

# INTEGRALI DI FRESNEL

$$\underbrace{\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx}_C = \underbrace{\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx}_S = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

Considero le forme diff.

$$\omega_1 = e^{-x^2+y^2} \cos(2xy) dx + e^{-x^2+y^2} \sin(2xy) dy$$

$$\omega_2 = e^{-x^2+y^2} \sin(2xy) dx - e^{-x^2+y^2} \cos(2xy) dy$$

**Fatto 1**  $\omega_1$  e  $\omega_2$  sono esatte. Verifica per  $\omega_1$

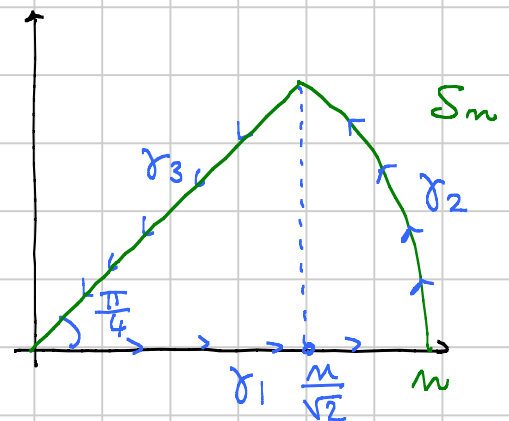
$$+2y e^{-x^2+y^2} \cos(\dots) - e^{-x^2+y^2} 2x \sin(\dots) \quad \text{prima comp } \partial_y$$

$$-2x e^{-x^2+y^2} \sin(\dots) + e^{-x^2+y^2} 2y \cos(\dots) \quad \text{seconda comp } \partial_x$$

Conto analogo per  $\omega_2$  (N.B. chiusa  $\Rightarrow$  esatta perché siamo su  $\mathbb{R}^2$  sempl. connesso)

Integro le 2 forme sul bordo di  $S_n$  orientato antiorario

$$0 = \int_{\partial S_n} \omega_1 = \int_{\partial S_n} \omega_2$$



Calcoliamo gli integrali delle 2 forme sui 3 pezzi

$$\int \omega_2 = 0$$

$$\int_{\gamma_3} \omega_1 = \int_0^{\sqrt[3]{2}} [\cos(2t^2) + \sin(2t^2)] dt$$

$$\uparrow$$
  
 $(t, t)$

Pougo  $\sqrt{2}t = x$

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{2}}$$

$$t=0 \rightsquigarrow x=0$$

$$t = \frac{m}{\sqrt{2}} \leadsto x = m$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi} [\cos(x^2) + \sin(x^2)] dx$$

$$\int_{\gamma_3} \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi} [\sin(x^2) - \cos(x^2)] dx$$

Facciamo finta di sapere che  
quando  $n \rightarrow +\infty$ .

$$\int_{\sigma_2} \omega_1 \rightarrow 0 \quad \int_{\sigma_2} \omega_2 \rightarrow 0$$

Allora si chiude perché

orientazione

$$0 = \int_{\sigma_1} \omega_1 + \int_{\sigma_2} \omega_1 - \int_{\sigma_3} \omega_1 = \int_{\sigma_1} \omega_2 + \int_{\sigma_2} \omega_2 - \int_{\sigma_3} \omega_2$$

$$0 = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \quad 0 \quad - \frac{c+s}{\sqrt{2}} = 0 \quad 0 \quad - \frac{s-c}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Guardando a dx trovo che  $S = C$ .

Usando questa info a sx ottengo

$$\frac{C+S}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} C = \frac{\sqrt{11}}{2} \quad \leadsto \quad C = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{11}{8}}$$

Restano da studiare gli integrali su  $\gamma_2$ .

$$\gamma_2(\theta) = (n \cos \theta, n \sin \theta) \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} \omega_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-n^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)} \cos(n\theta) (-n \sin \theta) d\theta \\ &\quad + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-n^2 \overbrace{(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}^{\cos(2\theta)}} \sin(n\theta) (n \cos \theta) d\theta \end{aligned}$$

Restano due integrali del tipo

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-n^2 \cos(2\theta)} \cdot n \cdot (\text{rota trigonometrica})$$

Alla fine basta dimostrare che

$$n \int_0^{\pi/4} e^{-n^2 \cos(2\theta)} d\theta \rightarrow 0$$

o equiv.  $n \int_0^{\pi/2} e^{-n^2 \cos t} dt \rightarrow 0$

o equiv.  $n \int_0^{\pi/2} e^{-n^2 \sin t} dt \rightarrow 0$

↑ crea pbm. quando  $t \sim 0$

Bisogna analizzarsi separando bene le zone:

$$\begin{aligned} n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dots &= n \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \underbrace{e^{-n^2 \sin t}}_{\leq 1} dt + n \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-n^2 \sin t} dt \\ &\quad \underbrace{n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0}_{\text{zona int}} \quad \underbrace{\leq \frac{\pi}{2} n e^{-n^2 \sin \frac{1}{\sqrt{n}}}}_{\substack{\uparrow \text{zona int} \\ \sim n e^{-\sqrt{n}} \rightarrow 0}} \end{aligned}$$

## Interpretazione

$$\begin{aligned} e^{-z^2} dz &= e^{-(x+iy)^2} (dx+idy) \\ &= e^{-x^2+y^2-2ixy} (dx+idy) \\ &= e^{-x^2+y^2} (\cos(2xy) - i \sin(2xy)) (dx+idy) \end{aligned}$$

Parte reale e immaginaria sono  $w_1$  e  $w_2$ .

**LEMMA** (di oscillazione)

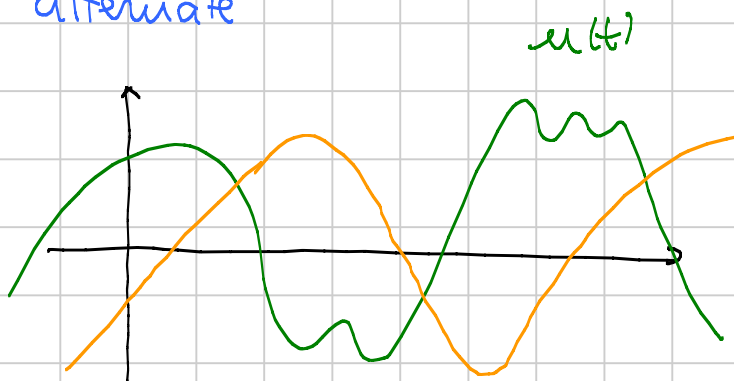
Siano  $u(t)$  e  $v(t)$  due soluzioni linearmente indipendenti dell'eq. diff.

$$u'' + a(t)u' + b(t)u = 0$$

↑                      ↑  
funzioni continue  
senza ipotesi di segno

Allora tra 2 zeri consecutivi della  $u(t)$ , posto che esistono, esiste esattamente uno zero della  $v(t)$ .

Moralmente: si annullano alternate



**Dim** Occorre introdurre il WRONSKIANO

$$W(t) := \det \begin{pmatrix} u(t) & \dot{u}(t) \\ v(t) & \dot{v}(t) \end{pmatrix} = u\dot{v} - \dot{u}v$$

Calcolo la derivata

$$W'(t) = \cancel{\dot{u}\dot{v}} + u\ddot{v} - \cancel{\dot{u}\dot{v}} - \ddot{u}v$$

uso equ.  $\uparrow$

$$= u(-a(t)\dot{v} - \cancel{b(t)v}) - v(-a(t)\dot{u} - \cancel{b(t)u})$$

$$= -a(t)(u\dot{v} - v\dot{u})$$

$$= -a(t)W(t)$$

Allora  $W'(t) = -a(t)W(t)$  da cui

$$W(t) = W(0) e^{-A(t)} \quad \uparrow \text{prim. di } a(t)$$

$\Rightarrow W(t)$  ha segno costante.

Siano  $t_1$  e  $t_2$  due zeri consecutivi di  $u(t)$ .

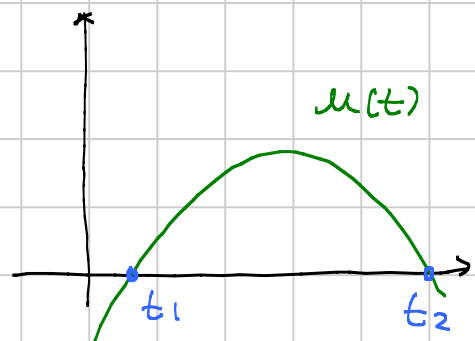
WLOG supponiamo  $u(t) > 0$  su  $(t_1, t_2)$

Guardiamo cosa accade a  $W(t)$

$$W(t) = u\dot{v} - v\dot{u}$$

in  $t_1$ :  $W(t_1) = -v(t_1) \underbrace{\dot{u}(t_1)}_{+}$

in  $t_2$ :  $W(t_2) = -v(t_2) \underbrace{\dot{u}(t_2)}_{-}$



Ora  $W(t)$  non cambia segno, quindi deve cambiare  $v(t)$

(Domanda: perché  $v(t_1)$  e  $v(t_2)$  sono  $\neq 0$ ?)

Questo dimostra che  $v$  si annulla ALMENO una volta in  $(t_1, t_2)$

Se si annullasse più di una volta, invertito il discorso e tra due annullamenti di  $v$  dovrebbe annullarsi  $u$ ,

$$-o -o -$$

Oss. Nessuno impone ad  $u$  di annullarsi.

Esempio

$$\ddot{u} - u = 0$$

ha come sol.  $\sinh t$  e  $\cosh t$

$$-o -o -$$