

Teoremi di convergenza dominata (teo. passaggio al limite per integrali impropri)

Teorema (Conv. dom. BABY)

Sia $A \in \mathbb{R}$ e siano $f_n : [A, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e $f_\infty : [A, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue (ma basta molto meno).

Supponiamo che

(i) $f_n \rightarrow f$ unif. sui compatti

(ii) esiste $g : [A, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \geq A \quad (\text{DOMINAZIONE})$$

$$\int_A^{+\infty} g(x) dx < +\infty$$

Allora

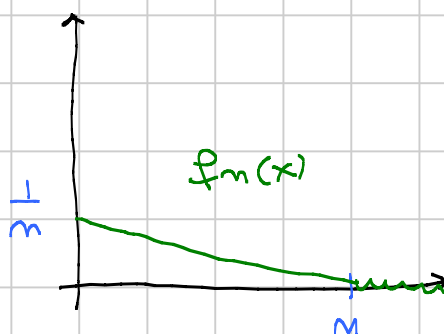
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_A^{+\infty} f_n(x) dx = \int_A^{+\infty} f_\infty(x) dx$$

Oss. 1 - Se fosse un integrale in $[A, B]$ sarebbe il classico teorema di scambio

2 - Senza dominazione è falso, anche se $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. su tutto $[A, +\infty)$.

Esempio $f_n \rightarrow f_\infty \equiv 0$ unif. su $[0, +\infty)$

$$\int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0 = \int_0^{+\infty} f_\infty(x) dx$$



Dim Devo dim. che $\forall \varepsilon > 0 \exists m_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\left| \int_A^{+\infty} f_n(x) dx - \int_A^{+\infty} f_\infty(x) dx \right| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq m_0$$

$$\text{LHS} \leq \left| \int_A^{+\infty} f_n(x) dx - \int_A^B f_n(x) dx \right|$$

piccolo se
B grande

$$+ \left| \int_A^B f_n(x) dx - \int_A^B f_\infty(x) dx \right|$$

piccola se
n è grande

$$+ \left| \int_A^B f_\infty(x) dx - \int_A^{+\infty} f_\infty(x) dx \right|$$

piccolo se
B grande

In outline:

- mi viene dato $\varepsilon > 0$
- scelgo $B \geq A$ t.c.

$$\int_B^{+\infty} g(x) dx \leq \frac{1}{4} \varepsilon$$

posso perché coda di
integr. conv.

- deduco dalla precedente e dalla dominazione che

$$\int_B^{+\infty} |f_n(x)| dx \leq \frac{1}{4} \varepsilon$$

$$\int_B^{+\infty} |f_\infty(x)| dx \leq \frac{1}{4} \varepsilon$$

per dedurre che $|f_\infty(x)| \leq g(x)$ basta la puntuale

- visto B, scelgo $m_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\left| \int_A^B f_n(x) dx - \int_A^B f_\infty(x) dx \right| \leq \frac{1}{2} \varepsilon \quad \forall n \geq m_0$$

posso perché su $[A, B]$ ho convergenza uniforme.

Mettendo insieme le stime ho la tesi.

— o — o —

Teorema (Continuità di integrale improprio dip. da parametro)
Siano $A \in \mathbb{R}$, $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ e

$$f: (a, b) \times [A, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

una funzione continua (una basta meno).

Supponiamo che esista $g: [A, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$|f(t, x)| \leq g(x) \quad \forall t \in (a, b) \quad \forall x \geq A$$

$$\int_A^{+\infty} g(x) dx < +\infty$$

Poniamo

$$\varphi(t) := \int_A^{+\infty} f(t, x) dx \quad \forall t \in (a, b).$$

Allora φ è ben definita e continua in (a, b) .

Dim. La dominazione assicura la convergenza dell'integrale, e quindi la buona definizione di $\varphi(t)$.

Per la continuità, o ripetiamo la dim. di prima, o ragioniamo per successioni. Prendiamo $t_n \rightarrow t_\infty$ in (a, b) e mostriamo che

$$\begin{array}{ccc} \varphi(t_n) & \longrightarrow & \varphi(t_\infty) \\ \parallel & & \parallel \\ \int_A^{+\infty} \underbrace{f(t_n, x)}_{f_n(x)} dx & & \int_A^{+\infty} \underbrace{f(t_\infty, x)}_{f_\infty(x)} dx \end{array}$$

Per il teo. prec. basta dim. che $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. sui cpt.

ed in maniera dominata.

La dominazione c'è per ipotesi.

La conv. unif. sui compatti segue dal fatto che $f(t, x)$ è unif. continua sui compatti del tipo

$$\underbrace{[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times [A, B]}$$

$$\subseteq (a, b)$$

— o — o —

Teorema (Derivabilità di integrale improprio parametrico)

Sia $f: (a, b) \times [A, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Supponiamo che

$$\varphi(t) := \int_A^{+\infty} f(t, x) dx \quad \forall t \in (a, b)$$

sia ben definita (cioè Q' int. impr. converge).

Supponiamo inoltre che $f_t(t, x)$ esista continua in $(a, b) \times [A, +\infty)$ e che esista $g: [A, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$|f_t(t, x)| \leq g(x) \quad \forall t \in (a, b) \quad \forall x \geq A$$

(dominazione della derivata)

$$\int_A^{+\infty} g(x) dx < +\infty.$$

Allora φ è derivabile in (a, b) e

$$\varphi'(t) = \int_A^{+\infty} f_t(t, x) dx \quad \forall t \in (a, b)$$



scambio integrale/derivata.

Dim Devo verificare che, per ogni $t_0 \in (a, b)$, vale

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\varphi(t_0+h) - \varphi(t_0)) = \int_A^{+\infty} f_t(t, x) dx$$

cioè che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_A^{+\infty} (f(t_0+h, x) - f(t_0, x)) dx = \int_A^{+\infty} f_t(t, x) dx$$

Posso fare in 2 modi: o ripeto la solita dim. scegliendo il B opportuno, o prendo una qualunque succ. $h_n \rightarrow 0$ e verifico che

$$\frac{f(t_0+h_n, x) - f(t_0, x)}{h_n} \rightarrow f_t(t, x)$$

unif. sui compatti e in maniera dominata.

Ora osservo che

$$\left| \frac{f(t_0+h_n, x) - f(t_0, x)}{h_n} \right| = \left| f_t(t_0 + \overset{\text{misterioso}}{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lagrange nella variabile } t}}{c_n(x)}}, x) \right|$$

Questo da solo garantisce la dominazione.

Inoltre, fissato un intervallo $[A, B]$, abbiamo che

$$|f_t(t_0 + c_n(x), x) - f_t(t_0, x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [A, B]$$

se n è abbastanza grande (segue dal fatto che $|c_n(x)| \leq |h_n|$ e f_t è continua e quindi unif. continua sui compatti)

Ad essere sufficienti, basta la continuità in t di $f_t(t, x)$ unif. sui cpt. rispetto ad x .

— o — o —

Esempio 1

$$\varphi(t) := \int_0^{+\infty} e^{-tx} dx \quad \forall t > 0$$

Volendo $\varphi(t)$ si calcola esplicitamente

$$\varphi(t) = \left[-\frac{1}{t} e^{-tx} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{t}$$

Inoltre in ogni semiretta $[A, +\infty)$ con $A > 0$ siamo nelle ipotesi del teo. di cont. e derivabilit  per integrali impropri. (Domino l'integranda con e^{-Ax} e la sua derivata con $x e^{-Ax}$ e cos  via)

Allora posso usare il teo. di scambio

$$\varphi'(t) = -\frac{1}{t^2} = -\int_0^{+\infty} x e^{-tx} dx$$

Vado avanti

$$\varphi''(t) = \frac{2}{t^3} = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-tx} dx$$

... per induzione otteniamo

$$\varphi^{(n)}(t) = (-1)^n \frac{n!}{t^{n+1}} = (-1)^n \int_0^{+\infty} x^n e^{-tx} dx$$

Ponendo $t=1$ si ottiene

$$n! = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$$

— 0 — 0 —

INTEGRALE DI DIRICHLET

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Road map: pongo

$$F(\lambda) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda x} dx \quad \forall \lambda \geq 0$$

Valgono i seguenti fatti

① F è ben definita $\forall \lambda \geq 0$ (Dirichlet per $\lambda=0$, e converge assolutamente grazie all'esponenziale per $\lambda > 0$)

② F è continua su $[0, +\infty)$

③ F è derivabile in $(0, +\infty)$ e vale

$$F'(\lambda) = -\frac{1}{1+\lambda^2} \quad \forall \lambda > 0$$

④ $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} F(\lambda) = 0$

Da questi fatti segue la tesi.

Dal fatto ② deduco che $F(\lambda) = c - \arctan \lambda \quad \forall \lambda > 0$

Dal fatto ④ deduco che $c = \frac{\pi}{2}$

Dal fatto ① passo al limite per $\lambda \rightarrow 0^+$ e trovo $F(0) = \frac{\pi}{2}$.

— 0 — 0 —