b-1) - a^2b^2 \geq 0$$

$$(a^2-a)(b^2-b) - a^2b^2 \geq 0$$

$$a^2b^2 - a^2b - ab^2 + ab - a^2b^2 \geq 0$$

$$ab(1-a-b) \geq 0$$

Conclusione: f è concava $\Leftrightarrow a \in [0,1], b \in [0,1], a+b \leq 1$



Esempio 4 (Sbagliato in AM2_16)

$$f(x, y) = \log(1+x^2+y^2)$$

Dove è convessa?

Più in generale, trattiamo $f(x, y) = g(x^2+y^2)$

$$f_x = 2x g'(x^2+y^2) \quad f_y = 2y g'(x^2+y^2)$$

$$Hf(x, y) = 2 \begin{pmatrix} g'(x^2+y^2) + 2x^2 g''(\dots) & 2xy g''(\dots) \\ 2xy g''(\dots) & g'(x^2+y^2) + 2y^2 g''(\dots) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Det} &= (g')^2 + 2(x^2+y^2) g' g'' + 4x^2 y^2 (g'')^2 - 4x^2 y^2 (g'')^2 \\ &= g'(x^2+y^2) [g'(x^2+y^2) + 2(x^2+y^2) g''(x^2+y^2)] \end{aligned}$$

$$\text{Det} \geq 0 \Leftrightarrow g'(z) [g'(z) + 2z g''(z)] \geq 0.$$

Per avere i 2 elementi sulla diagonale ≥ 0 serve

$$g'(z) + 2z g''(z) \geq 0 \quad \text{e anche} \quad g'(z) \geq 0$$

potrebbe essere $y=0$ potrebbe essere $x=0$

Nell'esempio $g(z) = \log(1+z)$

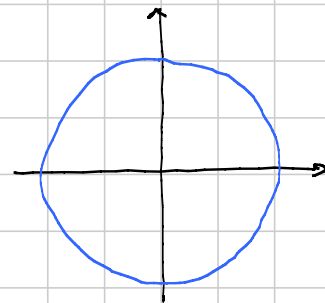
$$g'(z) = \frac{1}{1+z} \quad g''(z) = -\frac{1}{(1+z)^2}$$

$$g'(z) + 2z g''(z) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1+z} - \frac{2z}{(1+z)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-z}{(1+z)^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow z \leq 1.$$

Conclusione : $f(x, y) = \log(1+x^2+y^2)$ è
 convessa in $x^2+y^2 \leq 1$.

Achtung! In analisi 1 le
 funzioni alternano
 tratti di concavità
 e convessità



In analisi 2 non è più vero!

Questo perché ci possono essere intere zone con
 $Hf(x, y)$ indefinita.

Se ci restringiamo a rette vediamo restrizione
 concava / convessa a seconda del segno di

$$\langle Hf(u, v), u \rangle.$$

ANALISI 2

LEZIONE 027

Note Title

27/10/2017

QUOZIENTE DI RAYLEIGH (caratterizzazione variazionale di autovalori / autovettori)

Sia A una matrice $n \times n$ simmetrica. Consideriamo la funzione

$$R(x) := \frac{\langle Ax, x \rangle}{|x|^2} \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Prop. $R(x)$ ammette max/min in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, e questi sono il max/min autovalore di A . I pti di max/min sono i relativi autospazi.

Dtm. Osserviamo che $R(x)$ è una funzione 0-omogenea, cioè

$$R(\lambda x) = \frac{\langle A(\lambda x), \lambda x \rangle}{|\lambda x|^2} = \frac{\lambda^2 \langle Ax, x \rangle}{\lambda^2 |x|^2} = R(x)$$

per ogni $\lambda > 0$ (anche per ogni $\lambda \neq 0$).

Quindi

$$\inf / \sup \text{ di } R(x) \text{ su } \mathbb{R}^n \setminus \{0\} =$$

$$\inf / \sup \text{ di } R(x) \text{ su } |x| = 1 \leadsto \text{opt. quindi sono max/min.}$$

Applichiamo il metodo dei moltiplicatore con

$$g(x) = |x|^2 - 1$$

Poniamo $f(x) = \langle Ax, x \rangle$ e quindi risolviamo

$$\max / \min \{ f(x) : g(x) = 0 \}$$

Ricordiamo che $\nabla f(x) = 2Ax$ (in generale viene
 $\nabla g(x) = 2x$ $\nabla f(x) = (A + A^T)x$

1° sistema $\nabla g(x) = 0$ $g(x) = 0 \leadsto$ non ha soluz.

2° sistema $\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x)$ $2Ax = 2\lambda x$
 $g(x) = 0$ $|x|^2 = 1$

La prima equ. dice che x è autovettore di A .

I candidati sono gli autovettori di norma 1. Sostituendo
 in f si trova $f(x) = \langle Ax, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda |x|^2 = \lambda$
 — 0 — 0 —

Oss. Questo ci dice che esistono almeno 2 autovettori
 lin. indep.
 — 0 — 0 —

Esercizio (dimostrare il teorema spettrale)

Passo 1 Risolvo il problema

$$\min \{ \langle Ax, x \rangle : |x|^2 = 1 \}$$

Per la prop. precedente sappiamo che il minimo esiste ed
 è un autovalore, e il corrispondente p.to di min. è un
 autovettore v_1 .

Passo 2 Risolvo il problema

$$\min \{ \langle Ax, x \rangle : |x|^2 = 1, \langle x, v_1 \rangle = 0 \}$$

L'esistenza è gratis per w . I p.ti di min. vengono fuori
 dal metodo dei moltiplicatori con 2 vincoli

$$g(x) = |x|^2 - 1 = 0 \quad g_1(x) = \langle x, v_1 \rangle = 0$$

Imposto i 2 sistemi, osservo che il 1° non ha soluzione (falso!) e quindi i p.ti di min. risolvono il 2° sistema

$$\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) + \lambda_1 \nabla g_1(x)$$

$$2Ax = 2\lambda x + \lambda_1 v_1$$

Se λ_1 fosse $= 0$, saprei che x è un nuovo autovettore di A .
Moltiplico l'equazione scalarmente per v_1 :

$$\underbrace{\langle 2Ax, v_1 \rangle}_0 = 2\lambda \underbrace{\langle x, v_1 \rangle}_0 + \lambda_1 \underbrace{\langle v_1, v_1 \rangle}_1$$

eq. $g_1(x) = 0$

$$\langle 2Ax, v_1 \rangle = 2 \langle Ax, v_1 \rangle = 2 \langle x, Av_1 \rangle = 2 \langle x, \mu v_1 \rangle = 0$$

Questo mostra che $\lambda_1 = 0$ e quindi il p.to di min. è un altro autovettore v_2 di A ortogonale al precedente.

Passo 3 Risolvo

$$\min \{ \langle Ax, x \rangle : |x|^2 = 1, \langle x, v_1 \rangle = \langle x, v_2 \rangle = 0 \}$$

e allo stesso modo trovo un nuovo autovettore v_3 ortogonale ai 2 precedenti. E così via per iterazione.

— 0 — 0 —

Oss. Se $\varphi(x) := \langle v, x \rangle$, allora $\nabla \varphi(x) = v \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

Dim. $\varphi(x+r) = \langle v, x+r \rangle = \langle v, x \rangle + \langle v, r \rangle$
 $= \varphi(x) + \langle v, r \rangle$
 $\uparrow$
 $\nabla \varphi(x)$

— 0 — 0 —

Equazione delle onde

Esercizio preparatorio

Trovare tutte le funzioni $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 tali che

$$f_{xy}(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Risposta: sono tutte e sole quelle del tipo

$$f(x,y) = \varphi(x) + \psi(y)$$

[Dici] Per vedere che sono le uniche occorre un sottoesercizio.

Tutte le $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $g_y = 0$ sono del tipo

$$g(x,y) = \hat{\varphi}(x)$$

$$g(x,y) = g(x,0) + g_y(x,0)y = g(x,0) =: \hat{\varphi}(x)$$

$\uparrow$
 Lagrange
 Direzionale

Sappiamo che $(f_x)_y = 0$, quindi $f_x(x,y) = \hat{\varphi}(x)$ e ora usiamo nuovamente Lagrange direzionale.

Poniamo

$$\varphi(x) = \text{qualunque primitiva di } \hat{\varphi}(x)$$

e osserviamo che

$$f(x,y) - \varphi(x) = u(x,y)$$

risolve

$$u_x(x,y) = f_x(x,y) - \hat{\varphi}(x) = 0$$

quindi

$$u(x,y) = \psi(y)$$

e quindi $f(x,y) = \varphi(x) + \psi(y)$.

Equazione delle onde Trovare tutte le $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$u_{xx}(x,y) = u_{yy}(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Pongo $\xi := x+y$ $\eta := x-y \rightarrow$

in realtà uso
 $x = \xi + \eta$, $y = \xi - \eta$
corretto dopo video

e considero $v(\xi, \eta) = u(\xi + \eta, \xi - \eta)$.

Calcoliamo le derivate di v

$$v_{\xi}(\xi, \eta) = u_x(\xi + \eta, \xi - \eta) + u_y(\xi + \eta, \xi - \eta)$$

$$v_{\eta}(\xi, \eta) = u_x(\xi + \eta, \xi - \eta) - u_y(\xi + \eta, \xi - \eta)$$

$$v_{\xi\eta}(\xi, \eta) = u_{xx}(\dots) + u_{xy}(\dots)(-1) + u_{yx}(\dots) + u_{yy}(\dots)(-1)$$

$$= u_{xx}(\xi + \eta, \xi - \eta) - u_{yy}(\xi + \eta, \xi - \eta)$$

$$= 0 \quad (\text{per l'eq. delle onde})$$

Quindi per l'esercizio preparatorio sappiamo che

$$v(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$$

$$u(\overset{x}{\xi + \eta}, \overset{y}{\xi - \eta})$$

Ricavo ξ e η in funzione di x ed y

$$\xi := \frac{x+y}{2}$$

$$\eta := \frac{x-y}{2}$$

da cui $u(x,y) = \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) + \psi\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Conclusione: tutte le soluzioni dell'equazione

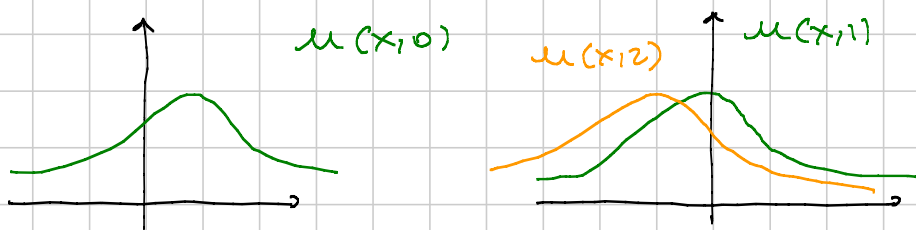
$$u_{xx} = u_{yy}$$

sono del tipo

$$u(x,y) = f(x+y) + g(x-y)$$

Come sono fatte le funzioni del tipo $f(x+y)$?

Le sue sezioni a y fisso sono un profilo che trasla verso sinistra



Le funzioni del tipo $u(x,y) = f(x+y)$ sono TRAVELING WAVES che vanno a sinistra

Le funzioni del tipo $u(x,y) = g(x-y)$ sono traveling waves verso dx.

Morale: ogni soluz. dell'eq. della onde è la somma di 2 traveling waves che vanno in direzione opposta.

Esercizio

Risolvere

$$u_{yy} = c^2 u_{xx}$$

— o — o —

ANALISI 2

—

LEZIONE 028

Note Title

27/10/2017

Esercizio 1 Trovare i p.ti stazionari della funzione

$$f(x,y) = e^x \sin(xy)$$

e classificarli (capire se sono max/min locali o altro)

ROAD MAP

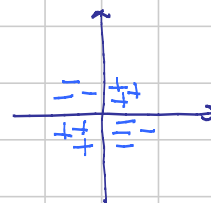
- $\nabla f(x) = 0$ per trovarli
- per classificarli se va bene funziona Hf
(cioè ha autov. non nulli)
- altrimenti sono guai e si può provare con Taylor.

$$\begin{aligned} f_x &= e^x \sin(xy) + e^x \cos(xy) \cdot y = 0 \\ f_y &= e^x \cos(xy) \cdot x = 0 \end{aligned}$$

2^a equ. $\nearrow \cos(xy) = 0 \leadsto \sin(xy) = \pm 1 \leadsto 1^a \text{ equ. tro}$
 $\searrow x = 0 \leadsto \text{Dalla } 1^a \text{ equ. trovo } y = 0.$

L'unico p.to stazionario è $(0,0)$. Per classificarlo posso

- fare Hf (farlo!)
- studio il segno in un intorno di $(0,0)$
 $\leadsto$ sella
- Taylor in $(0,0)$:



$$f(x,y) = xy + o(x^2+y^2)$$

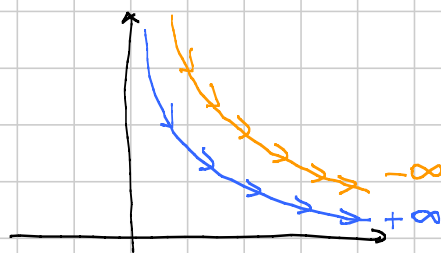
$$Hf = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\leadsto$ è come fosse xy , quindi sella

Esercizio 2 $\inf / \sup$ su $\mathbb{R}^2$ di $f(x,y) = e^x \sin(xy)$

☺ $f(t, \frac{\pi}{2} \frac{1}{t}) = e^t$ per $t \rightarrow +\infty$ ottengo $\sup = +\infty$

☹ $f(t, \frac{3\pi}{2} \frac{1}{t}) = -e^t$ per $t \rightarrow +\infty$ ottengo $\inf = -\infty$



Esercizio 3 Calcolare e classificare i p.ti stat. di

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$$

$$f_x = 4x^3 - 4y = 0 \rightsquigarrow y = x^3 \rightsquigarrow \text{nella 2}^a: x^9 = x$$

$$f_y = 4y^3 - 4x = 0$$

$$x=0$$

$$y=0$$

$$x=\pm 1$$

$$y=\pm 1$$

Ci sono 3 p.ti stazionari $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$.

Posso calcolare $D^2 f$ nei 3 p.ti e viene...

In alternativa

• $(0,0)$ è una sella per Taylor $f(x,y) = -4xy + o(x^2+y^2)$

• Si vede che $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty$. Quindi per W.gen.

$f(x,y)$ ammette MIN in $\mathbb{R}^2$, quindi almeno un p.to di min. ci deve essere, e si trova tra gli stat.

Perché $f(1,1) = f(-1,-1)$, sono entrambi p.ti di min.

Per il limite, il miglior modo sono le coord. polari

$$x^4 + y^4 - 4xy = \underbrace{\rho^4 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)}_{\geq m > 0} - 4\rho^2 \cos \theta \sin \theta$$

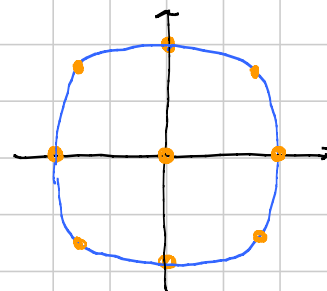
$$\geq m \rho^4 - 4\rho^2 \rightarrow +\infty$$

Achtung! Se $f(x,y)$ ha $\inf -\infty$ e $\sup +\infty$ su $\mathbb{R}^2$ e ha un solo p.to stat., posso dire qualcosa del p.to stazionario?

NO!!! (Trovare esempi!!!)

Esercizio 4 Trovare

$$\max / \min \left\{ \underbrace{\cos x + \cos y}_{f(x,y)} : \underbrace{x^4 + y^4}_{g(x,y)} \leq 1 \right\}$$



• Esistono per W.

• Non ci sono sing. interni

• Stat. interni

$$f_x = 0 \quad -\sin x = 0 \quad \leadsto \text{unica sol. } (0,0)$$

$$f_y = 0 \quad -\sin y = 0 \quad (\text{perché } x \text{ e } y \text{ stanno in } [-1,1])$$

Vediamo subito che $(0,0)$ è p.to di max.

• Lavoro con i moltiplicatori

→ 1° sistema $\leadsto$ NO SOL. (fare!)

→ 2° Sistema

$$\begin{cases} -\sin x = 4\lambda x^3 \\ -\sin y = 4\lambda y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

Se $x=0$ trovo $(0, \pm 1)$

Se $y=0$ trovo $(\pm 1, 0)$

Se $x \neq 0$ e $y \neq 0$ posso dividere e trovo

$$-4\lambda = \frac{\sin x}{x^3} = \frac{\sin y}{y^3}$$

Da questa vorrei dedurre che $x=y$. Posso? Quasi $x=\pm y$
Mi riduco a studiare l'injectività di

$$\varphi(t) = \frac{\sin t}{t^3}$$

I t che ci interessano sono
quelli in $(0,1]$, e lì c'è speranza



$$\varphi'(t) = \frac{\cos t \cdot t^3 - 3t^2 \sin t}{t^6} = \frac{t \cos t - 3 \sin t}{t^4}$$

studio il
numeratore

$$\psi(t) = t \cos t - 3 \sin t$$

$$\psi'(t) = \cos t - t \sin t - 3 \cos t = -2 \cos t - t \sin t \leq 0$$

almeno fino a $\frac{\pi}{2}$
visto che $\psi(0)=0$, abbiamo $\psi(t) \leq 0$ " " " " ☺

Quindi per il univ. abbiamo 3 candidati

Esercizio 5 (Metodo delle succ. per fare limiti)

$$f(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - xyz$$

$$D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \in (1, 2), 0 < x < z\}$$

$$\lim_{\substack{|(x, y, z)| \rightarrow +\infty \\ (x, y, z) \in D}} f(x, y, z)$$

$$f(t, \frac{3}{2}, 2t) = t^2 + \frac{9}{4} + 4t^2 - 3t^2 \rightarrow +\infty \text{ per } t \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow \limsup = +\infty$$

Forziamo le regole $y \in [1, 2]$, $0 \leq x \leq z$
 Per $y = 2$ diventa

$$x^2 + 4 + z^2 - 2xz = (x-z)^2 + 4$$

$$f(t, 2, t) = 4 \rightsquigarrow \liminf \leq 4$$

$$f(t, 2 - \frac{1}{t}, t + \frac{1}{t}) = \dots \text{ forse qualcosa che per } t \rightarrow +\infty \text{ tende a } 4.$$

Da qui sappiamo solo che $\liminf \leq 4$.
 Voglio dimostrare che è 4.

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 - xyz \geq x^2 + y^2 + z^2 - 2xz \\ &= \underbrace{(x-z)^2}_{\geq 0} + \underbrace{y^2}_{\geq 1} \end{aligned}$$

Discutere i casi a seconda di y non va bene, perché è come fare i limiti sulle rette/piani.

Sia (x_n, y_n, z_n) una successione che realizza il $\liminf$ (esiste per i soliti motivi)

$$x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 - x_n y_n z_n = (x_n - z_n)^2 + y_n^2 + (2 - y_n) x_n z_n$$

A meno di sottosucc., posso supporre che

- $y_n \rightarrow \ell \in [1, 2]$
- $x_n z_n \rightarrow m \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Ora posso distinguere i casi

• Se $l=2$, allora $f(x_n, y_n, z_n) \geq y_n^2 \rightarrow 4$, quindi ok

• Se $l < 2$ e $m = +\infty$, allora $f(x_n, y_n, z_n) \geq \underset{\substack{\downarrow \\ (2-l)}}{(2-y_n)} \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{x_n z_n} \rightarrow +\infty$

• Se $l < 2$ e $m < +\infty$, allora

$$f(x_n, y_n, z_n) \geq (x_n - z_n)^2 = \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{x_n^2} + \underset{\substack{\downarrow \\ -2m}}{z_n^2} - 2x_n z_n \rightarrow +\infty.$$

Fatto generale : ogni succ. ha una s.succ. che ha limite in $\bar{\mathbb{R}}$.

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 029

Note Title

31/10/2017

Integrali doppi

- ① Come si indicano
- ② Significato geometrico
- ③ Definizione (i)
- ④ Tecniche di calcolo

① Notazioni

$$\iint_A f(x,y) dx dy$$

(Annotations:
 - $\iint$: simbolo doppio di integrale (orange)
 - A : zona di integrazione (blue)
 - $f(x,y)$: integranda (pink)
 - $dx dy$: variabili di integrazione (green)

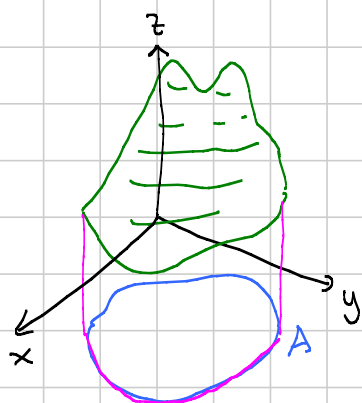
Sottinteso quando si parla di integrali propri

- $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è s.insieme limitato ($\exists R > 0$ t.c. $|x| \leq R \ \forall x \in A$)
- $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è limitata ($\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $|f(x)| \leq M \ \forall x \in A$)

② Significato geometrico Se $f(x,y) \geq 0$ per ogni $(x,y) \in A$ allora

$\iint_A f(x,y) dx dy =$ volume della parte di spazio compresa tra piano base xy e grafico di f

$$= \text{Volume} (\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in A, 0 \leq z \leq f(x,y) \})$$



Se $f(x,y)$ ha segno variabile in A , allora i volumi sopra piano xy contano con il segno +, quelli sotto con il segno - (somma algebrica)

[3] Definizioni → DARBOUX "unrestricted" (facciamo questa)
 → " ortodossa
 → Riemann

Data f limitata su A limitato, la estendiamo a tutto $\mathbb{R}^2$ ponendo

$$\hat{f}(x,y) := \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in A \\ 0 & \text{se } (x,y) \notin A \end{cases}$$

e poniamo

$$\iint_A f(x,y) dx dy := \iint_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(x,y) dx dy$$

D'ora ci poi ci basta definire l'integrale su $\mathbb{R}^2$ per funzioni $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ che sono

- limitate
- nulle fuori da un insieme limitato.

Caso banale Sia $R := [a,b] \times [c,d]$ un rettangolo (con lati paralleli agli assi) e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Supponiamo che

$$f(x,y) := \begin{cases} \lambda & \text{se } (x,y) \in R \\ 0 & \text{se } (x,y) \notin R \end{cases}$$

In questo caso poniamo

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy := \lambda \underbrace{(b-a)(d-c)}_{\substack{\text{area di } R \\ \uparrow \\ \text{altezza con segno}}} \\ = \text{volume parallelepipedo}$$

Indichiamo con $\lambda \varphi_R(x,y)$ questa speciale funzione

Caso semi-banale

f è una step-function, cioè una comb. lineare di funzioni del tipo precedente, diciamo

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_{R_i}(x,y)$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono reali e $R_i := [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$

(Il grafico di $f(x,y)$ è una unione di parallelepipedi).

In questo caso poniamo

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \, dx \, dy &:= \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \text{Area}(R_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (b_i - a_i)(d_i - c_i) \end{aligned}$$

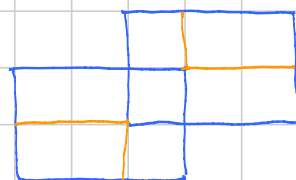
Fatto (ovvio intuitivamente, ma andrebbe dimostrato)

Se la stessa funzione si scrive in due modi diversi come comb. lin. di caratteristiche, allora l'integrale definito nei 2 modi è lo stesso.

Oss. Per evitare sovrapposizioni su pezzi comuni di bordo, sarebbe forse meglio considerare intervalli semiaperti
 $R = [a, b) \times [c, d)$

Fatto (ovvio come sopra)

Ogni step function si possa pensare come comb. lin. di rettangoli senza parti interne in comune



Caso generale f qualunque (purché soddisfi le ipotesi)

Si definiscono l'integrale inferiore e superiore

$$I^+(f, \mathbb{R}^2) := \inf \left\{ \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, y) \, dx \, dy : \begin{array}{l} \varphi \text{ è una step funct.} \\ \text{e } \varphi(x, y) \geq f(x, y) \\ \text{per ogni } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

$$I^-(f, \mathbb{R}^2) := \sup \left\{ \dots \varphi(x, y) \leq f(x, y) \dots \right\}$$

Oss. $I^+(f, \mathbb{R}^2)$ e $I^-(f, \mathbb{R}^2)$ esistono sempre (qui serve che esiste almeno una step function $\geq f$ e almeno una $\leq f$) e vale la relazione

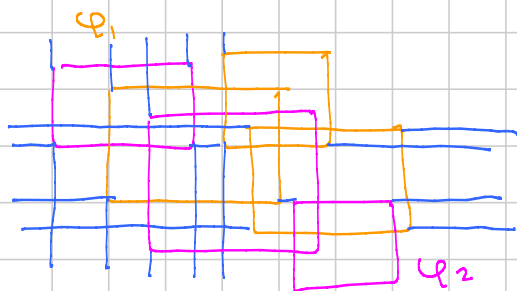
$$I^-(f, \mathbb{R}^2) \leq I^+(f, \mathbb{R}^2)$$

Lemma (ovvio unica tanto come il resto) Se φ_1 e φ_2 sono due step functions tali che

$$\varphi_1(x, y) \leq \varphi_2(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

allora $\iint_{\mathbb{R}^2} \varphi_1(x, y) \, dx \, dy \leq \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi_2(x, y) \, dx \, dy$.

Dim. Diventa davvero ovvio se mostro che φ_1 e φ_2 si possono pensare definite a partire dallo stesso insieme di rettangoli (cosa vera, ma andrebbe dim.)



(Si tratta di tirare tutte le possibili rette orizz. o vert. che contengono almeno un lato)

Def. Una funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ che verifica le ipotesi si dice integrabile (secondo D. unstricted) se

$$I^-(f, \mathbb{R}^2) = I^+(f, \mathbb{R}^2).$$

Prop. (Criterio di integrabilità) f è integrabile se e solo se, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono due step functions φ e ψ , definite a partire dalla stessa partizione, tali che

$$\varphi(x, y) \leq f(x, y) \leq \psi(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |\psi(x, y) - \varphi(x, y)| dx dy \leq \varepsilon.$$

Dim. Stessa di Analisi 1.

— o — o —

Proprietà analoghe ad Analisi 1

① Linearità L'insieme delle funz. int. è uno sp. vett. e l'integrale è un'applic. lineare

② Monotonia Se f e g sono int., e $f(x, y) \leq g(x, y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, allora

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy \leq \iint_{\mathbb{R}^2} g(x, y) dx dy$$

③ Continuità Se f è integr., allora $|f|$ è integr. e

$$\left| \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_{\mathbb{R}^2} |f(x, y)| dx dy$$

④ Prodotto Se f e g sono integrabili, allora anche $f \cdot g$ è integrabile.

(si fa separando parte pos. e parte neg.)

⑤ Additività rispetto alla zona di integrazione

Se $A \cap B = \emptyset$, allora

$$\iint_{A \cup B} f(x, y) dx dy = \iint_A f(x, y) dx dy + \iint_B f(x, y) dx dy$$

ovviamente se f è integrabile su A e su B

(Questo diventa conseguenza del teorema della somma nel momento in cui si estende tutto ad $\mathbb{R}^2$)

Oss. finale

Quando vado a definire $\iint_A f(x, y) dx dy$ estendendolo ed approx con

le step function, quest'ultime per stare sopra / sotto f devono anche "sfiorare su ∂A " e non solo in altezza

(pensare al caso della caratteristica di un cerchio)

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 030

Note Title

31/10/2017

4 Tecniche di calcolo Gli integrali doppi si calcolano con la

FORMULA DI RIDUZIONE Sotto opportune ipotesi vale che

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy \right) dx$$

$$2 = 1 + 1$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dx \right) dy$$

Idea: per calcolare un integrale doppio, basta calcolare due integrali "singoli".

Oss. Questa formula è una specie di DOUBLE COUNTING

$r_1 \leftarrow$	k_{11}	k_{12}	k_{13}	
$r_2 \leftarrow$			k_{23}	
$r_3 \leftarrow$				
	c_1	c_2	c_3	$c_{..}$

Calcolare un integrale doppio è come sommare tutti i numeri della tabella

Fare $\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy \right) dx$ vuol dire sommare prima "column-wise" e poi sommare i vari risultati
 $= c_1 + c_2 + \dots$

$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dx \right) dy$ vuol dire somma prima "riga-wise" e poi fare $r_1 + r_2 + \dots$

— o — o —

Formula di riduzione sui rettangoli

Supponiamo $R := [a, b] \times [c, d]$ e $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile
Allora

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dx dy &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy \end{aligned}$$

Più brevemente si scrive

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

Esempio 1 $A = [0, 1] \times [2, 3]$ $f(x, y) = xy^2$

$$\iint_A f(x, y) dx dy$$

1° modo $\iint_A f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_2^3 dy xy^2$

$$= \int_0^1 dx \left[\frac{1}{3} xy^3 \right]_{y=2}^{y=3}$$

↑ primitiva risp. ad y

$$= \int_0^1 dx \left(9x - \frac{8}{3}x \right) = \frac{19}{3} \int_0^1 x dx = \frac{19}{6}$$

2° modo $\iint_A f(x, y) dx dy = \int_2^3 dy \int_0^1 dx xy^2$

$$= \int_2^3 dy \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_{x=0}^{x=1} = \int_2^3 \frac{1}{2} y^2 dy = \left[\frac{1}{6} y^3 \right]_2^3 = \frac{27}{6} - \frac{8}{6} = \frac{19}{6}$$



Oss. Quando integro risp. ad y o x a moltiplicare
"possono uscire fuori"

$$\int_0^1 dx \int_2^3 dy \otimes y^2 = \int_0^1 x dx \int_2^3 y^2 dy = \int_0^1 x dx \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_2^3$$

$$= \frac{19}{3} \int_0^1 x dx = \frac{19}{6}$$

— 0 — 0 —

Esempio 2 $A := [-1, 1] \times [0, 2]$ $f(x, y) = 2x + 3y$

1° modo $\iint_A f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_0^2 dy (2x + 3y)$

$$= \int_{-1}^1 dx \left[2xy + \frac{3}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=2} = \int_{-1}^1 dx [4x + 6]$$

$$= [2x^2 + 6x]_{x=-1}^{x=1} = 2 + 6 - 2 - (-6) = 12$$

2° modo $\iint_A f(x, y) dx dy = \int_0^2 dy \int_{-1}^1 dx (2x + 3y)$

$$= \int_0^2 dy [x^2 + 3xy]_{x=-1}^{x=1} = \int_0^2 6y dy = [3y^2]_{y=0}^{y=2} = 12 \quad \text{😊}$$

3° modo $\iint_A f(x, y) dx dy = 2 \iint_A x dx dy + 3 \iint_A y dx dy$

$$\iint_A x dx dy = \int_0^2 dy \underbrace{\int_{-1}^1 dx x}_{=0} = 0$$

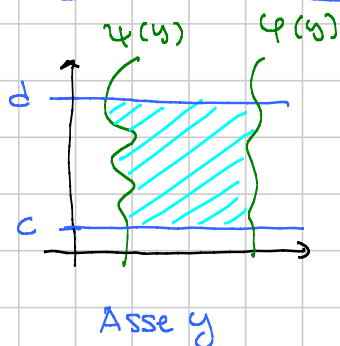
$$\iint_A y dx dy = \int_0^2 dy \int_{-1}^1 dx \otimes y = \int_0^2 y dy \underbrace{\int_{-1}^1 dx}_{\text{lungh. interv.}} = 2 \int_0^2 y dy = \dots$$

Formula di riduzione sugli insiemi normali

Def. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice

- normale rispetto all'asse x se è del tipo

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$



- normale rispetto all'asse y se è del tipo

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$

Formula di spezzamento

$$\text{Asse } x \rightsquigarrow \iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$$

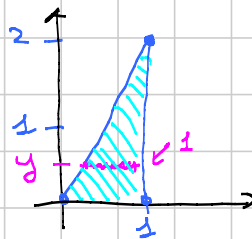
$$\text{Asse } y \rightsquigarrow \iint_A f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx$$

— o — o —

Oss. Lo stesso insieme A può essere normale nelle due direzioni.

Esempio 3 $f(x,y) = x^2 y$

A = triangolo con vertici in
 $(0,0), (1,0), (1,2)$



$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], 0 \leq y \leq 2x\}$$

$$\begin{aligned} \iint_A x^2 y \, dx \, dy &= \int_0^1 dx \int_0^{2x} dy \, x^2 y = \int_0^1 x^2 dx \int_0^{2x} y \, dy \\ &= \int_0^1 x^2 dx \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=2x} = \int_0^1 2x^4 dx = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Alternativa: scrivo A come normale rispetto all'asse y

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,2], \frac{1}{2}y \leq x \leq 1\}$$

$$\iint_A x^2 y \, dx \, dy = \int_0^2 dy \int_{\frac{1}{2}y}^1 dx \, x^2 y = \int_0^2 y \, dy \int_{\frac{1}{2}y}^1 x^2 dx$$

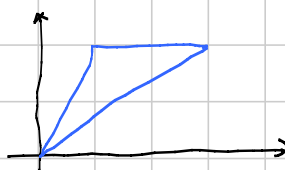
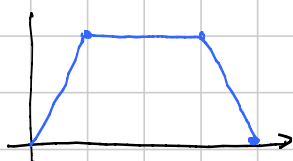
$$= \int_0^2 y \, dy \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{x=\frac{1}{2}y}^{x=1} = \int_0^2 y \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{24} y^3 \right) dy$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{1}{3} y - \frac{1}{24} y^4 \right) dy = \left[\frac{1}{6} y^2 - \frac{1}{120} y^5 \right]_{y=0}^{y=2} = \frac{2}{3} - \frac{32}{120}$$

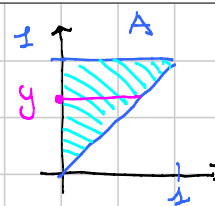
$$= \frac{80-32}{120} = \frac{48}{120} = \frac{2}{5}$$



Oss. Normale rispetto asse y può essere comodo!



Esempio 4 $\iint_A e^{y^2} dx dy$



1° modo Normale asse x

$$\iint_A e^{y^2} dx dy = \int_0^1 dx \int_x^1 dy e^{y^2} \quad \text{non so fare la primitiva 😞}$$

2° modo Normale asse y

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1], 0 \leq x \leq y\}$$

$$\begin{aligned} \iint_A e^{y^2} dx dy &= \int_0^1 dy \int_0^y dx e^{y^2} = \int_0^1 e^{y^2} dy \int_0^y dx \\ &= \int_0^1 y e^{y^2} dy = \text{😊} \end{aligned}$$

1° modo, tenendo duro

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_x^1 dy e^{y^2} &= \int_0^1 dx [F(y)]_{y=x}^{y=1} \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{primitiva} \\ &= \int_0^1 [F(1) - F(x)] dx = F(1) - \int_0^1 1 \cdot F(x) dx \\ &\quad \text{per parti!} \end{aligned}$$

$$= F(1) - \left\{ [x F(x)]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 x e^{x^2} dx \right\}$$

$\swarrow \quad \nearrow$
 si cancellano

$\quad \quad \quad \uparrow$
 $\quad \quad \quad F'(x)$

— 0 — 0 —

ANALISI 2

-

LEZIONE 031

Note Title

03/11/2017

Formula di spezzamento

Brutale: $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy$

Teorema (Fubini, Fubini - Tonelli)

Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata e nulla fuori da un limitato.

Allora

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy &\leq \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}}^* f(x,y) dy \leq \iint_{\mathbb{R}^2}^* f(x,y) dx dy \end{aligned}$$

↑ ↑ ↑
integr. sup. su $\mathbb{R}$ integr. sup. su $\mathbb{R}^2$

Dcm. **Caso banale** $f(x,y) =$ funzione caratteristica di un rettangolo

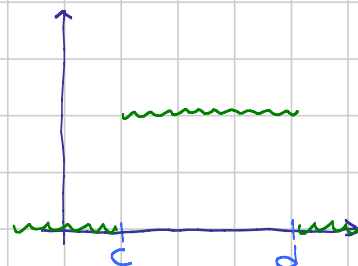
$$f_{\mathbb{R}}(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{se } (x,y) \in [a,b] \times [c,d] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In questo caso la formula vale con tutti = e integrali veri.
 È una verifica: ai lati abbiamo per def. $(d-c)(b-a)$.

Vediamo i 2 termini al centro. Fissato $x \in \mathbb{R}$, considero la "colonna"

$$y \rightarrow f(x,y)$$

Questa è $\equiv 0$ se $x \notin [a,b]$, altrimenti è come in figura



Quindi

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin [a,b] \\ (d-c) & \text{se } x \in [a,b] \end{cases}$$

e pertanto

$$x \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy \text{ è}$$

e quindi

$$\int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy = (b-a)(c-d).$$



Caso semibanal f è comb. lin. di caratteristiche di rettang. Anche qui vale con tutti = e integrali veri. Consideriamo le 2 applicazioni

$$f \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy$$

$$f \rightarrow \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy f(x,y)$$

Sono due applic. lineari definite sullo sp. vet. delle step functions (a valori in $\mathbb{R}$) e coincidono in una base (le caratt. dei rettangoli). Quindi coincidono ovunque. 😊

Caso generale Devo dim. 3 disug. Quella centrale è quasi immediata.

Facciamo quella di dx (l'altra è simmetrica).

Sia $\varphi(x,y)$ una S.F. con

$$f(x,y) \leq \varphi(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

È chiaro che

$$\int_{\mathbb{R}}^* f(x,y) dy \leq \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,y) dy \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

perché la restrizione di $\varphi(x,y)$ alle colonne (x costante) è una S.F. in una variabile $\geq$ della restrizione di f alla colonna.

Poiché è vera per ogni x , e il RHS è a sua volta una S.F. nella variabile x , integrando nuovamente ottengo

$$\int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy \leq \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,y) dy = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) dx dy$$

↑
caso
semibianale

Facendo l'inf. del RHS al variare di φ otteniamo la disug. di dx.

— o — o —

Corollario (Fubini - Tonelli con tutti uguale)

Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ come nel teorema.

Supponiamo che

- (i) f è integrabile in $\mathbb{R}^2$
- (ii) per ogni $x \in \mathbb{R}$ la funzione

$$y \rightarrow f(x,y) \quad (\text{cioè la colonna})$$

è integrabile su $\mathbb{R}$.

Allora la funzione

$$x \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy$$

è integrabile in $\mathbb{R}$ e vale la relazione che ci aspettiamo:

$$\int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy f(x,y) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy.$$

Dim. Scrivendo la formula generale abbiamo RHS = LHS, quindi sono tutti =

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy &= \int_{*\mathbb{R}} dx \boxed{\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy} \\ &= \int_{\mathbb{R}}^* dx \boxed{\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy} = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy\end{aligned}$$

Questo dice che la funzione interna è integrabile su $\mathbb{R}$.

Oss. In entrambi i teoremi / corollario le ipotesi sono necessarie e le disug. possono essere strette.

Patologia 1 Esempio di funzione non integrabile su $\mathbb{R}^2$.
Dirichlet sul quadrato

$$d(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{se } (x,y) \in [0,1]^2 \cap \mathbb{Q}^2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si verifica che

$$\iint_{\mathbb{R}^2}^* d(x,y) dx dy = 1, \quad \iint_{*\mathbb{R}^2} d(x,y) dx dy = 0.$$

Vediamo quanto vale

$$\int_{\mathbb{R}}^* d(x,y) dy = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

e quindi

$$\int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy d(x,y) = 1$$

Analogamente si verifica che

$$\int_{*\mathbb{R}} dx \underbrace{\int_{*\mathbb{R}} dy d(x,y)}_{\substack{0 \\ \forall x \in \mathbb{R}}} = 0$$

Esercizio (hard) Fare in modo che nel teo. generale
i 4 numeri siano

$$0 < 12 < 37 < 2017$$

Patologia 2 Può succedere che $f(x,y)$ sia integrabile su $\mathbb{R}^2$, ma esistano dei valori di x per cui $y \rightarrow f(x,y)$ non è integrabile su $\mathbb{R}$.
Quindi: l'hp (ii) nel corollario serve.

Esempio: Dirichlet su una colonna e basta

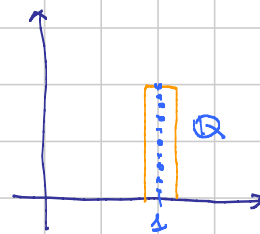
$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x=1 \text{ e } y \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La colonna sopra $x=1$ non è integrabile.

Tuttavia, la funzione è integrabile su $\mathbb{R}^2$ con integrale nullo.

Come s.f. dal basso uso quella $\equiv 0$.

Come s.f. dall'alto uso la caratteristica di $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon] \times [0,1]$, il cui integrale è 2ε .



Patologia 3 Può succedere che i 2 termini centrali nel teorema generale coincidano, e contengano solo integrali veri, eppure la $f(x,y)$ non è integrabile su $\mathbb{R}^2$. Possono coincidere anche nei 2 tipi di spezzamento (dx esterna o interna).

Lemma Esiste un sottoinsieme $D \subseteq [0,1]^2$ denso che interseca al più una volta ogni retta orizzontale e ogni retta verticale.

Dato il denso D del Lemma, la sua funzione caratteristica verifica la patologia 3 (viene tutto o a tappeto)

Dim. Lemma Consideriamo tutti i cerchi con centro in un pto di $[0, 1]^2$ a coord. razionali e raggio razionale.

Fatto 1 Se D ha almeno 1 pto in ognuno dei cerchi, allora è denso. (quei cerchi sono una base per la topologia)

Fatto 2 Quei cerchi sono numerabili, cioè li posso "listare" come

$C_1, C_2, C_3, C_4, \dots$
con indici naturali.

Fatto 3 Ora vado per induzione. Prendo a caso $d_1 \in C_1$, poi prendo a caso $d_2 \in C_2$ evitando le 2 rette // agli assi che passano per d_1 , poi prendo $d_3 \in C_3$ a caso evitando le 2 rette per d_1 e le due rette per d_2 , e così via.

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 032

Note Title

03/11/2017

Funzioni integrabili ed insiemi misurabiliTeorema (Heine-Cantor in $\mathbb{R}^n$)Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $f: K \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

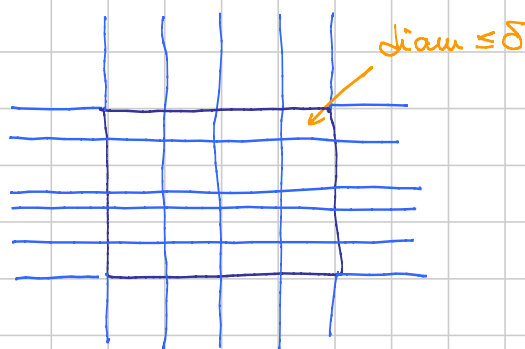
(i) f è continua in K ,(ii) K è compatto.Allora f è unif. cont. su K .Dimostrazioni Stesse dell'Analisi 1 e stesse degli spazi metrici (seconda parte del corso).Prop. Le funzioni continue sono integrabili sui rettangoli.Dim. Sia $R := [a,b] \times [c,d]$. Sia $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Estendo f a tutto $\mathbb{R}^2$ (la metto a fuori di R). Per ogni $\varepsilon > 0$ cerco due step function.

$$\varphi_\varepsilon(x,y) \leq f(x,y) \leq \psi_\varepsilon(x,y)$$

$$\text{tali che } \int_{\mathbb{R}^2} (\psi_\varepsilon(x,y) - \varphi_\varepsilon(x,y)) dx dy \leq \varepsilon.$$

Per unif. cont. prendo il $\delta > 0$ corrispondente a $\frac{\varepsilon}{\text{Area}(R)}$ Ora considero una partizione di $\mathbb{R}^2$ che contenga i lati del rett. e abbia tutti rettangolini di diametro $\leq \delta$ $\uparrow$
max dist. tra 2 p.ti = lungh. diagonale

Definisco χ_ε e φ_ε come 0 fuori di R , ed in ogni rettangolino interno come $\min / \max$ di f sul rettangolino. Questi esistono per W e distano meno di $\frac{\varepsilon}{\text{Area}(R)}$



perché il diam. è $\leq \delta$. Di conseguenza

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\varphi_\varepsilon - \chi_\varepsilon) dx dy \leq \int_R \frac{\varepsilon}{\text{Area}(R)} dx dy = \varepsilon.$$

Def. (Insiemi misurabili) Un sottoinsieme Limitato di $\mathbb{R}^2$ si dice misurabile (secondo Riemann, o secondo Peano-Jordan) se la sua funzione caratteristica è integrabile.

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ è mis. $\Leftrightarrow \chi_A(x,y)$ è integrabile in $\mathbb{R}^2$
 $\uparrow$
 1 su A , 0 fuori

Criterio di misurabilità Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è misurabile se e solo se vale la seguente proprietà.

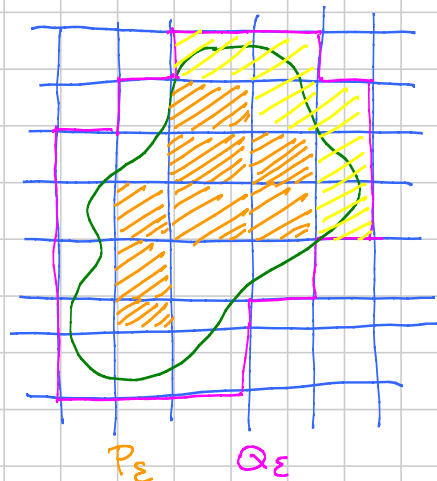
Per ogni $\varepsilon > 0$, esistono due plurirettangoli (unioni finite di rettangoli senza pti interni in comune) P_ε e Q_ε t.c.

$$P_\varepsilon \subseteq A \subseteq Q_\varepsilon$$

e

$$\underbrace{\text{Area}(Q_\varepsilon) - \text{Area}(P_\varepsilon)}_{\text{Area zona compresa tra } P_\varepsilon \text{ e } Q_\varepsilon} \leq \varepsilon$$

Oss. Posso sempre pensare P_ε e Q_ε definite a partire dalle stesse rette orizz. e verticali.



Def. sostanzialmente equivalente : $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è misurabile se e solo se è limitato e posso ricoprire ∂A con un plurirettagolo di area $\leq \varepsilon$.

Dim. caratt. Se ho P_ε e Q_ε di uso per fare ψ_ε e φ_ε che stanno sotto sopra la caratt. di A .

Viceversa, se so che f_A è integrabile, dato $\varepsilon > 0$ prendo $\psi_\varepsilon \leq f_A \leq \varphi_\varepsilon$ con

$$\iint_{\mathbb{R}^2} (\varphi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) dx dy \leq \varepsilon$$

e posso $Q_\varepsilon := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi_\varepsilon(x,y) \geq 1\}$ FUORI
 $P_\varepsilon := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \psi_\varepsilon(x,y) > 0\}$ DENTRO

Teorema Se $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è misurabile e compatto, e $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora f è integrabile in A .

Dim. Essendo A misurabile, posso usare rette parallele agli assi in modo tale che la zona tra Q_ε e P_ε sia piccola a piacere.

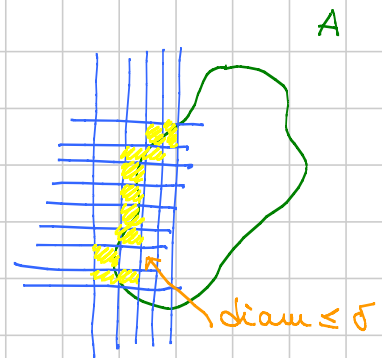
Fisso $\varepsilon > 0$. Considero la costante M tale che $|f(x,y)| \leq M$ per ogni $(x,y) \in A$ (esiste per w.).

Considero il δ dell' unif. continuità che corrisponde a

$$\frac{\varepsilon}{2 \text{ Area}(P_\varepsilon)}$$

Considero una suddivisione abbastanza fine in modo che tutti i rettangoli hanno $\text{diam} \leq \delta$ e

$$\text{Area}(Q_\varepsilon) - \text{Area}(P_\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{4M}.$$



Ora pongo

$$\varphi_\varepsilon(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{fuori da } Q_\varepsilon \\ \max f & \text{nei rettangoli di } P_\varepsilon \\ M & \text{nella zona tra } P_\varepsilon \text{ e } Q_\varepsilon \end{cases}$$

$$\psi_\varepsilon(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{fuori da } Q_\varepsilon \\ \min f & \text{nei rettangoli di } P_\varepsilon \\ -M & \text{nella zona tra } P_\varepsilon \text{ e } Q_\varepsilon. \end{cases}$$

Si verifica che $\psi_\varepsilon \leq f \text{ estesa} \leq \varphi_\varepsilon$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} (\varphi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) dx dy &= \iint_{P_\varepsilon} (\varphi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) dx dy + \iint_{Q_\varepsilon \setminus P_\varepsilon} (\varphi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) \dots \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2 \text{Area}(P_\varepsilon)} + \frac{\varepsilon}{2M} \dots \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Prop. (Misurabilità degli insiemi normali)

Sia

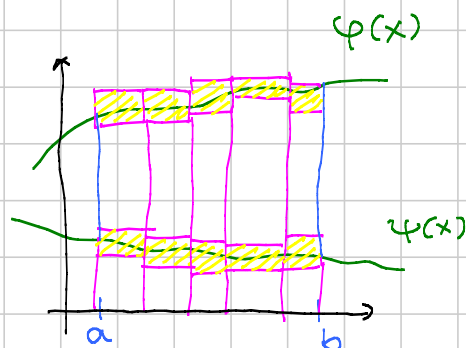
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \in [a,b], \psi(x) \leq y \leq \varphi(x)\}$$

un insieme normale rispetto all'asse x .

Supponiamo che φ e ψ siano integrabili in $[a,b]$ (se sono continue ancora meglio).

Allora A è misurabile in $\mathbb{R}^2$.

Dim. Pseudo step funct. per φ e ψ
e grazie a quelle ottengo
 P_ε e Q_ε



Fatto Unione ed intersezione di insiemi misurabili è ancora misurabile.

Dim. Si potrebbe fare giocando con P_E e Q_E , ma forse non è così banale.
Più semplicemente

$$f_{A \cap B} = f_A \cdot f_B$$

$$f_{A \cup B} = \max \{f_A, f_B\}$$

Ora basta usare i teoremi sulle funzioni integrabili.
— o — o —

Stessa cosa si può fare per $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua e $A \subseteq \mathbb{R}^2$ misurabile.

L'estensione a 0 di f fuori di A è

$$f_A \cdot f.$$



ANALISI 2 — LEZIONE 033

Note Title

07/11/2017

Integrali doppi in coord. polari

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \\ y &= \rho \sin \theta \end{aligned}$$

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \iint_B f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta$$

integrale da calcolare

Descrizione di A in coord. polari

pagamento

Esempio 1 $\iint_A (x^2 + y^2) dx dy$

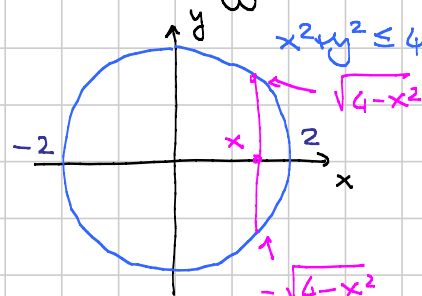
A = cerchio con centro in (0,0) e raggio 2

1° modo Normale risp. asse x

$$\int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy (x^2 + y^2)$$

$$= \int_{-2}^2 dx \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}$$

= resta roba piena di radici



2° modo Uso coord. polari

In coord. polari l'insieme diventa

$$0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

B

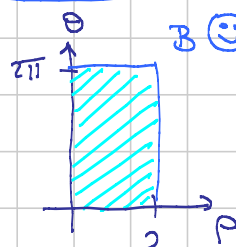
B ☺

$$\iint_A (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^2 \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \rho^2$$

A descritto in coord. polari

ρ^2 in coord. polari

pagamento



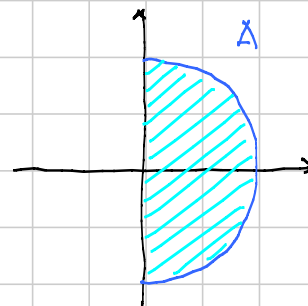
$$= \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \int_0^2 \rho^3 d\rho = 2\pi \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_{\rho=0}^{\rho=2} = 8\pi.$$

Esempio 2 $\iint_A x^2 dx dy$ $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$

In coord. polari A diventa

$$0 \leq \rho \leq 1 \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Non pensare nemmeno a $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{7\pi}{2}$!!!



Alternativa sensata $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \iint_A x^2 dx dy &= \int_0^1 \rho d\rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \underbrace{\rho^2 \cos^2 \theta}_{\substack{\uparrow \\ x^2}} \cdot \underbrace{\rho}_{\substack{\uparrow \\ \text{pag.}}} \\ &= \int_0^1 \rho^3 d\rho \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta}_{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

Oss. Gli integrali di $\cos^2 \theta$ e $\sin^2 \theta$ tra estremi che sono multipli interi di $\frac{\pi}{2}$ sono uguali a metà della lunghezza dell'intervallo.

$$C := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \quad S := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta$$

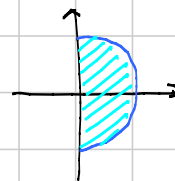
Osservo che $C = S$ per simmetria e $C + S = \frac{\pi}{2}$ per trigonometria. La situazione è la stessa con estremi $k\frac{\pi}{2}$ e $Q\frac{\pi}{2}$ ($k, Q \in \mathbb{Z}$)

Discorso simile vale per integrali $\int_{k\frac{\pi}{2}}^{Q\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta$, $\int_{\dots}^{\dots} \cos \theta d\theta$.

Esempio 3 A come nell'esempio 2

$$\iint_A x \, dx \, dy$$

$$\iint_A y \, dx \, dy$$



0
(per simmetria: positivo sopra
e altrettanto negativo sotto)

Per la simmetria occorre osservare 2 cose:

- l'integranda $f(x,y) = y$ è DISPARI nella variabile y
- l'insieme A è simmetrico rispetto alla trasf. $(x,y) \rightarrow (x,-y)$

Questo basta per garantire l'integrale nullo, cosa che si vede bene lavorando come insieme normale risp. asse x :

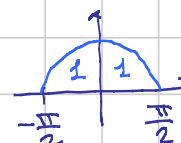
$$\iint_A y \, dx \, dy = \int_a^b dx \int_{-g(x)}^{g(x)} f(x,y) \, dy$$

Integrale di funz. dispari in y
su insieme simmetrico.

$$\iint_A x \, dx \, dy = \text{ce lo aspettiamo positivo}$$

$$= \int_0^1 \rho \, d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \cdot \rho \, d\theta = \int_0^1 \rho^2 \, d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \, d\theta$$

$$= 2 \int_0^1 \rho^2 \, d\rho = \frac{2}{3}$$

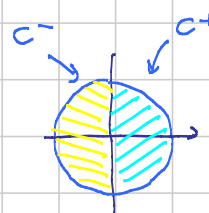


Esempio 4 $\iint_C |x| \, dx \, dy$

C = cerchio con centro $(0,0)$
e raggio 1

$$= \frac{4}{3} \text{ (il doppio di prima)}$$

- l'integranda è pari nella variabile x
- C è simmetrico risp. a $(x,y) \rightarrow (-x,y)$



Esempio 5 $\iint_D x \, dx \, dy$

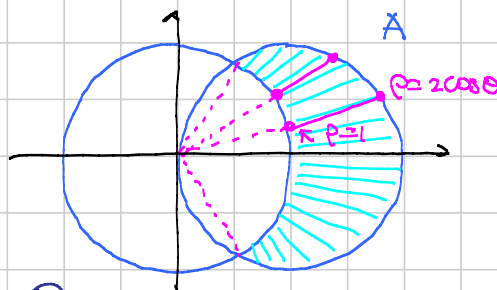
$D =$ p.ti esterni a $x^2 + y^2 = 1$ e interni al cerchio con centro in $(1,0)$ e raggio 1.

L'eq. della seconda circ. è

$$(x-1)^2 + y^2 \leq 1$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 \leq 1$$

$$x^2 + y^2 \leq 2x$$



1° modo Normale asse $x \rightsquigarrow$ antipatico 😞

2° modo Coord. polari $p \geq 1$ (fuori dal 1° cerchio)

$$p^2 \leq 2p \cos \theta \quad (x^2 + y^2 \leq 2x)$$

$$p \leq 2 \cos \theta$$

$\rightsquigarrow$

$$1 \leq p \leq 2 \cos \theta$$

$$\theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max}$$

$$1 = 2 \cos \theta$$

$$\rightsquigarrow \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$\rightsquigarrow$

$$-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$$

$$\iint_A x \, dx \, dy = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_1^{2 \cos \theta} dp \quad p \cos \theta \cdot p$$

$\uparrow$
 θ dove espone
esterna

$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos \theta \int_1^{2 \cos \theta} p^2 dp = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos \theta \left[\frac{1}{3} p^3 \right]_1^{2 \cos \theta}$$

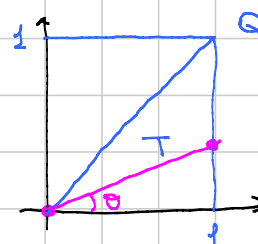
$$= \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (8 \cos^4 \theta - \cos \theta) d\theta = \text{analisi e si fa.}$$

— o — o —

Esempio 6 Calcolare la distanza media dei pti di un $\square$ da un vertice dato.

$$\iint_Q \sqrt{x^2+y^2} dx dy$$

- In cartesiane, insieme $\ddot{\sim}$ funzione $\ddot{\sim}$
- In polari, insieme $\ddot{\sim}$ " $\ddot{\sim}$



Come descrivo Q in coord. polari?

Per simmetria $\iint_Q \sqrt{x^2+y^2} dx dy = 2 \iint_T \sqrt{x^2+y^2} dx dy$

ho usato che $f(x,y)$ e Q non cambiano rispetto alla trasformazione $(x,y) \rightarrow (y,x)$ (simmetria risp. bisettrice)

Scrivo T in polari: intanto $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$. Fissato θ ,
dove varia ρ ? $x=1 \leadsto \rho \cos \theta = 1$
 $\leadsto \rho = \frac{1}{\cos \theta}$

Quindi $0 \leq \rho \leq \frac{1}{\cos \theta}$

$$\iint_T \sqrt{x^2+y^2} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} \rho d\rho$$

pag. $\swarrow$
 $\rho \uparrow$
 $\sqrt{x^2+y^2}$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \left[\frac{1}{3} \rho^3 \right]_{\rho=0}^{\rho=\frac{1}{\cos \theta}} = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 \theta} d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos \theta}{\cos^4 \theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos \theta}{(1-\sin^2 \theta)^2} d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-y^2)^2} dy = \text{si fa facile. } \square$$

$y = \sin \theta \uparrow$

ANALISI 2

LEZIONE 034

Titolo nota

07/11/2017

Cambi di variabile in generale

Descrizione della formula

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \iint_B \overbrace{g(u,v)}^{\text{funzione nelle nuove variabili}} \underbrace{J(u,v)}_{\substack{\text{insieme A descritto} \\ \text{nelle variabili} \\ u \text{ e } v}} du dv$$

↑ pagamento
(J sta per determinante
JACOBIANO)

Esempio 1 $\iint_A (y^2 - x^2) dx dy$

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{1 \leq x+y \leq 2}_u, \underbrace{3 \leq x-y \leq 4}_v \}$$

Sarebbe comodo porre

$$x+y = u \quad x-y = v$$

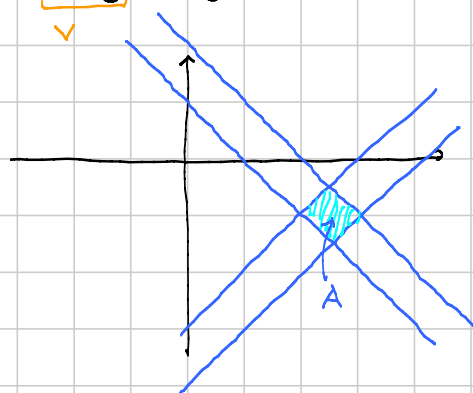
così l'insieme diventa

$$1 \leq u \leq 2$$

$$3 \leq v \leq 4$$

La funzione diventa

$$y^2 - x^2 = (y-x)(y+x) = -uv$$

Come calcolo $J(u,v)$? Procedura

- ① Ricavo x e y in funzione di u e v
- ② Calcolo la matrice jacobiana $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$
- ③ $J(u,v) = |\text{Det}|$.

$$\textcircled{1} \begin{cases} x+y = u \\ x-y = v \end{cases} \quad x = \frac{u+v}{2} \quad y = \frac{u-v}{2}$$

$$\textcircled{2} \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3} J(u, v) = |\text{Det}| = \left| -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \iint_A (x^2 - y^2) dx dy &= \underbrace{\int_1^2 du \int_3^4 dv}_{\text{insieme nelle nuove coord}} \underbrace{(-uv)}_{\substack{\uparrow \\ \text{nuova} \\ \text{funzione}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\substack{\uparrow \\ J(u,v)}} \\ &= -\frac{1}{2} \int_1^2 u du \int_3^4 v dv = \text{si fa.} \\ &\quad \text{--- o --- o ---} \end{aligned}$$

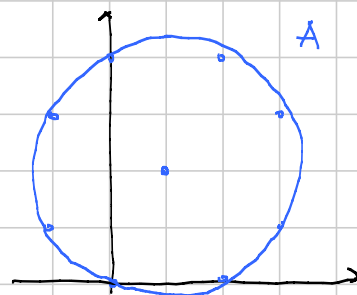
Esempio 2 $\iint_C y^2 dx dy$

C = Cerchio con centro in $(1, 2)$ e passante per $(0, 0)$

Equazione del cerchio

$$\underbrace{(x-1)}_u^2 + \underbrace{(y-2)}_v^2 = 5$$

L'insieme diventa $u^2 + v^2 \leq 5$



$$\textcircled{1} u = x-1, \quad v = y-2 \quad \leadsto \quad \begin{aligned} x &= u+1 \\ y &= v+2 \end{aligned}$$

$\textcircled{2}$ Matrice: identità

$$\textcircled{3} |\text{Det}| = 1$$

$$\iint_C y^2 dx dy = \iint_{u^2+v^2 \leq 5} \underbrace{(v+2)^2}_{\substack{\uparrow \\ \text{Nuova funzione}}} \cdot \underbrace{1}_{\substack{\uparrow \\ J}} du dv$$

$$= \iint_{u^2+v^2 \leq 5} (v^2 + 4v + 4) du dv$$

$$\downarrow$$

$$\int v = 0 \text{ per simmetria}$$

Osservo che $\int v = 0$ per simmetria

$$\int 4 = 4 \cdot \text{Area cerchio} = 4 \cdot \pi \cdot 5 = 20\pi$$

Resta da calcolare solo

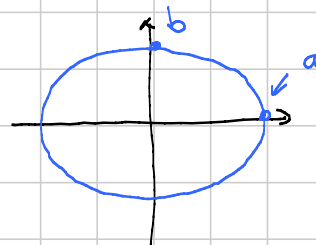
$$\begin{aligned} \iint_{u^2+v^2 \leq 5} v^2 du dv &= \int_0^{\sqrt{5}} dp \int_0^{2\pi} d\theta \, p^2 \sin^2 \theta \cdot p \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{polari} \\ &= \underbrace{\int_0^{\sqrt{5}} p^3 dp}_{\frac{25}{4}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta}_{\pi} = \frac{25}{4} \pi \end{aligned}$$

Conclusione $20\pi + \frac{25}{4} \pi.$

Oss. • Se il cambio di variabili è una traslazione, allora $J=1$
 • Se il cambio di variabili è affine, allora
 $J = |\text{Det}(\text{matrice})|$

Esempio 3 Calcolare l'area dell'ellisse in posizione canonica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$



Viene da porre $\frac{x}{a} = u$ $\frac{y}{b} = v$

L'insieme diventa il cerchio $u^2 + v^2 \leq 1$

$$\textcircled{1} \quad x = au, \quad y = bv \quad \textcircled{2} \quad \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3} \quad J(u, v) = |\text{Det}| = ab$$

Conclusione

$$\begin{aligned} \text{Area ellisse} &= \iint_{\text{ell.}} 1 \, dx \, dy = \iint_{u^2 + v^2 \leq 1} 1 \cdot ab \, du \, dv \\ &= ab \cdot \text{area}(\text{cerchio}) = \pi ab \end{aligned}$$

Oss. Se $a = b = r$, viene la classica area del cerchio.

Oss. • Ad analisi 1: $\int_a^b 1 \, dx = (b-a) = \text{lunghezza segmento}$
 $= \text{area rettangolo con}$
 $\text{base } [a, b] \text{ e altezza } 1.$

• Ad analisi 2:

$$\iint_A 1 \, dx \, dy = \text{Area}(A) = \text{volume del prisma con base } A \text{ e altezza } 1.$$

— o — o —

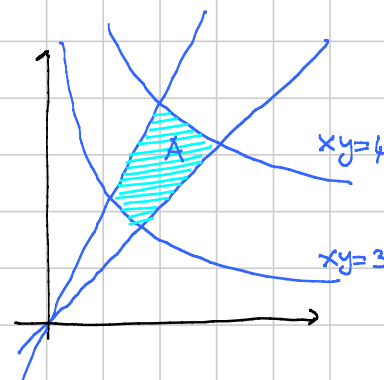
Esempio 4 $\iint_A y \, dx \, dy$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \geq 0, y \geq 0, x \leq y \leq 2x, 3 \leq xy \leq 4\}$$

In cartesiane viene, ma cerco alternative

$$1 \leq \frac{y}{x} \leq 2 \quad 3 \leq xy \leq 4$$

$\underbrace{\quad}_{u} \quad \underbrace{\quad}_{v}$



Calcolo $J(u, v)$ "brevemente"

$$\textcircled{1} \quad u = \frac{y}{x} \quad v = xy \quad \rightsquigarrow \quad y = \sqrt{uv} \quad , \quad x = \sqrt{\frac{v}{u}} = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$$

$$\textcircled{2} \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{v}}{u\sqrt{u}} & \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{v}\sqrt{u}} \\ \frac{1}{2} \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} & \frac{1}{2} \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3} J(u,v) := |\text{Det}| = \left| -\frac{1}{4} \frac{1}{u} - \frac{1}{4} \frac{1}{u} \right| = \frac{1}{2u}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \iint_A y \, dx \, dy &= \underbrace{\int_1^2 du \int_3^4 dv}_{\substack{\text{nelle nuove variabili} \\ \text{è un rettangolo!}}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{uv}} \frac{1}{2u}}_{\substack{\uparrow \\ J(u,v)}} \\ &= \int_1^2 du \int_3^4 dv \frac{1}{2} \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{u}} du \int_3^4 \sqrt{v} \, dv \\ &= \text{facile conto.} \end{aligned}$$

Procedura alternativa per il calcolo di J : $u = \frac{y}{x}$ $v = xy$

$$\textcircled{2'} \text{ Calcolo } \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ y & x \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3'} |\text{Det}| = \left| -2 \frac{y}{x} \right| = 2 \frac{y}{x}$$

$\textcircled{4'}$ Faccio $\frac{1}{|\text{Det}|}$ e lo scrivo in (u,v)

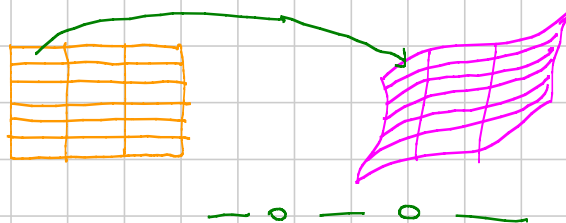
$$\frac{1}{|\text{Det}|} = \frac{1}{2} \frac{x}{y} = \frac{1}{2u}$$

(stesso risultato di prima, solo con procedura più semplice)

— o — o —

Perché funziona la procedura? Brutalmente

- basta dimostrare il risultato nel caso in cui l'integranda $f(x,y)$ è la funzione caratt. di un rettangolo.
- facciamo finta che la trasformazione sia affine: allora la trasformata di f diventa la caratteristica del trasf. del rettangolo, che è un parallelogrammo. L'area del parallelogrammo è proprio il determinante.
- Ogni trasformazione, anche non affine, per Taylor è "affine i piccoli", quindi rettangoli piccoli vanno in parallelogrammi piccoli



ANALISI 2

LEZIONE 035

Note Title

08/11/2017

INTEGRALI TRIPLI① Notazioni

$$\iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

↑
zona di
integrazione

Si intende che

- $A \subseteq \mathbb{R}^3$ limitato
- $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è limitata

② Significato fisico Pensiamo A come un solido

Supponiamo $f(x, y, z) > 0$ e rappresenta la densità del materiale di cui è fatto il solido che varia da p.to a p.to. Come calcolo la massa del solido?

→ se A è un parallelepipedo e f è costante, allora basta moltiplicare la densità per il volume (caso banale)

→ altrimenti posso scomporre A in "parall. piccoli" e fare finta che la densità sia costante su ognuno di essi.

Poi sommo la massa dei singoli (somma di Riemann o Darboux)

③ Definizione formale

→ Caso banale : $A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$

$f(x, y, z) = \lambda$ in A (e 0 fuori di A)

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \lambda \underbrace{\prod_{i=1}^3 (b_i - a_i)}_{\text{Vol}(A)}$$

→ Caso semi-banale : SF = comb. lin. di casi banali

→ Caso generale: definisco al solito modo int. sup. e inf. e se coincidono...

Prop. Valgono le solite proprietà di sempre con le stesse dim. di analisi 1:

- linearità
- monotonia (se $f \leq g$, allora...)
- continuità (integrale di $|f|$ è $\geq$ del val. ass. di int. f)
- integrabilità di $f \cdot g$ e $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$

Allo stesso modo si dice che $A \subseteq \mathbb{R}^3$ è misurabile se la funzione indicatrice di A (1 in A e 0 fuori) è integrabile.

Prop. Se $A \subseteq \mathbb{R}^3$ è misurabile e $f: A \rightarrow \mathbb{R}^3$ è continua, allora f è integrabile in A (stessa dim. del caso di due variabili)

4 Tecniche di calcolo = formule di riduzione

• formula sui parallelepipedi $3 = 1 + 1 + 1$

• integrale per colonne $3 = 2 + 1$

• integrale per sezioni $3 = 1 + 2$

Sui parallelepipedi

$$A := [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$$

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz f(x, y, z)$$

permutando le variabili
otengo 6 formule

Esempio 1

$$A = [0, 1] \times [-1, 1] \times [0, 2]$$

$$f(x, y, z) = x + yz$$

$$\begin{aligned} \iiint_A (x + yz) \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 dx \int_{-1}^1 dy \int_0^2 dz (x + yz) \\ &= \int_0^1 dx \int_{-1}^1 dy \underbrace{\left[xz + \frac{1}{2} y z^2 \right]_{z=0}^{z=2}}_{\text{primitiva in } z} \\ &= \int_0^1 dx \int_{-1}^1 dy (2x + 2y) \\ &= \int_0^1 dx \left[2xy + y^2 \right]_{y=-1}^{y=1} = \int_0^1 dx (2x + 1 + 2x - 1) \\ &= \int_0^1 4x \, dx = \left[2x^2 \right]_{x=0}^{x=1} = 2. \end{aligned}$$

2° modo, più astuto

$$\begin{aligned} \iiint_A (x + yz) \, dx \, dy \, dz &= \iiint_A x \, dx \, dy \, dz + \underbrace{\iiint_A yz \, dx \, dy \, dz}_{=0} \\ \iiint_A yz \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 dx \int_0^2 dz \int_{-1}^1 dy \, yz = \int_0^1 dx \int_0^2 z \, dz \underbrace{\int_{-1}^1 y \, dy}_{=0} \\ \iiint_A x \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 dx \int_{-1}^1 dy \int_0^2 dz \quad (\text{circled } x) \\ &= \int_0^1 x \, dx \underbrace{\int_{-1}^1 dy \int_0^2 dz}_{\text{area di } [-1, 1] \times [0, 2] = 2 \cdot 2 = 4} \\ &= \int_0^1 4x \, dx = 2. \end{aligned}$$

Integrale per colonne

$$3 = 2 + 1$$

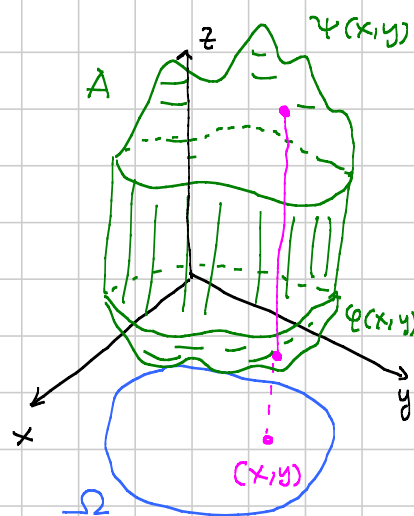
Def. Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice normale rispetto al piano xy se si può scrivere nella seguente forma

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$$

dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ è un sottoinsieme limitato (detto "base") e $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $\psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni che descrivono i "tappi".

Prop. Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ è misurabile e φ e ψ sono integrabili, allora $A \subseteq \mathbb{R}^3$ è misurabile.

Oss. Analogamente si definiscono gli insiemi normali rispetto agli altri piani.

Formula di riduzione per colonne

Se A è normale risp. al piano xy , allora

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\Omega} dx dy \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} dz f(x, y, z)$$

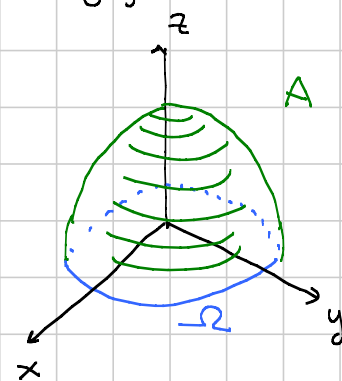
integrale sulla colonna
che sta sopra il pto (x, y)

— o — o —

Esempio 1 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$
 $f(x, y, z) = x^2 z$

Posso scrivere A come insieme normale
 nella forma

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + y^2 \leq 1}_{\substack{\text{descrive la base } \Omega \\ \uparrow \\ \varphi(x, y)}}, \underbrace{0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2}_{\substack{\text{descrive la colonna} \\ \uparrow \\ \psi(x, y)}}\}$$



$$\begin{aligned} \iiint_A x^2 z \, dx \, dy \, dz &= \iint_{\Omega} dx \, dy \int_0^{1-x^2-y^2} x^2 z \, dz \\ &= \iint_{\Omega} x^2 dx \, dy \int_0^{1-x^2-y^2} z \, dz \\ &= \iint_{\Omega} x^2 dx \, dy \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{z=0}^{z=1-x^2-y^2} \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} x^2 (1-x^2-y^2)^2 dx \, dy \\ &\stackrel{\text{polari}}{=} \frac{1}{2} \int_0^1 \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \, \rho^2 \cos^2 \theta (1-\rho^2)^2 \rho \quad \uparrow \text{PAG.} \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \rho^3 (1-\rho^2)^2 d\rho = \text{banale analisi 1.} \end{aligned}$$

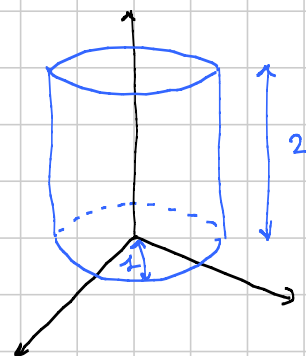
Esempio 2 $A =$ cilindro in figura

$$\iiint_A (z^2 + y^2 \sin x) \, dx \, dy \, dz$$

$$= \iint_A z^2 \, dx \, dy \, dz + \iint_A y^2 \sin x \, dx \, dy \, dz$$

• l'int. è dispari in x

• A è invariante rispetto a $(x, y, z) \rightarrow (-x, y, z)$



Scriviamo A come insieme normale

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$$

$$\begin{aligned} \iiint_A z^2 dx dy dz &= \iint_{\Omega} dx dy \int_0^2 dz z^2 \\ &= \iint_{\Omega} dx dy \left[\frac{1}{3} z^3 \right]_{z=0}^{z=2} \\ &= \frac{8}{3} \iint_{\Omega} dx dy \\ &= \frac{8}{3} \text{Area}(\Omega) = \frac{8}{3} \pi. \end{aligned}$$

— 0 — 0 —

ANALISI 2

—

LEZIONE 036

Note Title

08/11/2017

INTEGRAZIONE PER SEZIONI

$$3 = 1 + 2$$

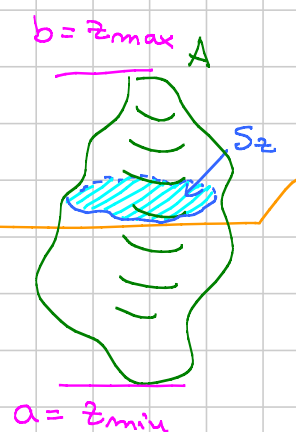
$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dz \iint_{S_z} f(x, y, z) dx dy$$

dove

- a e b sono il min e max valore di z all'interno dell'insieme A ,
- S_z è la sezione di A ad altezza z , cioè

$$S_z := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in A \}$$

piano
piano xy ad
altezza z



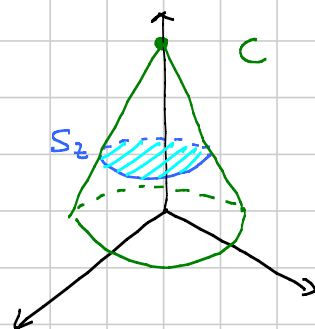
Esempio 1 $A =$ cilindro sezione prec.

$$\begin{aligned} \iiint_A z^2 dx dy dz &= \int_0^2 dz \iint_{S_z} z^2 dx dy \\ &= \int_0^2 z^2 dz \iint_{S_z} 1 dx dy \\ &= \int_0^2 z^2 \underbrace{\text{area}(S_z)}_{\pi} dz \\ &= \pi \int_0^2 z^2 dz = \pi \cdot \frac{8}{3} \end{aligned}$$



Esempio 2 $\iiint_C z \, dx \, dy \, dz$

C = cono che ha come base $x^2 + y^2 \leq 1$
e vertice in $(0, 0, 3)$

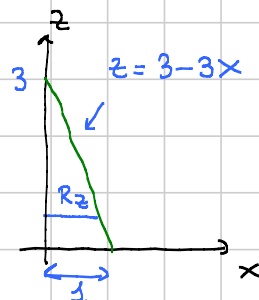


1° modo: per sezioni

$$\begin{aligned} \iiint_C z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^3 dz \iint_{S_z} z \, dx \, dy = \int_0^3 z \, dz \iint_{S_z} dx \, dy \\ &= \int_0^3 z \cdot \text{Area}(S_z) \, dz \end{aligned}$$

Osservo che S_z è un cerchio di
raggio $R_z = 1 - \frac{z}{3}$

$$= \int_0^3 z \cdot \pi \left(1 - \frac{z}{3}\right)^2 dz = \text{Analisi 1...}$$



$$z = 3 - 3R_z$$

$$R_z = \frac{3-z}{3} = 1 - \frac{z}{3}$$

2° modo: per colonne

Devo scrivere C come insieme normale

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + y^2 \leq 1}_{\text{base } \Omega}, 0 \leq z \leq \underbrace{3 - 3\sqrt{x^2 + y^2}}_{\text{eq. cono}}\}$$

$$\iiint_C z \, dx \, dy \, dz = \iint_{\Omega} dx \, dy \int_0^{3-3\sqrt{x^2+y^2}} z \, dz$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (3 - 3\sqrt{x^2 + y^2})^2 \, dx \, dy$$

$$= \frac{9}{2} \int_0^1 dp \int_0^{2\pi} d\theta (1-p)^2 p = 9\pi \int_0^1 p(1-p)^2 dp$$

= controllare che venga uguale a prima
e/o trovare l'errore.

Esempio 3 Calcolare il volume del segmento sferico

$$B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, \quad a \leq z \leq b\}$$

(si intende che $|a| \leq R$ e $|b| \leq R$)

$$\text{Vol}(B) = \iiint_B 1 \, dx \, dy \, dz$$

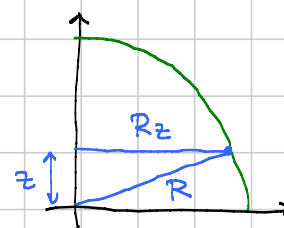
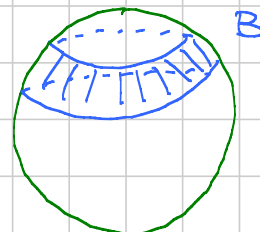
$$\begin{aligned} \text{sezioni} \rightarrow &= \int_a^b dz \iint_{S_z} dx \, dy \\ &= \int_a^b \text{area}(S_z) \, dz \end{aligned}$$

S_z è una circonferenza di raggio R_z tale che

$$R^2 = z^2 + R_z^2 \quad \leadsto \quad R_z^2 = R^2 - z^2$$

$$= \pi \int_a^b (R^2 - z^2) \, dz = \pi \left[R^2 z - \frac{1}{3} z^3 \right]_a^b$$

$$= \pi \left[R^2(b-a) - \frac{1}{3}(b^3 - a^3) \right]$$



Oss. Se prendiamo $b = R$ e $a = -R$ otteniamo

$$\text{Vol}(\text{sfera}) = \pi \left(\underset{-R}{2R^3} - \underset{-R}{\frac{2}{3}R^3} \right) = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad (\text{😊})$$

Principio di Cavalieri

Se due solidi A e B hanno sezioni di area = ad ogni altezza z, allora $\text{Vol}(A) = \text{Vol}(B)$

$$\begin{aligned} \text{Dim.} \quad \text{Vol}(A) &= \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} dz \, \text{Area}(S_{Az}) = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} dz \, \text{Area}(S_{Bz}) \\ &= \text{Vol}(B). \end{aligned}$$

Esempio 4 (Esercizio della tenda) Calcolare

$$\iiint_T y \, dx \, dy \, dz$$

dove T è il tetraedro con vertici in $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$

1° modo: per colonne

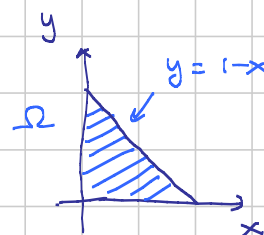
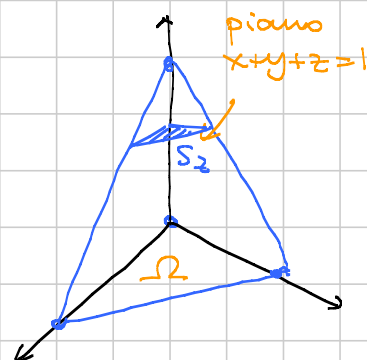
Devo scrivere T
come insieme normale

$$T = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \Omega, 0 \leq z \leq 1-x-y \}$$

dove Ω è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$.

Allora

$$\begin{aligned} \iiint_T y \, dx \, dy \, dz &= \iint_{\Omega} dx \, dy \int_0^{1-x-y} y \, dz \\ &= \iint_{\Omega} y \, dx \, dy \int_0^{1-x-y} dz \\ &= \iint_{\Omega} y(1-x-y) \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \, y(1-x-y) = \text{si fa.} \end{aligned}$$



2° modo: per sezioni

$$\iiint_T y \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 dz \underbrace{\iint_{S_z} y \, dx \, dy}_{\substack{\text{va fatto} \\ \uparrow \\ \text{triangolino}}}$$

3° modo: mi faccio furbo

simmetria

triangolo di lato $1-z$

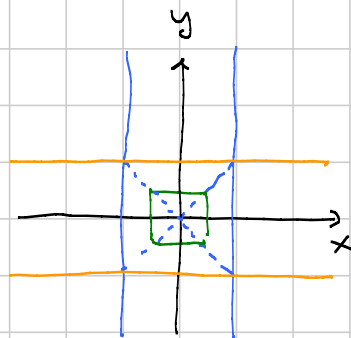
$$\iiint_T y \, dx \, dy \, dz \stackrel{\text{simmetria}}{=} \iiint_T z \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 z \cdot \text{Area}(S_z) \, dz = \frac{1}{2} \int_0^1 z(1-z)^2 \, dz$$

Esercizio 5 (esempio della FOGNA)

Volume dell'intersezione tra 2 cilindri di raggio 1 e assi $\perp$ e incidenti.

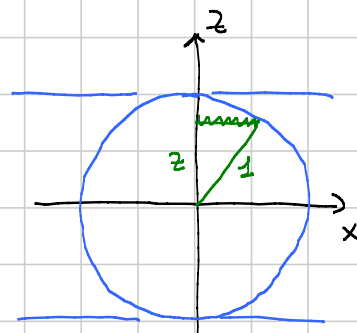
$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + z^2 \leq 1}_{\text{cilindro 1}}, \underbrace{y^2 + z^2 \leq 1}_{\text{cilindro 2}} \}$$

$$\begin{aligned} \text{Vol}(A) &= \int_{-1}^1 dz \iint_{S_z} 1 \, dx \, dy \\ &= \int_{-1}^1 \text{Area}(S_z) \, dz \end{aligned}$$



Chi è S_z ? Tagliando i cilindri ad altezza z ottengo delle strisce ortogonali della stessa ampiezza, quindi S_z è un quadrato!!! Di che lato? Il semilato è $\sqrt{1-z^2}$

$$= 4 \int_{-1}^1 (1-z^2) \, dz = \text{si fa.}$$



Varianti $\rightarrow$ fare lo stesso conto per colonne

$\rightarrow$ aggiungere il terzo cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$.

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 037

Note Title

09/11/2017

COORDINATE CILINDRICHECoordinate polari nel piano e z inalterata : (ρ, θ, z)

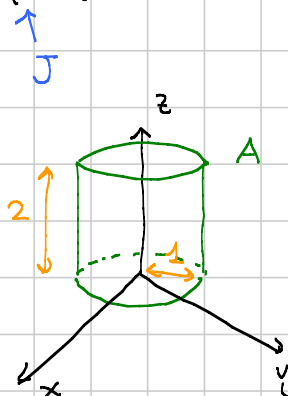
$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

$$z = z$$

Il J della trasformazioni è ρ

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_B f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho d\rho d\theta dz$$

 B
 $\uparrow$
 A in coord cilindriche

Esempio 1 $\iiint_A x^2 z dx dy dz$

$$B : \rho \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi], z \in [0, 2]$$

$$= \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dz \rho^2 \cos^2 \theta z \cdot \rho$$

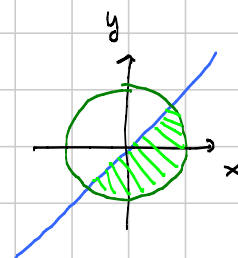
$$= \underbrace{\int_0^1 \rho^3 d\rho}_{\frac{1}{4}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta}_{\frac{\pi}{1}} \underbrace{\int_0^2 z dz}_{\frac{11}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

Esempio 2 $C = \{(x, y, z) \in A : y \leq x\}$

In coord. cilindriche diventa

$$\rho \in [0, 1], z \in [0, 2], \theta \in \left[-\frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{4}\right]$$

opp. $\theta \in \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right]$



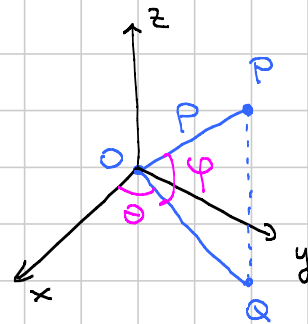
COORD. SFERICHE (Versione dei geografi)

$$\rho = \text{distanza } OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$Q =$ proiezione di P su piano xy

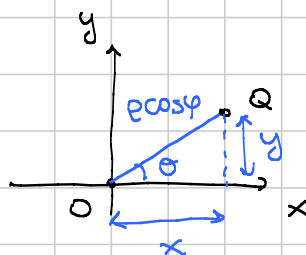
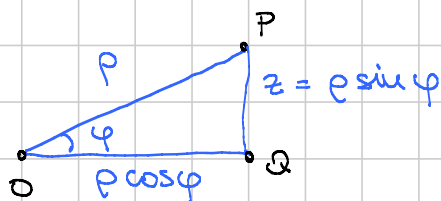
$\varphi =$ latitudine = angolo tra OP e OQ
 = angolo tra OP e piano xy

$\theta =$ "vecchio θ delle polari di Q " = angolo tra semiasse pos. x e OQ
 = longitudine



Formule di passaggio:

$$x = \rho \cos \varphi \cos \theta \quad y = \rho \cos \varphi \sin \theta \quad z = \rho \sin \varphi$$



Come calcolo J ? Devo fare il val. assoluto del Det della matrice

$$\begin{pmatrix} x_\varphi & x_\theta & x_\varphi \\ y_\varphi & y_\theta & y_\varphi \\ z_\varphi & z_\theta & z_\varphi \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \text{esercizio} \\ \downarrow \\ \rightsquigarrow \end{array}$$

$$J = \rho^2 \cos \varphi$$

Dove variano i parametri?

$$\rho \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Achtung! Per i fisici il φ non è la latitudine, ma l'angolo tra OP e semiasse positivo delle z . Conseguente: $\varphi \in [0, \pi]$ e $\sin$ e $\cos$ di φ si scambiano ovunque, J compreso

Achtung! In coord. sferiche

- il θ ed il φ dell'origine non sono ben definiti
- il θ dei p.ti dell'asse z non è ben definito.

Esempio 3 $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 3, z \leq 0, x \geq 0\}$

$\uparrow$ $\frac{1}{6}$ di sfera
 $\uparrow$ parte bassa
 $\uparrow$ parte dx vista dall'alto

In coord. sferiche S diventa

$$\rho \in [0, \sqrt{3}] \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$$

$\iiint_S xz \, dx \, dy \, dz$ ce lo aspettiamo negativo

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\sqrt{3}} d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\varphi \underbrace{\rho \cos\varphi \cos\theta}_x \underbrace{\rho \sin\varphi}_z \underbrace{\rho^2 \cos\varphi}_J \\
 &= \underbrace{\int_0^{\sqrt{3}} \rho^4 d\rho}_{\frac{1}{5} 9\sqrt{3}} \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta}_2 \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2\varphi \sin\varphi d\varphi}_{\left[-\frac{1}{3} \cos^3\varphi\right]_{-\frac{\pi}{2}}^0} = -\frac{6\sqrt{3}}{5} = -\frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

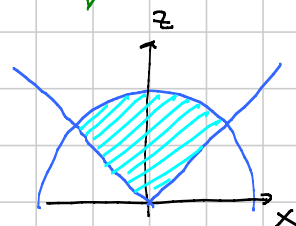
Esempio 4 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$

$$\text{Vol}(A) = \iiint_A 1 \, dx \, dy \, dz$$

$$A: \rho \in [0, 2], \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \, \rho^2 \cos\varphi$$

= si fa...



Cambi di variabile in generale : funzionano come in 2 variabili

$$\iiint_A f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_B g(u,v,w) J(u,v,w) du dv dw$$

A nelle nuove coord. $\nearrow$ $\nwarrow$ J è la matrice delle nuove coord.

J si calcola con la solita procedura :

1 - ricavo x, y, z in funz. di u, v, w

2 - calcolo la matrice
$$\begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix}$$

3 - $J = |\text{Det}|$.

Esempio 5 A = sfera con centro in $(1, 3, -2)$ e raggio 1

$$\iiint_A x^2 dx dy dz$$

Equazione sfera: $(\underbrace{x-1}_u)^2 + (\underbrace{y-3}_v)^2 + (\underbrace{z+2}_w)^2 \leq 1$

$$x = u+1, \quad y = v+3, \quad z = w-2 \quad \leadsto \quad J = 1$$

$$= \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 1} (u^2+2u+1) du dv dw$$

$\underbrace{\quad}_{0}$ $\nearrow$ Volume = $\frac{4}{3}\pi$
 (simmetria)

Resta da integrare u^2

$$\iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 1} u^2 = \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\sigma \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \quad \rho^2 \sin^2 \varphi \cdot \rho^2 \cos \varphi$$

$$= \int_0^1 \rho^4 d\rho \int_0^{2\pi} d\sigma \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{5} \cdot 2\pi \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15} \pi$$

Oss. Data una sfera S , vale che

$$\iiint_S x^2 dx dy dz = \iiint_S y^2 \dots = \iiint_S z^2 \dots$$

$\uparrow$ centro in $(0,0,0)$

per simmetria.

Ottima alternativa Li sommo e viene $\iiint_S \rho^2$

$$= \underbrace{\int_0^1 \rho^2 \rho^2 d\rho}_{\frac{1}{5}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos\varphi}_2 = \frac{4}{5} \pi \quad \text{poi divido per 3.}$$

Esempio 6 $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 1\}$

$$\iiint_A x^2 dx dy dz \quad (\underbrace{(\sqrt{2}x)^2}_u + (\underbrace{2y^2}_v) + (\underbrace{z^2}_w) \leq 4$$

Nelle nuove coord. A insieme diventa

$$u^2 + v^2 + w^2 \leq 4 \quad \leadsto \text{sfera}$$

$$w \geq 1$$

Calcolo J : $x = \frac{1}{\sqrt{2}}u \quad y = \frac{1}{2}v \quad z = w \quad J = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

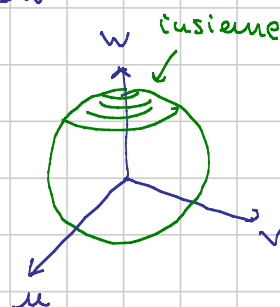
$$\iiint_A x^2 dx dy dz = \iiint_{\substack{u^2+v^2+w^2 \leq 4 \\ w \geq 1}} \frac{1}{2} u^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} du dv dw$$

$\uparrow$ corretto dopo video

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \iiint_{\dots} u^2 du dv dw$$

1° modo: per sezioni

$$\begin{aligned} \iiint_{\dots} u^2 du dv dw &= \int_1^2 dw \iint_{S_z} u^2 du dv = (\text{polari su } S_z) \\ &= \int_1^2 dw \int_0^{\sqrt{4-w^2}} \underbrace{\rho}_{\text{raggio di } S_z} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \rho^2 \cos^2\theta \cdot \rho \end{aligned}$$



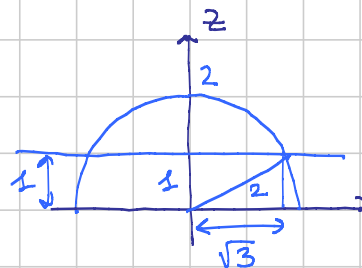
In realtà ho usato le coord. cilindriche

2° modo: per colonne

$$\iiint_{\Omega} u^2 \, du \, dv \, dw = \iint_{\Omega} du \, dv \int_1^{\sqrt{4-u^2-v^2}} u^2 \, dw$$

La base Ω è $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x^2+y^2 \leq 3\}$

Esercizio: controllare che venga lo stesso.



— o — o —

ANALISI 2

—

LEZIONE 038

Note Title

09/11/2017

BARICENTRO

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ misurabile. Il baricentro di A è il punto G di coordinate

$$x_G := \frac{1}{\text{Area}(A)} \iint_A x \, dx \, dy$$

"media di x in A "

$$y_G := \frac{1}{\text{Area}(A)} \iint_A y \, dx \, dy$$

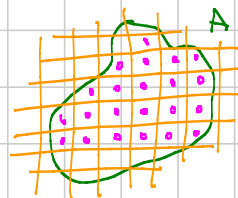
"media di y in A "

Oss. Questo coincide con il baricentro nel senso fisico del termine, supponendo che A sia a densità costante, altrimenti

$$x_G := \frac{\iint_A x \overset{\text{densità}}{\rho(x,y)} \, dx \, dy}{\underbrace{\iint_A \rho(x,y) \, dx \, dy}_{\text{massa totale}}}$$

$$y_G := \dots$$

Se immaginiamo di appross. A con un numero finito di p.ti, la def. è coerente con il baricentro di un numero finito di p.ti + procedura delle somme di Riemann



La def. è analoga per $V \subseteq \mathbb{R}^3$ semplicemente ci sono 3 coord.

$$x_G := \frac{\iiint_V x \, dx \, dy \, dz}{\text{Vol}(V)}$$

$$y_G := \dots$$

$$z_G := \dots$$

MOMENTO DI INERZIA (Di una figura piana rispetto ad una retta r)

$$\text{Momento} = \iint_A \text{dist}^2((x,y), r) \, dx \, dy$$

Stesso discorso in $\mathbb{R}^3$.

— o — o —

Esempio 1 Baricentro di un semicirchio

$x_G = 0$ per simmetria

$$\iint_A y \, dx \, dy = \int_0^r dp \int_0^\pi d\theta \, p \sin \theta \cdot p = \underbrace{\int_0^r p^2 dp}_{\frac{1}{3} r^3} \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta d\theta}_2$$

$$= \frac{2}{3} r^3$$

$$\leadsto y_G := \frac{\frac{2}{3} r^3}{\frac{\pi}{2} r^2} = \boxed{\frac{4}{3\pi} r}$$

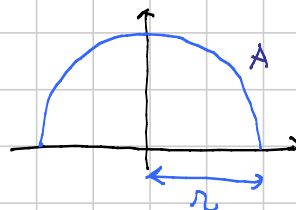
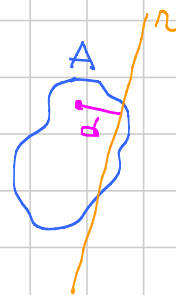
Esempio 2 Baricentro di una semisfera

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, \, z \geq 0\}$$

$x_G = y_G = 0$ per simmetria

$$\iiint_A z \, dx \, dy \, dz = \int_0^r dp \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \, p \sin \varphi \, p^2 \cos \varphi$$

$$= \underbrace{\int_0^r p^3 dp}_{\frac{1}{4} r^4} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi}_{\left[\frac{1}{2} \sin^2 \varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4} r^4$$



Divido per il volume

$$z_G = \frac{\pi}{4} r^4 \cdot \frac{3 \cdot 2}{4\pi} \frac{1}{r^3} = \boxed{\frac{3}{8} r}$$

$$\frac{3}{8} r \stackrel{?}{<} \frac{4}{3\pi} r \quad 9\pi \stackrel{?}{<} 32 \quad \text{ok}$$

Esercizio Fatto in dim. n , a cosa tende la coordinata rilevante.

Esempio 3 Momento di inerzia della sfera rispetto ad una retta che passa per il centro

Prendo sfera canonica e come retta asse z

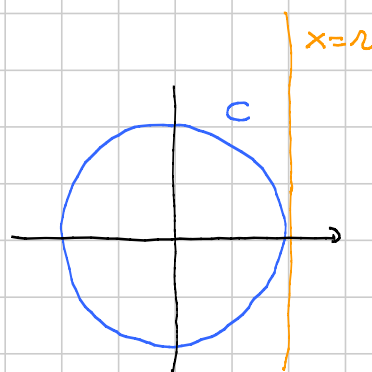
$$\iiint_S \underbrace{(x^2 + y^2)}_{\substack{\text{dist}^2 \\ \text{dall'asse } z}} dx dy dz = 2 \iiint_S z^2 dx dy dz = \frac{8}{15} \pi r^5$$

Esempio 4 Momento di inerzia di una circ. rispetto ad una retta tangente.

$$\iint_C \text{dist}^2((x, y), r) dx dy$$

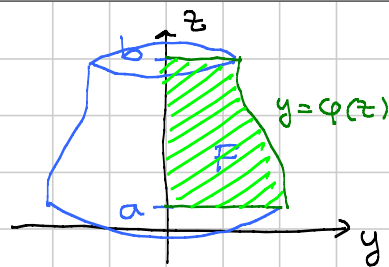
$$= \iint_C (x - r)^2 dx dy$$

$$= \iint_C \underbrace{(x^2 - 2rx + r^2)}_{\substack{\int_0^r \\ \int_0^{2\pi}}} dx dy = \pi r^4 + \int_0^r dp \int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{p^2 \cos^2 \theta \cdot p}_{\substack{= \pi r^4 + \frac{1}{4} r^4 \pi}} \\ \text{--- o --- o ---}$$



SOLIDI DI ROTAZIONE

Data una figura $F \subseteq \mathbb{R}^2$, che penso come piano yz , considero il solido S ottenuto ruotando F intorno all'asse z .



Caso speciale: quello in cui

$$F := \{ (y, z) \in \mathbb{R}^2 : a \leq z \leq b, 0 \leq y \leq \varphi(z) \}$$

Descrizione del solido

- In coord. cilindriche diventa

$$\theta \in [0, 2\pi] \quad (r, z) \in F$$

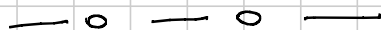
Nel caso speciale diventa

$$r \in [0, \varphi(z)] \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad z \in [a, b]$$

- Equazione cartesiana nel caso speciale

$$z \in [a, b] \quad x^2 + y^2 \leq \varphi(z)^2$$

la sezione ad
altezza z è un cerchio
di raggio $\varphi(z)$.



VOLUME DI UN SOLIDO DI ROTAZIONE

- caso speciale
- caso generale
- teorema GULDINO 1

Caso speciale

$$\begin{aligned} \text{Vol}(S) &= \iiint_S 1 \, dx \, dy \, dz \stackrel{\text{sezioni}}{=} \int_a^b dz \, \text{Area}(S_z) \\ &= \pi \int_a^b \varphi^2(z) \, dz \end{aligned}$$

$$\text{Vol}(S) = \pi \int_a^b \varphi^2(z) \, dz$$

Caso generale

Uso coordinate cilindriche

$$\begin{aligned} \text{Vol}(S) &= \iiint_S 1 \, dx \, dy \, dz = \iiint_{S'} \rho \, d\rho \, d\theta \, dz \\ &\stackrel{S \text{ in coord. cilindriche}}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_F \rho \, d\rho \, dz = 2\pi \int_F \rho \, d\rho \, dz \end{aligned}$$

Ricambiando il nome alle variabili otteniamo

$$\text{Vol}(S) = 2\pi \int_F y \, dy \, dz$$

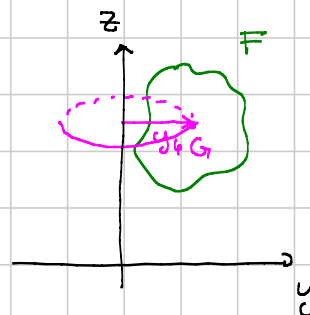
controllare che sia
coerente con il caso
prec.

Teorema di Guldino 1

$$\text{Vol}(S) = \text{Area}(F) \cdot 2\pi y_G$$

↑
area della
figura che
ruota

↑
lungh.
cinc. descritta
da G durante
la rotazione



Dim. Usando la formula generale

$$\text{Vol}(S) = 2\pi \iint_F y \, dy \, dz = \text{Area}(F) \cdot 2\pi$$

$$\frac{\iint_F y \, dy \, dz}{\text{Area}(F)}$$

y_G

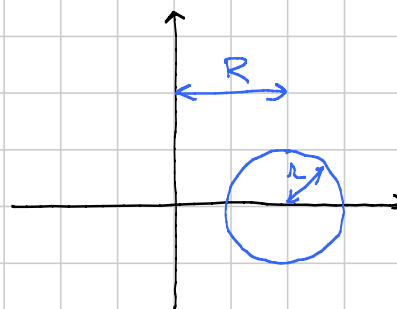
Guldino è comodo quando il p.to G è noto per ragioni sue

Esempio (TORO)



$$\text{Vol}(\text{Toro}) = \text{Area}(F) \cdot 2\pi y_G$$

$$= \pi r^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 R r^2$$



Esercizio provare con semicerchio e sfera.
(cilindro e cono).

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 039

Note Title

14/11/2017

CAMBIO DI VARIABILI NEGLI INTEGRALI MULTIPLI

Def. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $B \subseteq \mathbb{R}^n$ due aperti.

Diciamo che $\varphi: A \rightarrow B$ è un diffeomorfismo se è di classe C^1 e ammette funzione inversa $\psi: B \rightarrow A$ pure lei di classe C^1 .

Oss. Per il differenziale della funzione composta $\psi(\varphi(x)) = x$ quindi

$$J_\psi(\varphi(x)) \cdot J_\varphi(x) = Id \quad \forall x \in A.$$

In particolare
 $J_\varphi(x)$ è inv.
 ovunque

Teorema (cambio di variabili, sotto ipotesi come)

Siano A e B due aperti in $\mathbb{R}^n$, e sia $\varphi: A \rightarrow B$ un diffeom. Supponiamo che $J_\varphi(x)$ e $J_\psi(x)$ siano unif. cont. in A e B , rispettivamente.

Sia $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e a supporto compatto, cioè

$$\exists K \subseteq B \text{ compatto t.c. } f(y) = 0 \quad \forall y \in B \setminus K$$

Allora vale

$$\int_B^* f(y) dy = \int_A^* f(\varphi(x)) \cdot |\det J_\varphi(x)| dx$$

e stessa cosa per gli integrali inferiori.

Oss. Se f è pure integrabile, allora anche il RHS è integrabile e vale il segno di = tra integrali veri.

Oss. brutale La formula corrisponde al procedimento brutale "pongo $y = \varphi(x)$, e insieme di integrazione diventa A , e $|\text{Det } J_\varphi(x)|$ è proprio il pagamento calcolato col procedimento descritto a suo tempo".

Oss. Nel caso degli integrali con $n=1$, la formula è coerente con quella di analisi 1:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) dy = \int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx$$

Non c'è il valore assoluto, ma... $\varphi: [a,b] \rightarrow [\varphi(a), \varphi(b)]$
 Ora se φ è crescente, allora il val. assol. è come se ci fosse, se φ è decrescente, allora $\varphi(a)$ e $\varphi(b)$ sono in ordine inverso, quindi compare un segno - al LHS che è come mettere il val. assol. al RHS.

Piccola variante: ad analisi 1 valeva la formula anche se $\varphi'(x)$ poteva annullarsi, quindi se φ non era un diffeomorf. C'è una formula analoga anche per integrali multipli, che non inoltreremo (ora...) (formula alla LAX)

Prop. 1 Se la formula vale per $\varphi_1: A \rightarrow B$ e per $\varphi_2: B \rightarrow C$, allora vale per la composizione $\varphi_3 = \varphi_2 \circ \varphi_1: A \rightarrow C$.

$$\boxed{\text{Dim.}} \quad \int_C^* f(z) dz = \int_B^* f(\varphi_2(y)) |\text{Det } J_{\varphi_2}(y)| dy$$

↑
vale per φ_2

$$= \int_A^* f(\varphi_2(\varphi_1(x))) |\text{Det } J_{\varphi_2}(\varphi_1(x))| \cdot |\text{Det } J_{\varphi_1}(x)| dx$$

↑
vale per φ_1

$J_{\varphi_3}(x)$ per diff. funzione composta

$$= \int_A^* f(\varphi_3(x)) |\text{Det } [J_{\varphi_2}(\varphi_1(x)) \cdot J_{\varphi_1}(x)]| dx.$$

Prop. 2 Supponiamo che la formula valga con integrali veri quando f è la caratteristica di un rettangolo, sia per $\varphi: A \rightarrow B$, sia per l'inversa $\psi: B \rightarrow A$. Allora la formula vale in generale.

Dim. Stiamo supponendo che

$$\int_B f_R(y) dy = \int_A f_R(\varphi(x)) \cdot |\text{Det } J_\varphi(x)| dx \quad \forall R \subseteq B \text{ rett.}$$

$$\int_A g_R(x) dx = \int_B g_R(\psi(y)) |\text{Det } J_\psi(y)| dy \quad \forall R \subseteq A \text{ rett.}$$

(f_R e g_R sono funzioni caratteristiche, 1 dentro, 0 fuori)
(sono tutti integrali VERI)

Step 1 La formula vale con integrali veri per tutte le SF. Infatti LHS e RHS sono appl. lineari in f , e coincidono in una base, quindi coincidono ovunque 😊.

Step 2 La formula vale con disuguaglianza per tutte le f ammissibili, cioè

$$\int_B^* f(y) dy \geq \int_A^* f(\varphi(x)) |\text{Det } J_\varphi(x)| dx$$

Infatti, prendiamo una qualunque SF $g \geq f$ in B . Per il passo precedente vale

$$\begin{aligned} \int_B^* g(y) dy &= \int_A^* g(\varphi(x)) \cdot |\text{Det } J_\varphi(x)| dx \\ &\geq \int_A^* f(\varphi(x)) \cdot |\text{Det } J_\varphi(x)| dx \end{aligned}$$

ho usato che $g(\varphi(x)) \geq f(\varphi(x))$ e $|\text{Det}| \geq 0$

Facendo l'inf. sulle SF $g \geq f$ abbiamo la tesi.

Step 3 Dalla disuguaglianza segue l'uguaglianza 😊.
Infatti una formula con disug. analoga vale anche per
l'inversa φ , e quindi

$$\begin{aligned} \int_B^* f(y) dy &\geq \int_A^* f(\varphi(x)) |\text{Det } J_\varphi(x)| \\ &\geq \int_B^* f(\varphi(\varphi(y))) \underbrace{|\text{Det } J_\varphi(\varphi(y))| \cdot |\text{Det } J_\varphi(y)|}_1 dy \\ &= \int_B^* f(y) dy. \end{aligned}$$

Subteorema La formula vale quando $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è
una trasformazione affine (invertibile).

Dim Facciamo un po' di casi particolari (per la prop. 2
basta che ci limito alle caratt. dei rettangoli per φ
e l'inversa φ).

Caso 1 φ è una traslazione

Banalità: il rettangolo si trasla e conserva il "ipervolume"
e l'inversa è dello stesso tipo.

Caso 2 φ scambia tra di loro 2 coordinate, e il resto resta
invariato

$$\varphi(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = (\dots, x_j, \dots, x_i, \dots)$$

Banalità: non cambia nulla e l'inversa è se stessa.

Caso 3 φ dilata la prima coordinata e lascia il resto
uguale:

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Vale la formula in quanto il volume cambia di un fattore
 $|\lambda|$ e questo è proprio $|\text{Det } J_\varphi(x)|$

Caso 4 φ somma le prime 2 coordinate :

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\underbrace{x_1+x_2}_{y_1}, \underbrace{x_2}_{y_2}, \dots, \underbrace{x_n}_{y_n})$$

Che succede ad un rettangolo in arrivo, cioè in B ?

$$\text{Sia } R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

che vuol dire

$$a_1 \leq y_1 \leq b_1, \quad a_2 \leq y_2 \leq b_2, \quad \dots, \quad a_n \leq y_n \leq b_n$$

Nello spazio di partenza diventa

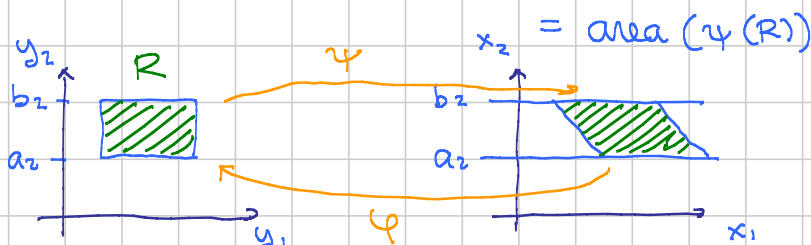
$$a_1 \leq x_1 + x_2 \leq b_1, \quad a_2 \leq x_2 \leq b_2, \quad \dots, \quad a_n \leq x_n \leq b_n.$$

Ma allora nelle variabili da 3 in poi non cambia nulla.

Nelle prime 2 otteniamo che

$$\int_B f_R(y) dy = \text{area}(R) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$$

$$\int_A f_R(\varphi(x)) \cdot \underbrace{|\text{Det } J_\varphi(x)|}_{=1} dx = \int_A f_R(\varphi(x)) dx$$



Basta osservare che $\text{area parallelogrammo} = \text{area rettangolo}$.

Caso 5 φ affinità generica.

Grazie ad un lemma di algebra lineare, ogni affinità è composizione delle 4 tipologie precedenti, quindi la prop. 1 implica il teo.

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 040

Note Title

14/11/2017

Cambio di variabili nel caso generale (seconda parte)

Lemma 1 (Per ora misterioso) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^m$ un aperto e sia $R: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione C^1 . Sia C un insieme misurabile con $\text{Clos}(C) \subseteq A$.

Allora $R(C)$ è misurabile.

(Le funzioni C^1 mandano insiemi misurabili in insiemi misurabili)

Lemma 2 (ε -disug. sui cubi piccoli) (Per ora misterioso)

Siano A e B due aperti di $\mathbb{R}^m$. Sia $\varphi: A \rightarrow B$ un diffeom. con inversa $\psi: B \rightarrow A$. Supponiamo che J_φ e J_ψ siano unif. cont. in A e B , risp.

Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ t.c. per ogni iper-cubo C chiuso contenuto in B e lato $\leq \delta$ vale

$$\int_B f_C(y) dy \geq \frac{1}{(1+\varepsilon)^{m+1}} \int_A f_C(\varphi(x)) \cdot |\text{Det } J_\varphi(x)| dx$$

funs. caratt. di C

Oss. sono integrali veri

Usando i due lemmi misteriosi dimostriamo il teo. generale

Step 1 La ε -disug. vale per le funzioni caratteristiche dei rettangoli (anche grandi) con estremi razionali e con integrali veri.

Dim. Ogni rett. ad estremi razionali è unione finita di cubi che si intersecano solo sul bordo.

Step 2 La ε -disug. vale per le caratt. dei rettangoli qualunque sempre con integrali veri.

Dim. Dato R qualunque considero $\hat{R} \supseteq R$ con $\hat{R}$ ad estremi razionali. Allora per lo step 1

$$\begin{aligned} \int_B f_{\hat{R}}(y) dy &\geq \frac{1}{(1+\varepsilon)^{m+1}} \int_A f_{\hat{R}}(\varphi(x)) |\text{Det } J_{\varphi}(x)| dx \\ &\geq \frac{1}{(1+\varepsilon)^{m+1}} \int_A f_R(\varphi(x)) \cdot |\text{Det } J_{\varphi}(x)| dx \end{aligned}$$

Osservo che LHS = Vol($\hat{R}$) e facendo l'inf. su tutti di $\hat{R} \supseteq R$ a estremi raz. ottengo Vol(R) che è proprio

$$\int_B f_R(y) dy.$$

Step 3 La ε -disug. vale con integrali veri per tutte le SF che sono comb. lin. con coeff. POSITIVI.

Dim. La somma e la molt. per coeff. positivi conservano la disug.

Step 4 La ε -disug. vale con integrali superiori per tutte le funzioni $f \geq 0$ (e limitate) in B .

Dim. Prendo una qualunque SF $g \geq f$ in B . Allora la g è a coeff. positivi e quindi per lo step 3 vale

$$\begin{aligned} \int_B g(y) dy &\geq \frac{1}{(1+\varepsilon)^{m+1}} \int_A g(\varphi(x)) \cdot |\text{Det } J_{\varphi}(x)| dx \\ &\geq \frac{1}{(1+\varepsilon)^{m+1}} \int_A^x f(\varphi(x)) \cdot |\text{Det } J_{\varphi}(x)| dx \end{aligned}$$

↑ int. vero
↑ int. vero
↑ int. superiore

Facendo l'inf. su tutte le $g \geq f$ ottengo

$$\int_B^* f(y) dy \geq \frac{1}{(1+\varepsilon)^{n+1}} \int_A^* f(\varphi(x)) \cdot |\text{Det } J_\varphi(x)| dx$$

$$\forall f \geq 0 \text{ in } B$$

Step 5 La disug. dello step 4 vale per ogni $\varepsilon > 0$, quindi vale pure per $\varepsilon = 0$.

Dim. Si tratta solo di passare al limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$ al RHS ottenendo

$$\int_B^* f(y) dy \geq \int_A^* f(\varphi(x)) |\text{Det } J_\varphi(x)| dx \quad \forall f \geq 0 \text{ in } B$$

Step 6 Vale il segno di $=$ nello step 5.

Dim. Si tratta di osservare che vale la stessa disuguaglianza per la $\psi: B \rightarrow A$ e quindi

$$\begin{aligned} \int_B^* f(y) dy &\geq \int_A^* f(\varphi(x)) \cdot |\text{Det } J_\varphi(x)| dx \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{vale per } \psi \\ &\geq \int_B^* \underbrace{f(\varphi(\psi(y)))}_{\text{"y."}} \cdot \underbrace{|\text{Det } J_\varphi(\psi(y))| \cdot |\text{Det } J_\psi(y)|}_{\text{"1"}} dy \end{aligned}$$

Oss. Allo stesso identico modo si ottiene l'uguaglianza per gli integrali inferiori. Finora c'è la restrizione che $f \geq 0$.

Aggiunto dopo video: l'oss. è una grossa stupidaggine. Lo step 4 salta per gli integrali inferiori, ai quali si può arrivare solo allo step 8 quando le disug. sono diventate uguaglianze. In particolare lo step 7 va abolito dagli int. sup. usando l'integrabilità di LHS e RHS.

Step 7 Vale l'uguaglianza con integrali veri per le caratteristiche dei rettangoli

Dim. Basta osservare che sono ≥ 0 , quindi

$$\int_B^* f_R(y) dy = \int_A^* f_R(\varphi(x)) \cdot |\text{Det } J_\varphi(x)| dx$$

$$\int_B f_R(y) dy = \int_A f_R(\varphi(x)) |\text{Det } J_\varphi(x)| dx$$

$$\int_{\varphi(R)} |\text{Det } J_\varphi(x)| dx$$

$$(basta osservare che f_R(\varphi(x)) = \begin{cases} 1 & \text{se } \varphi(x) \in R \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\text{e che } \varphi(x) \in R \Leftrightarrow x \in \varphi(R))$$

Ora $\int_{\varphi(R)} |\text{Det } J_\varphi(x)| dx$ è un integrale vero perché è

l'integrale continua su un insieme misurabile, in quanto $\varphi(R)$ è misurabile per il lemma misterioso 1.

Step 8 Vale il segno di = tra integrali superiori per ogni f limitata in B , indip. dal segno.

Dim. Basta applicare la prop 2 della les. pre.

— 0 — 0 —

Questo completa la dim. dando per buoni i lemmi 1 e 2.

— 0 — 0 —

Back to lezione precedente

Abbiamo dimostrato che se $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è affine invertibile, allora

$$\int_B^* f(y) dy = \int_A^* f(\varphi(x)) \cdot |\text{Det } J_\varphi(x)| dx$$

↑
non dipende da x

Caso speciale 1 Se f è la caratteristica di un insieme misurabile C con $\text{Clos}(C) \subseteq B$, allora

$$\begin{aligned} \int_B^* f_C(y) dy &= \text{meas}(C) \\ \int_A^* f_C(\varphi(x)) \cdot |\text{Det } J_\varphi(x)| dx &= \int_{\varphi(C)}^* \overbrace{|\text{Det } J_\varphi(x)|}^{\text{costante}} dx \\ &= \text{meas}(\varphi(C)) \cdot |\text{Det matrice}| \end{aligned}$$

quindi

$$\text{meas}(C) = \text{meas}(\varphi(C)) \cdot |\text{Det matrice}|$$

Caso speciale 2 Se $\varphi(C)$ è il cubo unitario, quindi $C = \varphi(\text{cubo unitario})$, otteniamo

$$\begin{aligned} \text{meas}(\varphi(\text{cubo})) &= \text{meas}(\text{cubo}) \cdot |\text{Det matrice}| \\ &= \overset{1}{|\text{Det matrice}|} \end{aligned}$$

Questo dim. la caratt. del Det come volume dell'immagine del cubo unitario.

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 041

Note Title

15/11/2017

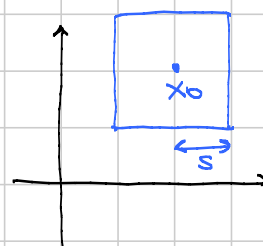
Def. (Norma cubica) (sarebbe norma ∞)Dato $x \in \mathbb{R}^n$ definiamo

$$\|x\| := \max \{ |x_i| : i = 1, \dots, n \}$$

Def. Fissato $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e fissato $s > 0$, possiamo definire

$$C(x_0, s) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq s\}$$

$\uparrow$ cubo $\uparrow$ semilato

Def. Data M matrice $m \times n$, poniamo

$$\|M\| := \max \left\{ \sum_{j=1}^n |M_{ij}| : i = 1, \dots, m \right\}$$

Brutalmente: riga per riga sommo il valore assoluto degli elementi, poi prendo il max al variare delle righe.

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline * & * & * \\ \hline \end{array} \rightarrow R_1 \\
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline * & * & * \\ \hline \end{array} \rightarrow R_2 \\
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline * & * & * \\ \hline \end{array} \rightarrow R_3
 \end{array}$$

Prop. (Non serve, ma descrive l'idea)Data M matrice $m \times n$, dato $x \in \mathbb{R}^n$, vale

$$\|Mx\| \leq \|M\| \cdot \|x\|$$

$\uparrow$ norma cubica su $\mathbb{R}^m$ $\uparrow$ norma cubica su $\mathbb{R}^n$

Dim. Sia $j \in \{1, \dots, m\}$ t.c. $\|Mx\| = |(Mx)_j|$

Allora

$$\begin{aligned}
 |(Mx)_j| &= \left| \sum_{i=1}^n M_{ji} x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |M_{ji}| \cdot |x_i| \\
 &\leq \|x\| \cdot \sum_{i=1}^n |M_{ji}| \leq \|x\| \cdot \|M\| \quad \square
 \end{aligned}$$

$\uparrow$ somma riga j .

Prop. (Lagrange direzionale vettoriale cubico)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto convesso, sia $R: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione di classe C^1 , siano x e y p.ti di A .

Allora esiste c nel segmento di estremi x e y t.c.

$$\|R(y) - R(x)\| \leq \|y - x\| \cdot \|J_R(c)\|.$$

Dim. Sia $j \in \{1, \dots, m\}$ t.c. $\|R(y) - R(x)\| = |(R(y) - R(x))_j|$

Allora

comp. j -esima di R

$$|(R(y) - R(x))_j| = |R_j(y) - R_j(x)|$$

$$= |\langle \nabla R_j(c), y - x \rangle|$$

riga j -esima della
matrice jacobiana
 $M = J_R(c)$

$$= \left| \sum_{i=1}^n M_{j,i} \cdot (y-x)_i \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^n |M_{j,i}| \cdot |(y-x)_i|$$

$$\leq \|y - x\| \cdot \sum_{i=1}^n |M_{j,i}|$$

$$\leq \|y - x\| \cdot \|J_R(c)\|.$$

LEMMA DEL CUBETTO ESTERNO

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, sia $R: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ di classe C^1 , sia $C(x_0, s)$ un cubo contenuto in A .

Allora

$$R(C(x_0, s)) \subseteq C(R(x_0), Ls)$$

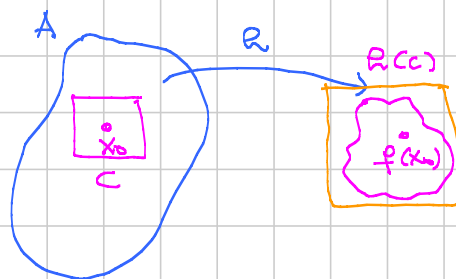
$$\text{dove } L := \max \{ \|J_R(x)\| : x \in C(x_0, s) \}$$

Per def. di immagine si ha

$$y = Q(x)$$

con $x \in C(x_0, \delta)$.

Per la prop. prec.



$$\|y - p(x)\| = \|p(x) - p(x_0)\|$$

$$\leq \underbrace{\|x - x_0\|}_{\leq \delta} \cdot \underbrace{\|J_{\mathbf{a}}(c)\|}_{\leq L}$$

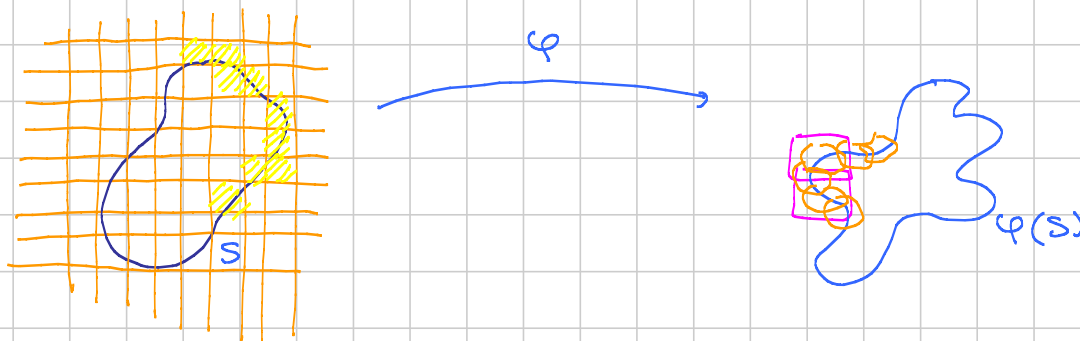
LEMMA 1 (I diffeomorfismi mandano cuscevi misurabili
in cuscevi misurabili)

Siano A e B aperti in $\mathbb{R}^n$. Sia $\varphi: A \rightarrow B$ di classe C^1 con inversa $\psi: B \rightarrow A$ di classe C^1 . Supponiamo che J_φ e J_ψ siano limitati.

Sia $S \subseteq A$ un insieme misurabile con $\text{Clos}(S) \subseteq A$.

Allora $\varphi(S)$ è misurabile.

Dim. Usiamo il criterio di misurabilità seguente: S è misurabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ la frontiera ∂S è contenuta in una unione di cubetti di misura totale $\leq \varepsilon$.



Per un fatto topologico (che avrebbe dimostrato) si ha che

$$\partial \varphi(s) = \varphi(\partial s)$$

↑
sempre φ invertibile con inversa continua.

Fisso $\varepsilon > 0$ e ricopro ∂S con cubetti $C_1, \dots, C_k$ di misura totale $\leq \varepsilon$. Applico φ e osservo che $\partial \varphi(S)$ sarà ricoperto da

$$\varphi(C_1), \dots, \varphi(C_k)$$

Detto s il lato comune dei cubetti C_i , avremo che i $\varphi(C_i)$ sono contenuti in cubetti di semilato Ls , con un L opportuno. La somma delle misure di questi nuovi cubetti è $\leq CL^m$.

— o — o —

LEMMA 2 (ε -disug. sui cubi piccoli)

Siano A, B, φ e ψ come nel lemma precedente + J_φ e J_ψ unif. cont.
Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni cubo $C(y_0, s)$ con semilato $s \leq \delta$ vale la disuguaglianza
 $\uparrow$ contenuto in B

$$\int_B f_C(y) dy \geq \frac{1}{(1+\varepsilon)^{m+1}} \int_A f_C(\varphi(x)) \cdot |\text{Det } J_\varphi(x)| dx$$

Dim. Scegliamo la piccolezza di ε .

Sia L il sup di $\|J_\varphi(x)\|$ al variare di x in A

Sia $\hat{L}$ il sup di $\|J_\psi(y)\|$ " " " y in B .

Esiste δ t.c.

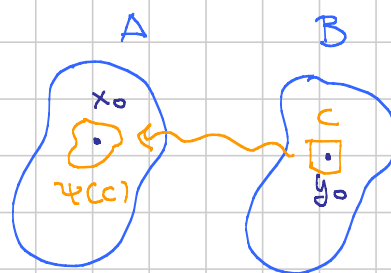
$$\textcircled{1} \quad |\text{Det } J_\varphi(x_1)| \leq (1+\varepsilon) |\text{Det } J_\varphi(x_2)| \quad \text{se } \|x_1 - x_2\| \leq \hat{L} \delta$$

$$\textcircled{2} \quad \|J_\varphi(\psi(y_1)) \cdot J_\psi(y_2)\| \leq (1+\varepsilon) \quad \text{se } \|y_1 - y_2\| \leq \delta$$

se $y_1 = y_2$, questa è l'identità, quindi ha norma 1

Supponiamo $C(y_0, s)$ con $s \leq \delta$.

Allora



$$\int_A f_C(\varphi(x)) \cdot |\text{Det } J_\varphi(x)| dx$$

$$= \int_{\varphi(C)} |\text{Det } J_\varphi(x)| dx$$

$$\leq (1+\varepsilon) \int_{\varphi(C)} |\text{Det } J_\varphi(x_0)| dx$$

$$= (1+\varepsilon) |\text{Det } J_\varphi(x_0)| \cdot \text{meas}(\varphi(C))$$

$$= (1+\varepsilon) \text{meas}(J_\varphi(x_0)(\varphi(C)))$$

$$= (1+\varepsilon) \text{meas}(R(C(y_0, s))) = (\star)$$

↑
dove $R = J_\varphi(x_0) \circ \varphi + \tau$ in modo che $R(y_0) = y_0$

(x e x_0 distano in
norma cubica meno
di $\widehat{L}s \leq \widehat{L}\delta$, quindi
uso ①)

(prendo $\varphi(C)$
e applico la
matrice
costante

$J_\varphi(x_0)$ e
uso teo. affine)

Ossemo che $R(C(y_0, s)) \subseteq C(R(y_0), Ms)$ dove

$$M := \max \{ \|J_R(y)\| : y \in C(y_0, s) \}$$

$$\text{ma } J_R(y) = J_\varphi(x_0) \cdot J_\varphi(y) = \underbrace{J_\varphi(\varphi(y_0)) \cdot J_\varphi(y)}_{\substack{\text{per la (2) ha} \\ \text{norma cubica} \leq (1+\varepsilon)}}$$

$$(\star) \leq (1+\varepsilon) \text{meas}(C(\overset{R(y_0)}{y_0}, (1+\varepsilon)s))$$

vale anche se
 $R(y_0) \neq y_0$

$$= (1+\varepsilon) \cdot (1+\varepsilon)^n \text{meas}(C(y_0, s))$$

$$= (1+\varepsilon)^{n+1} \int_B f_C(y) dy.$$

— o — o —

ANALISI 2

—

LEZIONE 042

Note Title

15/11/2017

Commenti sulle scelte di piccolezza nella lrs. prec.

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad |\text{Det } J_\varphi(x_1)| &\leq |\text{Det } J_\varphi(x_2)| + |\text{Det } J_\varphi(x_1) - \text{Det } J_\varphi(x_2)| \\ &= |\text{Det } J_\varphi(x_2)| \left(1 + \underbrace{\frac{|\text{Det } J_\varphi(x_1) - \text{Det } J_\varphi(x_2)|}{|\text{Det } J_\varphi(x_2)|}}_{\leq \varepsilon \text{ se } x_1 \text{ e } x_2 \text{ sono vicini}} \right) \end{aligned}$$

Per unif. cont. il num. è piccolo se x_1 e x_2 sono vicini.

Osservo che $|\text{Det } J_\varphi(x_2)| \geq m_0 > 0$ per ogni x_2 . Questo segue dalla limitatezza di J_φ , che è l'inversa.

$$\textcircled{2} \quad J_\varphi(\varphi(y_1)) J_\varphi(y_2)$$

$$= \underbrace{J_\varphi(\varphi(y_1)) J_\varphi(y_1)}_{\text{Identità}} + \underbrace{J_\varphi(\varphi(y_1)) (J_\varphi(y_2) - J_\varphi(y_1))}_{\text{prodotto di matrice limitata per matrice con elementi piccoli a piacere se } y_1 \text{ e } y_2 \text{ sono vicini}}$$

Quando faccio la norma cubica, questa sta sotto $(1+\varepsilon)$.

— o — o —

Oss. La dim. del cambio di variabili è di inizio 1900.

— o — o —

Ci sarebbe un lemma di cubo interno che non abbiamo mai usato, che permetterebbe di avere la disug. opposta nel lemma 2.

LEMMA DI CUBO INTERNO Stesse ipotesi del lemma di cubo est.

Allora

legato a J_φ

$$\varphi(C(x_0, s)) \supseteq C(\varphi(x_0), Ls)$$

Dom. sbagliata Prendo $C(\varphi(x_0), L_S)$ considero la funzione ψ e ce la applico

$$\psi(C(\varphi(x_0), L_S)) \subseteq C(\psi(\varphi(x_0)), \hat{L}L_S)$$

↑
faccio in modo che
sia t e sono felice

$$= C(x_0, S)$$

ERRORE FATALE: non è detto che ψ sia definita in tutto $C(\varphi(x_0), L_S)$

La dimostrazione si aggiusta, ma non così (esercizio 😊).

Esercizio 1 Calcolare

$$\iint_A |y - 2x| dx dy \quad A = [0, 1] \times [0, 1]$$

Integrale con valore assoluto = spezzo i casi

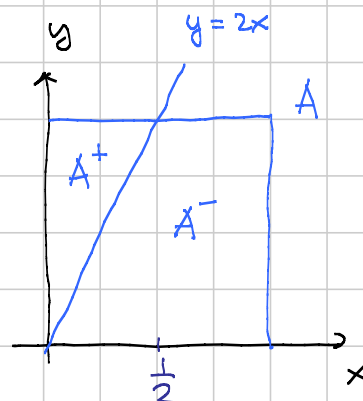
Dopo aver fatto lo spezzamento

$$\iint_A |y - 2x| dx dy = \iint_{A^+} (y - 2x) + \iint_{A^-} (2x - y)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_{2x}^1 dy (y - 2x) + \int_0^1 dy \int_{\frac{1}{2}y}^1 dx (2x - y)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{2x} dy (2x - y) + \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_0^1 dy (2x - y)$$

$$= \text{si fa.}$$



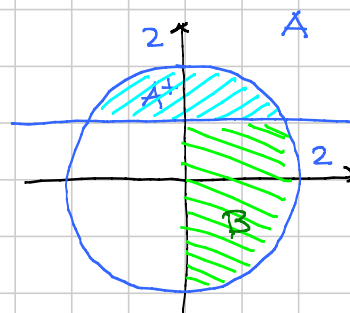
Esempio 2 $A =$ cerchio con centro $(0,0)$ e raggio 2

$$\iint_A |y-1| dx dy$$

$$= \iint_{A^+} (y-1) dx dy + \iint_{A^-} (1-y) dx dy$$

$$- \iint_{A^-} (y-1) dx dy$$

= si possono fare



Alternativa

$$\iint_A |f(x,y)| dx dy$$

$-\frac{f}{|f|}$

$$= \iint_A f(x,y) dx dy + 2 \iint_{A^-} |f(x,y)| dx dy$$

$$= \iint_A f(x,y) dx dy - 2 \iint_{A^-} f(x,y) dx dy$$

Nel nostro esempio $\iint_A f(x,y) dx dy = \iint_A (y-1) dx dy = -4\pi$

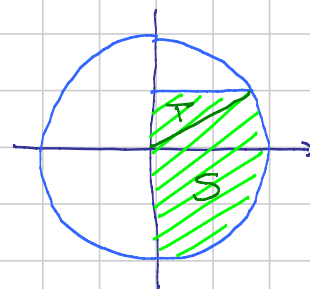
$\underbrace{\quad}_0$ $\underbrace{\quad}_{-Area}$

$$\begin{aligned} \iint_{A^-} (y-1) dx dy &= 2 \iint_B (y-1) dx dy \\ &= 2 \int_{-2}^1 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (y-1) dx \end{aligned}$$

$$= 2 \int_{-2}^1 (y-1) \sqrt{4-y^2} dy = \underbrace{2 \int_{-2}^1 y \sqrt{4-y^2} dy}_{\text{tranquillo}} - \underbrace{2 \int_{-2}^1 \sqrt{4-y^2} dy}_{\text{Area di B}}$$

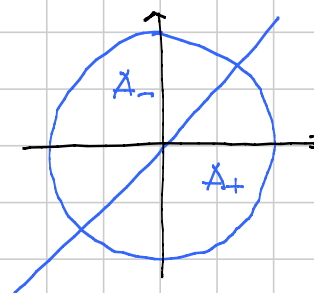
Modo alternativo di integrare su B

$$\iint_B f(x,y) dx dy = \underbrace{\iint_S f(x,y) dx dy}_{\text{facile in polari}} + \underbrace{\iint_T f(x,y) dx dy}_{\text{facile in cartesiane}}$$



Esempio 3 $\iint_A |x-y| dx dy$ $A = \text{cerchio di prima}$

$$\begin{aligned} \iint_A \dots &= 2 \iint_{A_+} \dots \\ &\quad \uparrow \\ &\quad (x,y) \rightsquigarrow (y,x) \\ &= 2 \int_0^2 dp \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \, p(\cos\theta - \sin\theta) \cdot p \end{aligned}$$



Esempio 4 $\iiint_S |z - x^2 - y^2| dx dy dz$

$S = \text{sfera con centro in } (0,0,0) \text{ e raggio } \sqrt{2}$

$$\begin{aligned} &\iiint_{S^+} + \iiint_{S^-} \\ &\quad \downarrow \\ &\quad \text{per colonne o per sezioni} \end{aligned}$$

$$\iiint_{S^+} = \int_0^1 dz \iint_{S_z} dx dy (\dots)$$

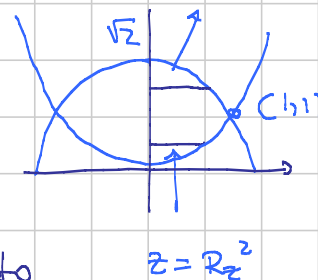
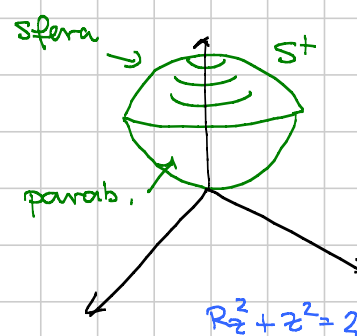
$\uparrow$
raggio $\sqrt{z}$

$$+ \int_1^{\sqrt{2}} dz \iint_{S_z} dx dy (\dots)$$

$\uparrow$
raggio $\sqrt{2-z^2}$

= concludere il conto

— 0 — 0 —



Def. (Integrale improprio su $\mathbb{R}^2$)

Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata e ≥ 0 e integrabile sulle palle.

Allora si pone

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy := \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{B_R(0)} f(x,y) dx dy$$

$\uparrow$
 cerchio con centro nell'origine e raggio R

ad R fisso è integrale proprio

Teorema (Indipendenza da come si invade $\mathbb{R}^2$).

Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata e ≥ 0 e integrabile sulle palle.

Sia A_n una successione di insiemi che "invade $\mathbb{R}^2$ ", cioè

- A_n è misurabile e limitato per ogni $n \in \mathbb{N}$
- per ogni $R > 0$ si ha che

$$A_n \supseteq B_R(0) \quad \text{definitivamente in } n.$$

Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{A_n} f(x,y) dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{B_R(0)} f(x,y) dx dy$$

Dim. L'integrale al LHS è ben definito per ogni $n \in \mathbb{N}$ perché A_n è misurabile e limitato e f è integrabile sulle palle.

Il limite al RHS esiste in $[0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ perché $f \geq 0$, quindi l'integrale è crescente con il raggio.

Ci sarebbero 2 casi. Faccio quello in cui il limite $L \in \mathbb{R}$ (l'altro è un facile esercizio).

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$\iint_{A_n} f(x,y) dx dy \leq \iint_{B_{R_n}(0)} f(x,y) dx dy \leq L$$

Fisso $\varepsilon > 0$. Per defin. di limite esiste R_0 t.c.

$$\iint_{B_R(0)} f(x,y) dx dy \geq L - \varepsilon \quad \forall R \geq R_0$$

Definitivamente $A_n \supseteq B_{R_0}(0)$, quindi

$$\iint_{A_n} f dx dy \geq \iint_{B_{R_0}(0)} f dx dy \geq L - \varepsilon.$$

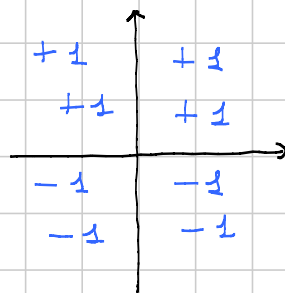
$\uparrow$
 ho usato univocamente
 che $f \geq 0$.
 — 0 — 0 —

Achtung! Se f non ha segno costante, il limite può dipendere da come realizzo l'invasione.

Se invado con $B_R(0)$ il limite viene 0.

Se invado con

$$A_n = [-n, n] \times [-n, n+1]$$



viene facilmente $+\infty$.

Posso regolare la asimmetria dell'invasione in modo da ottenere un qualunque limite in $\mathbb{R}$.

Brutalmente: ad Analisi 1 c'è "un solo modo ragionevole di invadere $[0, +\infty)$, cioè usare $[0, n]$ ".
 Ad Analisi 2 ci sono infiniti modi ragionevoli.

— 0 — 0 —

Def. (Integrale con problema in un p.to).

Sia $f: B_R(0) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione

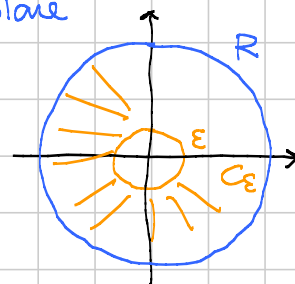
- non-negativa
- limitata ed integrabile sulle corone circolari $\varepsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$.

Allora si pone

$$\iint_{B_R(0)} f(x,y) dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint_{C_\varepsilon} f(x,y) dx dy$$

↑
corona circolare

Oss. Vale un teo. analogo di indip.
da come intendo $B_R(0) \setminus \{0\}$
(enunciarlo e dimostrarlo)



Esempio $\iint_{B_R(0)} \frac{1}{(x^2+y^2)^a} dx dy$
↑
se $a > 0$ ha problemi in $(0,0)$

$$\iint_{B_R(0)} \frac{1}{(x^2+y^2)^a} dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint_{C_\varepsilon} \dots$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^R d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{\rho^{2a}} \cdot \underset{\uparrow J}{\rho} = 2\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^R \frac{1}{\rho^{2a-1}} d\rho$$

$$= 2\pi \int_0^R \frac{1}{\rho^{2a-1}} d\rho \quad \text{e questo converge} \Leftrightarrow 2a-1 < 1$$

$$\Leftrightarrow a < 1$$

— o — o —

Tabellina: l'integrale converge $\Leftrightarrow a < 1$, il che accade
se e solo se la potenza di ρ al denominatore
è < 2 .

Esempio in $\mathbb{R}^3$

$$\iiint_{B_R(0)} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^a} dx dy dz$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iiint_{B_R(0) \setminus B_\varepsilon(0)} \frac{1}{(\dots)^a} dx dy dz$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^R \underbrace{d\rho}_{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{d\varphi}_{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{1}{\rho^{2a}} \rho^2 \cos \varphi}_2$$

$$= 4\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^R \frac{1}{\rho^{2a-2}} d\rho = 4\pi \int_0^R \frac{1}{\rho^{2a-2}} d\rho$$

Questo converge $\Leftrightarrow \underbrace{2a-2}_{<0} < 1$, cioè $\Leftrightarrow a < \frac{3}{2}$.

Fatto generale da tabellina

$$\text{In } \mathbb{R}^n \text{ vale } \int_{B_R(0)} \frac{1}{|x|^a} dx_1 \dots dx_n < +\infty \Leftrightarrow a < n$$

$$\text{In } \mathbb{R}^n \text{ vale } \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)} \frac{1}{|x|^a} dx_1 \dots dx_n < +\infty \Leftrightarrow a > n$$

esattamente con la stessa dimostrazione

Oss. Si possono usare cambi di variabile e formule di spezzamento anche per integrali impropri (brutale, ma corretto e giustificabile)

$$\iint_{B_R(0)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho} \cdot \rho d\varphi = 2\pi \int_0^R d\rho = 2\pi R$$

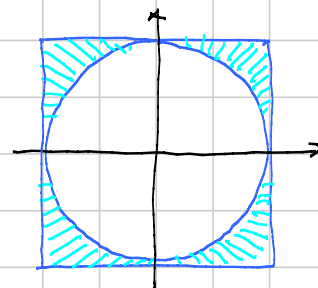
↑
polari dirette
sull'improprio

$$\iint_{\mathbb{R}^2 \setminus B_R(0)} \frac{1}{(x^2+y^2)^8} dx dy = \int_R^{+\infty} dp \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{p^{16}} \cdot p$$

$$= 2\pi \int_R^{+\infty} \frac{1}{p^{15}} dp = \text{converge.}$$

Esempio $A = [-1,1] \times [-1,1]$

$$\iint_A \frac{1}{(x^2+y^2)^a} dx dy$$



si comporta esattamente come
l'integrale in $B_1(0)$, perché la
differenza è un integrale PROPRIO

— o — o —

ANALISI 2 -

LEZIONE 044

Note Title

17/11/2017

CALCOLO INTEGRALE GAUSSIANOEsercizio 1 Calcolare $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy$

$$= \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{B_R(0)} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

$$= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R dp \int_0^{2\pi} d\theta e^{-p^2} \cdot p = 2\pi \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R p e^{-p^2} dp$$

$$= \pi \lim_{R \rightarrow +\infty} [-e^{-p^2}]_0^R = \pi$$

Potremmo farlo ricorrendo con i quadrati del tipo $[-n, n]^2 = Q_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{Q_n} e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-n}^n dx \int_{-n}^n dy e^{-x^2-y^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\int_{-n}^n e^{-x^2} dx}_{I_n} \underbrace{\int_{-n}^n e^{-y^2} dy}_{I_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n^2 = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \right)^2$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^2$$

Confrontando i due risultati, abbiamo ottenuto che

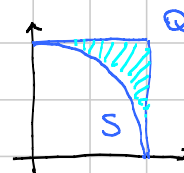
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Esercizio 2 Calcolare

$$\iint_Q \frac{1}{x+y} dx dy$$

$$Q = [0,1] \times [0,1]$$

Improprio per colpa di (0,0)



1ª oss. $\iint_Q$ si comporta come $\iint_S$ perché la diff. è un integrale proprio

2ª oss Studio dell'integrale sul settore

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{1}{x+y} dx dy &= \int_0^1 dp \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{1}{p(\cos\theta + \sin\theta)} \cdot p \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{avrebbe fatto con l'epsilon} \\ &= \int_0^1 dp \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta} d\theta}_{\text{numero}} = \text{numero}. \end{aligned}$$

Esercizio 3 $\iint_Q \frac{1}{x^3+y^3} dx dy \quad Q = [0,1]^2$

Questo diverge. Come prima mi riduco al settore, quindi in polari

$$\begin{aligned} \int_0^1 dp \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{1}{p^3(\cos^3\theta + \sin^3\theta)} p &= \\ = \int_0^1 \frac{1}{p^2} dp \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^3\theta + \sin^3\theta} d\theta}_{\text{numero} > 0} &= \text{numero} \cdot \int_0^1 \frac{1}{p^2} dp = +\infty \end{aligned}$$

Esercizio 4 $\iint_Q \frac{xy}{x^4+y^4} dx dy$

Brutale: $\sim \frac{1}{\rho^2}$, quindi diverge

In polari

$$\int_0^1 \rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{1}{\rho^2} \cdot \rho \frac{\cos\theta \sin\theta}{\cos^4\theta + \sin^4\theta}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\rho} d\rho \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta \sin\theta}{\cos^4\theta + \sin^4\theta} d\theta}_{\text{numero } > 0 \text{ indep. da } \theta} = \text{numero} \cdot \int_0^1 \frac{1}{\rho} d\rho = +\infty$$

Esercizio 5 $\iint_Q \frac{xy^a}{x^4+y^4} dx dy$ converge $\Leftrightarrow a > 1$

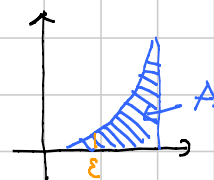
Esercizio 6 $\iint_A \frac{xy}{x^5+y^5} dx dy$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], 0 \leq y \leq x^2\}$$

Se voglio dimostrare la conv. provo

a scrivere $f(x,y) \leq \dots$

Se voglio la div. scrivo $f(x,y) \geq \dots$



$$f(x,y) \leq \frac{x^3}{x^5} = \frac{1}{x^2} \quad \text{ora integro cartesiano}$$

$$\begin{aligned} \iint_A \frac{xy}{x^5+y^5} dx dy &\leq \iint_A \frac{1}{x^2} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy \frac{1}{x^2} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx \int_0^{x^2} dy = \int_0^1 \frac{1}{x^2} \cdot x^2 dx = 1 \end{aligned}$$

Oss. Ho usato la formula di riduzione per l'integrale improprio. Avrei dovuto usare $A_\varepsilon = \{x \in [\varepsilon, 1], 0 \leq y \leq x^2\}$

Esercizio 7

$$\iint_{A_a} \frac{xy}{x^5+y^5} dx dy$$

$$A_a := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^a\}$$

Uso la stima come prima

$$\frac{xy}{x^5+y^5} \leq \frac{x^{a+1}}{x^5} = \frac{1}{x^{4-a}}$$

da cui

$$\begin{aligned} \iint_{A_a} \dots &\leq \iint_{A_a} \frac{1}{x^{4-a}} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^a} dy \frac{1}{x^{4-a}} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x^{4-a}} \cdot x^a dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{4-2a}} dx \end{aligned}$$

e questo converge $\Leftrightarrow 4-2a < 1 \Leftrightarrow 2a > 3 \Leftrightarrow a > \frac{3}{2}$.Achtung! Finora ho dimostrato solo che l'integrale dato converge se $a > \frac{3}{2}$.

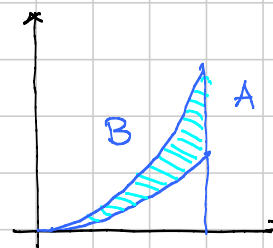
RESTA DA FARE L'ALTRA PARTE.

1° modo

$$\frac{xy}{x^5+y^5} \geq \frac{y^{\frac{1}{a}} y}{x^5+y^5}$$

 $\uparrow$
 $x \geq y^{\frac{1}{a}}$
 $\nwarrow$ non riesco a trovare
un denom. più grande
2° modoProvo a staccarmi dall'asse x
Considero il nuovo insieme

$$B_a := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \frac{1}{2}x^a \leq y \leq x^a\}$$



Osservo che

$$\frac{xy}{x^5+y^5} \geq \frac{x \cdot \frac{1}{2}x^a}{x^5+x^{5a}} = \frac{1}{2} \frac{x^{a+1}}{x^5+x^{5a}}$$

Ora come prima si verifica che

$$\iint_{A_a} \dots \geq \iint_{B_a} \dots \geq \iint_{B_a} \frac{1}{2} \frac{x^{a+1}}{x^5+x^{5a}}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_{\frac{1}{2}x^a}^{x^a} dy \frac{x^{a+1}}{x^5+x^{5a}} = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{x^{2a+1}}{x^5+x^{5a}} dx$$

e questo per $a \leq \frac{3}{2}$ diverge a $+\infty$ (analisi $\pm$)

- se $a \leq 1$, allora al denominatore comanda x^{5a} e quindi è come

$$\frac{x^{2a+1}}{x^{5a}} = \frac{1}{x^{3a-1}} \quad 3a-1 < 1 \quad a < \frac{2}{3}$$

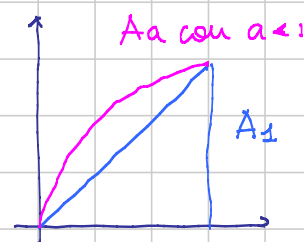
- se $a > 1$, allora al denominatore comanda x^5 e quindi è come

$$\frac{x^{2a+1}}{x^5} = \frac{1}{x^{4-2a}} \quad 4-2a < 1 \quad 2a > 3 \quad a > \frac{3}{2}$$

Apparentemente abbiamo dimostrato che diverge per

$a \in (1, \frac{3}{2})$ e per $a \in [\frac{2}{3}, 1]$. Così resta aperto il caso $a < \frac{2}{3}$

In realtà basta considerare il caso $a \geq 1$. Infatti $A_a \supseteq A_1$ per ogni $a \geq 1$



Per fare la dimostrazione finale, ci sono 3 passi

- Se $a > \frac{3}{2}$ ho convergenza come dim. all'inizio
- Se $a \in [1, \frac{3}{2}]$ ho divergenza confrontando con il B_a
- Se $a < 1$ ho divergenza confrontando con A_1 .

Oss. Pare che $\iint_{B_a} \dots$ converga anche se $a < \frac{2}{3}$



$$\iint_{B_a} \sim \iint_{B_{\frac{1}{a}}} \text{ per simmetria !!!}$$

$$= 0 = 0 =$$

ANALISI 2 - LEZIONE 045

Note Title

21/11/2017

VOLUME PALLA n DIMENSIONALE

$$B_n(R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq R\}$$

$$\text{meas}(B_n(R)) = \omega_n R^n$$

Dimosteremo che

$$\omega_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

dove $\Gamma(x)$ è la Gamma di Eulero, definita da

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad \forall x > 0$$

Proprietà della Γ :

- ① $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x) \quad \forall x > 0$
- ② $\Gamma(n) = (n-1)! \quad \forall \text{ intero } n \geq 1$
- ③ $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (integrale Gaussiano)

Scritture alternative di ω_n :

• se $n = 2k$ diventa $\omega_{2k} = \frac{\pi^k}{\Gamma(k+1)} = \frac{\pi^k}{k!}$

quindi

$$\text{meas}(B_{2k}(R)) = \frac{\pi^k}{k!} R^{2k}$$

• se $n = 2k+1$ diventa $\omega_{2k+1} = \frac{\pi^k \sqrt{\pi}}{\Gamma(k+1 + \frac{1}{2})}$

$$\Gamma(k+1 + \frac{1}{2}) = (k + \frac{1}{2})(k - \frac{1}{2})(k - \frac{3}{2}) \cdots \frac{3}{2} \Gamma(\frac{1}{2})$$

$\sqrt{\pi}$

$$\begin{aligned}
 \Gamma\left(k+1+\frac{1}{2}\right) &= \frac{(2k+1)}{2} \frac{(2k-1)}{2} \frac{(2k-3)}{2} \dots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} \\
 &= \frac{(2k+1)!!}{2^{k+1}} \sqrt{\pi} \frac{(2k)(2k-2)\dots 2}{(2k)(2k-2)\dots 2} \\
 &= \frac{(2k+1)!}{2^{k+1}} \frac{\sqrt{\pi}}{2^k k!}
 \end{aligned}$$

Aggiunto dopo
video

Sostituendo diventa

$$\omega_{2k+1} = \frac{\pi^k \sqrt{\pi} 4^k k! \cdot 2}{(2k+1)! \sqrt{\pi}} = \frac{2 (4\pi)^k k!}{(2k+1)!}$$

e quindi

$$\text{meas}(B_{2k+1}(R)) = \frac{2 (4\pi)^k k!}{(2k+1)!} R^{2k+1}$$

Controllo : $k=0 \rightsquigarrow 2R$ ☺

$$k=1 \rightsquigarrow \frac{2 \cdot 4\pi}{3!} R^3 = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad \text{☺}$$

— 0 — 0 —

1° approccio Provo ad introdurre l'analogo delle coordinate sferiche, ma occorrono $n-1$ angoli e tanti integrali trigonometrici

2° approccio Provo, integrando per sezioni, a scendere di 1 con la dimensione

$$\begin{aligned}
 \text{meas}(B_n(R)) &= \int_{-R}^R dx_1 \int_{S_{x_1}} 1 \, dx_2 \dots dx_n \\
 &\quad \uparrow \text{palla in dim } n-1 \text{ di raggio } \sqrt{R^2 - x_1^2} \\
 &= \int_{-R}^R dx_1 \, \text{meas}(B_{n-1}(\sqrt{R^2 - x_1^2}))
 \end{aligned}$$

$$= \int_{-R}^R dx_1 \omega_{m-1} (R^2 - x_1^2)^{\frac{m-1}{2}}$$

Pongo $x_1 = Ry$, da cui $dx_1 = R dy$

$$= \int_{-1}^1 dy \omega_{m-1} R (R^2 - R^2 y^2)^{\frac{m-1}{2}}$$

$$= \omega_{m-1} R \cdot R^{m-1} \int_{-1}^1 (1 - y^2)^{\frac{m-1}{2}} dy$$

Pongo $y = \sin t$, da cui $dy = \cos t dt$

$$= \omega_{m-1} R^m \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t)^{\frac{m-1}{2}} \cos t dt$$

$$= \omega_{m-1} R^m \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^m t dt$$

= con pazienza si calcolano (vedi analisi 1 dove c'era una formula ricorrente).

3° approccio Provo a scendere di 2 dim. per induzione

$$\text{meas}(B_m(R)) = \iint_{B_2(R)} dx_1 dx_2 \underbrace{\text{meas}(B_{m-2}(\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}))}_{\text{sezione fissati } x_1 \text{ e } x_2}$$

$$= \int_0^R dp \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \cdot \text{meas}(B_{m-2}(\sqrt{R^2 - p^2})) \cdot p$$

$$= 2\pi \omega_{m-2} \int_0^R (R^2 - p^2)^{\frac{m-2}{2}} \cdot p dp$$

$$= 2\pi \omega_{m-2} \left[\frac{2}{m} (R^2 - p^2)^{\frac{m}{2}} \left(-\frac{1}{2}\right) \right]_0^R$$

$$= 2\pi \omega_{m-2} \frac{R^m}{m}$$

Abbiamo ottenuto la relazione ricorrente

$$\omega_m = \frac{2\pi}{m} \omega_{m-2}$$

da cui seguendo le formule precedenti, per esempio

$$\begin{aligned} \omega_{2k} &= \frac{2\pi}{2k} \omega_{2k-2} = \frac{2\pi}{2k} \cdot \frac{2\pi}{2k-2} \omega_{2k-4} \\ &= \frac{2\pi}{2k} \cdot \frac{2\pi}{2k-2} \cdots \frac{2\pi}{4} \omega_2 \\ &= \frac{2\pi}{2k} \cdot \frac{2\pi}{2k-2} \cdots \frac{2\pi}{4} \cdot \frac{2\pi}{2} = \frac{\pi^k}{k!} \end{aligned}$$

e idem sui dispari

— 0 — 0 —

Oss. (molto per il futuro) Derivando rispetto ad R la misura n -dimensionale di $B_m(R)$ si ottiene la misura $(n-1)$ dimensionale (non ancora definita) del suo bordo.

— 0 — 0 —

INTEGRALE IMPROPRIO DI $\frac{1}{|x|^a}$

Caso con p.b.m. in 0

$$\int_{B_R(0)} \frac{1}{|x|^a} dx_1 \dots dx_n \begin{cases} \nearrow \text{converge} & \text{se } a < n \\ \searrow \text{div. a } +\infty & \text{se } a \geq n \end{cases}$$

Approccio buono: carteriano per colonne dopo aver osservato che basta studiare la convergenza sul cubo unitario centrato nell'origine

$$C_n := [-1, 1]^n$$

$$\int_{C_n} \frac{1}{|x|^a} dx_1 \dots dx_n = \int_{C_{n-1}} dx_1 \dots dx_{n-1} \int_{-1}^1 \frac{dx_n}{[x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n^2]^{a/2}}$$

Parentesi di analisi 1:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{(b^2 + x^2)^{a/2}} dx &\stackrel{x=bt}{=} \int_{-\frac{1}{b}}^{\frac{1}{b}} \frac{1}{(b^2 + b^2 t^2)^{a/2}} \cdot b dt \\ &= \frac{1}{b^{a-1}} \int_{-\frac{1}{b}}^{\frac{1}{b}} \frac{1}{(1+t^2)^{a/2}} dt \end{aligned}$$

Da questo otteniamo

$$\int_{C_n} \frac{1}{|x|^a} dx_1 \dots dx_n = \int_{C_{n-1}} \frac{dx_1 \dots dx_{n-1}}{[x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2]^{\frac{a-1}{2}}} \int_{-\frac{1}{b}}^{\frac{1}{b}} \frac{1}{(1+t^2)^{a/2}} dt = (\star)$$

Distinguo dei casi:

• Se $a \geq n$, allora $\int_{-\frac{1}{b}}^{\frac{1}{b}} \frac{1}{(1+t^2)^{a/2}} dt \geq \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{1}{(1+t^2)^{a/2}} dt}_{\text{numero}}$

Quindi

$$(\star) \geq \text{numero} \cdot \int_{C_{n-1}} \frac{dx_1 \dots dx_{n-1}}{[x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2]^{\frac{a-1}{2}}}$$

e questo diverge per hp
induttiva.

$b \leq 1$
↑ forse non è proprio
s, ma in, comunque
sempre un numero
riente

• Se $1 < a < n$, allora $\int_{-\frac{1}{b}}^{\frac{1}{b}} \dots \leq \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{a/2}}}_{\text{numero}}$ e quindi

$$(\star) \leq \text{numero} \cdot \int_{C_{n-1}} \frac{dx_1 \dots dx_{n-1}}{|x|^{\frac{a-1}{2}}}$$

e questo converge per
hp induttiva

• Per $a < 1$ basta osservare che $\frac{1}{|x|^a} \leq \frac{1}{|x|^{3/2}}$ per $|x|$ piccoli
e quindi conv.
per confronto.

Analogamente si dimostra che

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)} \frac{1}{|x|^a} dx_1 \dots dx_n = \begin{cases} \text{conv.} & \text{se } a > n \\ \text{div. a } +\infty & \text{se } a \leq n \end{cases}$$

Idea: basta osservare che nell'insieme dato vale

$$\frac{1}{2} \frac{1}{|x|^a} \leq \frac{1}{[1+x^2+\dots+x_n^2]^{a/2}} \leq \frac{1}{|x|^a}$$

Ora la convergenza dell'integrale centrale su tutto $\mathbb{R}^n$ si studia per colonne esattamente come il caso precedente, cioè con il b. Quindi si va per induzione.

— o — o —

ANALISI 2 - LEZIONE 046

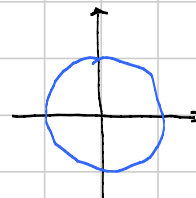
Note Title

21/11/2017

Esempio 1 $\iint_A \frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2} dx dy$

$$A = \mathbb{R}^2 \setminus B_1(0)$$

Oss: se convergesse, convergerebbe a 0 per simmetria

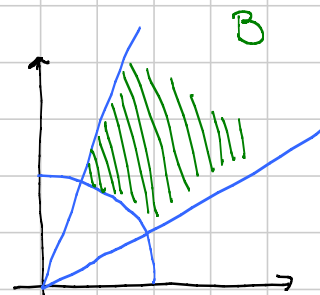


Brutalmente: $f(xy) \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{\rho^2} \leadsto$ diverge

vicino agli assi non è molto sensata

L'idea è di restare lontani dagli assi

Considero una zona B definita da



$$\rho \geq 1 \quad 0 < \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 < \frac{\pi}{2}$$

↑ ↑
fissati una volta per tutte

Osservo che $\int_{\text{quadrante}} f(x,y) dx dy \geq \int_B f(x,y) dx dy$

e in B vale la disuguaglianza

$$f(x,y) = \frac{\arctan[\rho^2 \cos \theta \sin \theta]}{\rho^2} \geq \frac{\arctan[\cos \theta \sin \theta]}{\rho^2}$$

↑
 $\rho \geq 1$

$$\geq \frac{\arctan m}{\rho^2} \quad \leftarrow \min \{ \cos \theta \sin \theta : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \} > 0 \text{ per Weierstrass.}$$

$$\iint_B f(x,y) dx dy \geq \int_1^{+\infty} d\rho \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \frac{\arctan m}{\rho^2} \cdot \rho = +\infty$$

Esempio 2 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \geq 1\}$

$$\iint_A \frac{1}{x^2 + y^4} dx dy$$

SLOGAN: Paneggiare gli esponenti !!!

Pongo $x = u^2, y = v$ La funzione diventa $\frac{1}{u^4 + v^4}$

Dopo calcolare $J(u, v)$
$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

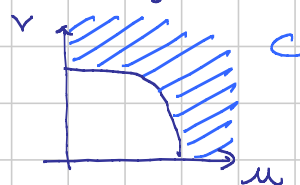
$$\Rightarrow J(u, v) = 2u$$

L'insieme di integrazione A è diventato $u^4 + v^2 \geq 1$.
Quindi

$$\iint_A \frac{1}{x^2 + y^4} dx dy = \iint_C \frac{1}{u^4 + v^4} \cdot 2u du dv$$

dove $C := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \geq 0, v \geq 0, u^4 + v^2 \geq 1\}$

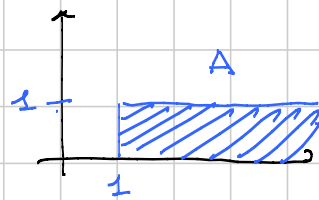
Ora l'integrale su C è equivalente a quello su $u^2 + v^2 \geq 1$ e questo converge perché è del tipo $\frac{1}{p^3}$



$$\frac{2 \rho \cos \theta}{\underbrace{\rho^4 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)}_{\geq \rho \dots}} \leq \frac{2}{\rho} \frac{1}{\rho^3}$$

— 0 — 0 —

Esempio 3 $\iint_A \frac{1}{x^2+y^2} dx dy$

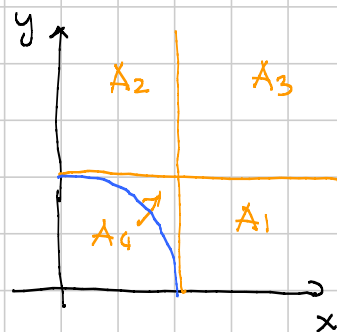


$$\iint_A \frac{1}{x^2+y^2} dx dy \leq \iint_A \frac{1}{x^2} dx dy$$

$$= \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{1}{x^2} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx < +\infty$$

Esempio 4 $\iint_A \frac{1}{x^2+y^2+x^2y^2} dx dy$

↑
esterno del solito
setto nel 1° quadrante



Su A_4 nessun problema

Su A_1 ragionare come nell'esempio 3

$$\iint_{A_1} \frac{1}{x^2+y^2+x^2y^2} dx dy \leq \iint_{A_1} \frac{1}{x^2} dx dy < +\infty$$

Su A_2 è uguale

Su A_3 vale

$$\iint_{A_3} \frac{1}{x^2+y^2+x^2y^2} dx dy \leq \iint_{A_3} \frac{1}{x^2y^2} dx dy$$

$$= \int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} dy \frac{1}{x^2y^2} = \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}}_1 \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{dy}{y^2}}_1 = 1.$$

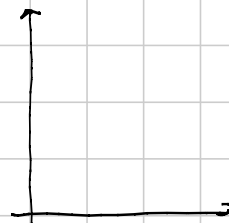
Esempio 5

$$\iint_{A_a} \frac{1}{x^2+y^2} dx dy$$

dove $A_a := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, 0 \leq y \leq x^a \}$

• Se $a < 1$, ragioniamo come nell'esempio 3

$$\begin{aligned} \iint_{A_a} \frac{1}{x^2+y^2} dx dy &\leq \int_1^{+\infty} dx \int_0^{x^a} \frac{1}{x^2} dy \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2-a}} dx \quad \text{e quindi converge.} \end{aligned}$$



• Se $a \geq 1$, allora A_a contiene il settore

$$\rho \geq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \iint_{A_a} \frac{1}{x^2+y^2} dx dy &\geq \int_1^{+\infty} d\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \frac{1}{\rho^2} \cdot \rho \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

ANALISI 2 — LEZIONE 047

Note Title

22/11/2017

Coord. sferiche in n -variabili : ogni volta di aggiunge un nuovo angolo $\in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Detti $\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}$ gli $(n-1)$ -angoli che si usano, allora

$$x_m = \rho \sin \varphi_{m-1}$$

$$x_{m-1} = \rho \cos \varphi_{m-1}$$

$$x_{m-2} = \rho \cos \varphi_{m-1}$$

coord. sferiche in
dimensione $n-1$

Il Det jacobiano è del tipo $\rho^{m-1} g(\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1})$

(si dimostra per induzione o osservando che la matrice ha tutte le righe tranne 1 con dei ρ)

C'è una formula per $\int_{S^{m-1}} g(\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1})$
 $\uparrow$ integrale rispetto agli angoli

Calcolo $\int_{\mathbb{R}^m} e^{-|x|^2} dx_1 \dots dx_m = \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} d\rho \underbrace{\int_{S^{m-1}} g(\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}) \rho^{m-1}}_{I_n}$

$$= \int_0^{+\infty} \rho^{m-1} e^{-\rho^2} d\rho \cdot I_n$$

Pongo $x = \rho^2$

$$dx = 2\rho d\rho \leadsto d\rho = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} x^{\frac{m-1}{2}} e^{-x} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \cdot I_n = \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{+\infty} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-x} dx}_{\Gamma(\frac{m}{2})} \cdot I_n$$

$$= \frac{1}{2} I_n \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)$$

Lo stesso conto in cartesiane fornisce

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}} dx_1 e^{-x_1^2} \int_{\mathbb{R}} dx_2 e^{-x_2^2} \dots = (\sqrt{\pi})^n = \pi^{\frac{n}{2}}$$

Conclusione

$$\pi^{\frac{n}{2}} = \frac{1}{2} I_n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \leadsto I_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$n=2 \leadsto \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi \quad I_2 = \frac{2\pi}{\Gamma(1)} = \frac{2\pi}{0!} = 2\pi \quad \text{😊}$$

$$n=3 \leadsto \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dp \cos p = 4\pi; \quad I_3 = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = 4\pi \quad \text{😊}$$

Applicazione: Nuovo calcolo volume di $B_n(\mathbb{R})$

$$\int_{B_n(\mathbb{R})} 1 dx_1 \dots dx_n = \int_0^R dp \int_{S^{n-1}} dp_1 \dots dp_{n-1} p^{n-1} g(p_1, \dots, p_{n-1})$$

$$= I_n \int_0^R p^{n-1} dp = I_n \frac{R^n}{n} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} R^n$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} R^n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} R^n$$

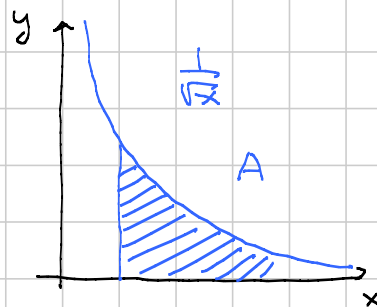
Possibile variante Calcolo l'altezza del baricentro della metà di $B_n(\mathbb{R})$

[Idea: integrare per sezioni rispetto all'ultima variabile]

Esercizio 1

$$\iint_A \frac{1}{x^a + y^a} dx dy$$

Esplorazione:



$$\iint_A \frac{1}{x^a + y^a} dx dy \leq \iint_A \frac{1}{x^a} dx dy$$

↑
rimuovere a
y è poca
rimuovere

$$= \int_1^{+\infty} dx \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{x^a} dy$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{a+1/2}} dx \quad \text{per } a > \frac{1}{2} \text{ conv.}$$

In realtà ho dim. rigorosamente che per $a > \frac{1}{2}$ si ha conv.
Devo fare parte opposta

$$\iint_A \frac{1}{x^a + y^a} dx dy \geq \iint_A \frac{1}{2x^a} dx dy = \text{come sopra} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{a+1/2}} dx$$

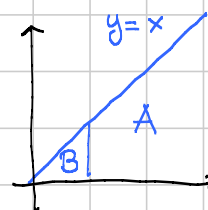
↑
ho usato $x \geq y$

$= +\infty$
se $a \leq \frac{1}{2}$

Esercizio 2 (sottinteso: $a > 0$)

$$\iint_A \frac{x}{x^2 + y^a} dx dy$$

$$\iint_B \frac{x}{x^2 + y^a} dx dy$$



$$\iint_B \frac{x}{x^2 + y^a} dx dy \leq \iint_B \frac{x}{x^2} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{x}{x^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2}{x^2} dx = \text{converge per ogni } a > 0$$

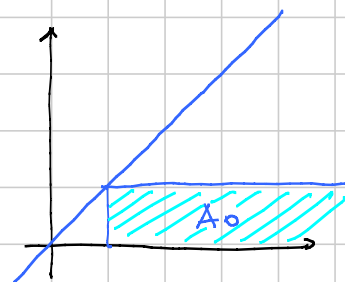
$$\iint_A \frac{x}{x^2 + y^a} dx dy \geq \iint_A \frac{x}{x^2 + x^a} dx dy = \int_1^{+\infty} dx \int_0^x dy \dots$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^2 + x^a} dx dy = +\infty \text{ per } a \leq 3$$

Idea: abbiamo perso troppo con la disuguaglianza, quindi conviene diminuire la zona di integrazione

$$\iint_A \frac{x}{x^2+y^a} dx dy \geq \iint_{A_0} \dots$$

$$\begin{aligned} &\geq \iint_{A_0} \frac{x}{x^2+1} dx dy = \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{x}{x^2+1} \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2+1} dx = +\infty \text{ per ogni } a > 0. \end{aligned}$$



Esercizio 3 $\iint_A \frac{x}{x^2+y^a} dx dy$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, x \leq y \leq 2x\}$$

Ora davvero il cutoff è 3

$$\frac{x}{x^2+(2x)^a} \leq \frac{x}{x^2+y^a} \leq \frac{x}{x^2+x^a}$$

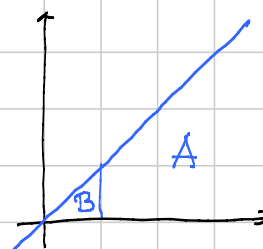
Esempio 4 $\iint_A \frac{x}{x^a+y^2} dx dy$

$$\iint_B \frac{x}{x^a+y^2} dx dy$$

A e B come nell'esercizio 2

$$\iint_A \frac{x}{x^a+y^2} dx dy \leq \iint_A \frac{x}{x^a} dx dy$$

$$= \int_1^{+\infty} dx \int_0^x dy \frac{x}{x^a} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{a-2}} dx \quad \text{Per } a > 3 \text{ converge}$$

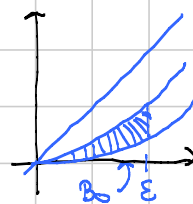


Basta dimostrare che diverge per $a = 3$ (a quel p.to per $a < 3$ è ancora peggio)

$$\iint_A \frac{x}{x^3+y^2} dx dy \geq \iint_A \frac{x}{x^3+x^2} dx dy = \int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^3+x^2} dx = +\infty$$

$$\iint_B \frac{x}{x^a + y^2} dx dy$$

Proviamo con $a=4$



$$\iint_B \frac{x}{x^4 + y^2} dx dy$$

Prendo una zona del tipo

$$x^2 \leq y \leq 2x^2$$

$$\begin{aligned} &\geq \iint_{B_0} \dots \geq \iint_{B_0} \frac{x}{x^4 + 4x^4} dx dy = \int_0^\epsilon dx \int_{x^2}^{2x^2} dy \frac{x}{5x^4} \\ &= \int_0^\epsilon \frac{x^3}{5x^4} dx = +\infty \end{aligned}$$

giusto giusto

Ho dimostrato che per $a \geq 4$ diverge

Per dimostrare la convergenza per $a < 4$ faccio la primitiva!

$$\int \frac{1}{b+y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{b}} \arctan \frac{y}{\sqrt{b}}$$

$$\iint_B \frac{x}{x^a + y^2} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{x}{x^a + y^2}$$

$$= \int_0^1 dx \times \frac{1}{\sqrt{x^a}} \left[\arctan \frac{y}{\sqrt{x^a}} \right]_0^x$$

$\leq \frac{\pi}{2}$

$$\leq \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{a}{2}-1}} dx \quad \text{e questo per } a < 4 \text{ converge !!}$$

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 048

Note Title

22/11/2017

Integrali dipendenti da parametroSia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ un insieme misurabileSia $(t_1, t_2) \subseteq \mathbb{R}$ un intervalloSia $f: (t_1, t_2) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione.Posso definire $\varphi: (t_1, t_2) \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$\varphi(t) := \int_{\Omega} f(t, x) dx_1 \dots dx_m$$

Vogliamo studiare continuità e derivabilità di φ .

Teorema 1 Supponiamo Ω misurabile (e anche limitato).
 Supponiamo $f(t, x)$ uniformemente continua
 su $(t_1, t_2) \times \Omega$.
 Allora φ è continua su (t_1, t_2) .

Dim. Prendo $t_0 \in (t_1, t_2)$, prendo $\varepsilon > 0$ e cerco $\delta > 0$ t.c.

$$|\varphi(t) - \varphi(t_0)| \leq \varepsilon \quad \text{se} \quad |t - t_0| \leq \delta$$

Ora

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \varphi(t_0)| &= \left| \int_{\Omega} [f(t, x) - f(t_0, x)] dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |f(t, x) - f(t_0, x)| dx \end{aligned}$$

Ora coll' unif. continuità di f prendo $\frac{\varepsilon}{\text{meas}(\Omega)}$ e trovo un $\delta > 0$ t.c.

$$|t - t_0| \leq \delta \Rightarrow |f(t, x) - f(t_0, x)| \leq \frac{\varepsilon}{\text{meas}(\Omega)} \quad \forall x \in \Omega$$

Con questo δ concludo

$$|\varphi(t) - \varphi(t_0)| \leq \int_{\Omega} \frac{\varepsilon}{\text{meas}(\Omega)} dx = \varepsilon$$

— o — o —

Oss 1 L'uniforme continuità è quella che mi garantisce che la stima vale per ogni $x \in \Omega$. La sto usando nella coppia, nel senso che (t, x) è vicino al p.to (t_0, x)

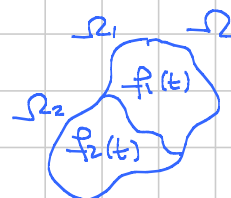
Oss 2 Ho usato di meno, cioè che f è continua in t_0 uniformemente rispetto ad x .

$$|t - t_0| \leq \delta \Rightarrow |f(t, x) - f(t_0, x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \Omega$$

↑
Questo δ non deve
dipendere da x

Esempio Se pongo

$$f(t, x) := \begin{cases} f_1(t) & \text{se } x \in \Omega_1 \\ f_2(t) & \text{se } x \in \Omega_2 \end{cases}$$



allora se f_1 ed f_2 sono continue vale il teorema, anche se $f(t, x)$ rispetto alla variabile x può non essere nemmeno continua.

Oss. Se nell'oss. 2 assumo f unif. cont. in t unif. rispetto ad x , allora la $\varphi(t)$ risulta unif. cont. in t .

— o — o —

Teorema 2 Supponiamo Ω misurabile e limitato.
 Supponiamo $f(t, x)$ derivabile rispetto alla
 variabile t in $(t_1, t_2) \times \Omega$ e supponiamo

$$f_t(t, x) \text{ unif. cont. in } (t_1, t_2) \times \Omega$$

(ma sono possibili le stesse varianti
di prima)

Allora φ è derivabile in (t_1, t_2) e

$$\varphi'(t) = \int_{\Omega} f_t(t, x) dx \quad \forall t \in (t_1, t_2)$$

Teo. scambio: la deriv. dell'integrale è
l'integrale della derivata

Dim. Prendo $t_0 \in (t_1, t_2)$ e faccio il rapporto incrementale
sperando che

$$\frac{\varphi(t_0+h) - \varphi(t_0)}{h} \rightarrow \int_{\Omega} f_t(t_0, x) dx$$

Conviene portare tutto dalla stessa parte

$$\int_{\Omega} \left[\frac{f(t_0+h, x) - f(t_0, x)}{h} - f_t(t_0, x) \right] dx$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\frac{\varphi(t_0+h) - \varphi(t_0)}{h}}$$

Prendo $\varepsilon > 0$ e spero di trovare $\delta > 0$ t.c.

$$\left| \int_{\Omega} \dots \right| \leq \varepsilon \quad \forall |h| \leq \delta$$

Come sempre

$$\left| \int_R \dots \right| \leq \int_R \left| \frac{f(t_0+R, x) - f(t_0, x)}{R} - f_t(t_0, x) \right| dx$$

$$\text{"}$$

$$f_t(t_0 + C(x, R), x)$$

↑
compreso tra 0 ed R
ma può dipendere da x

Ora scelgo il δ nell'unif. continuità in modo tale che

$$\|(t_1, x) - (t_2, x)\| \leq \delta \Rightarrow |f_t(t_1, x) - f_t(t_2, x)| \leq \frac{\varepsilon}{\text{meas}(R)}$$

e la conclusione è la stessa di prima.

Oss. Per quanto ne sappiamo $C(R, x)$ potrebbe dipendere in modo nemmeno misurabile da x , ma la stima vale comunque

CASO DELLA DIMENSIONE 1

Consideriamo una funzione del tipo

$$\varphi(t) := \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, x) dx$$

Sotto opportune ipotesi φ risulta derivabile dove è definita e vale

$$\varphi'(t) = f(t, b(t)) b'(t) - f(t, a(t)) a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} f_t(t, x) dx$$

Ipotesi ampiamente suff.: $a(t)$ e $b(t)$ derivabili e $f_t(t, x)$ esistente e unif. cont. nella coppia

Dici Considero la funzione di 3 variabili

$$\Phi(t, a, b) := \int_a^b f(t, x) dx$$

Dal teo. precedente sappiamo che

$$\Phi_b(t, a, b) = f(t, b)$$

$$\Phi_a(t, a, b) = -f(t, a)$$

Dal teo. precedente sappiamo che

$$\Phi_t(t, a, b) = \int_a^b f_t(t, x) dx$$

Ora $\varphi(t) = \Phi(t, a(t), b(t))$, quindi è una funzione composta, che deriviamo con la chain-rule

$$\varphi'(t) = \Phi_a(\dots) a'(t) + \Phi_b(\dots) b'(t) + \Phi_t(\dots)$$

= formula data.

— o — o —

Oss. Seme della differenziabilità, che segue dal diff. totale via continuità delle derivate parziali.

— o — o —

Quando gli integrali diventano impropri sono guai e serve un'ulteriore ipotesi, cioè la DOMINAZIONE.

Teorema (Modello) Sia $f: \mathbb{R} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ unif. continua.
Pougo

$$\varphi(t) := \int_0^{+\infty} f(t, x) dx$$

mettiamo che sia definito
per ogni $t \in \mathbb{R}$

Supp. che f sia dominata, cioè esiste $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$|f(t, x)| \leq g(x)$$

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$$

con

$$\int_0^{+\infty} g(x) dx < +\infty$$

(questo garantisce la
conv. dell'int. che definisce
 φ)

Allora φ è continua.

Dim. Quella precedente fallisce dopo

$$|\varphi(t) - \varphi(t_0)| = \int_0^{+\infty} |f(t, x) - f(t_0, x)| dx = (\star)$$

Ora, dato $\varepsilon > 0$, scelgo A in modo tale che

$$\int_A^{+\infty} g(x) dx \leq \frac{1}{4} \varepsilon$$

A questo punto

$$\begin{aligned} (\star) &= \int_0^A |f(t, x) - f(t_0, x)| dx + \int_A^{+\infty} |f(t, x) - f(t_0, x)| dx \\ &\leq \int_A^{+\infty} |f(t, x)| + |f(t_0, x)| dx \\ &\leq 2 \int_A^{+\infty} g(x) dx \\ &\stackrel{\text{Domina-}}{\leq} \frac{1}{2} \varepsilon \end{aligned}$$

zione

Sul primo termine come con gli integrali propri, scegliendo il δ che nell'v.c. fa venire fuori

$$\frac{1}{2A} \varepsilon$$

— o — o —