

Preda - prelatore con autolimitazione

$$\dot{u} = u (a - bu - \varepsilon u)$$

$$\dot{v} = v (-c + du - \delta v)$$

conigli

volpi

classico

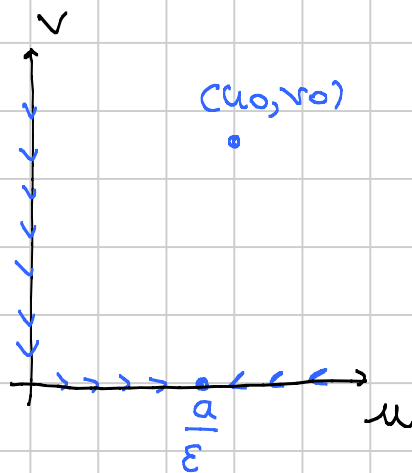
autolimitazione

I conigli da soli avrebbero equ. logistica.

Le volpi da sole si estinguono ancora peggio.

Oltre all'origine ci sono altri p.ti
stazionari

1° equ $\nearrow u=0 \rightarrow v=0$
 $\searrow$ retta $=0 \rightarrow v$ negativo
 $\nearrow v=0$
 $\searrow$ altra retta $=0$



Sia (u_0, v_0) la soluzione del sistema
delle due rette.

Linearizzando (provare per credere) vengono 2 autovalori
negativi $\leadsto (u_0, v_0)$ è asintoticamente stabile.

Metodo energetico: uso

$$E(u, v) := d(u - u_0 \log u) + b(v - v_0 \log v)$$

Proprietà: $\rightarrow$ è convessa nel 1° quadrante

$\rightarrow$ tende a $+\infty$ sui semiasse

$\rightarrow$ ha unico p.to di min. in

$$1 - \frac{u_0}{u} = 0 \quad 1 - \frac{v_0}{v} = 0 \quad \leadsto (u_0, v_0)$$

Calcolo

$$[E(u, v)]' = E_u \dot{u} + E_v \dot{v}$$

$$= d \left(1 - \frac{u_0}{u}\right) u (a - bv - \varepsilon u) + b \left(1 - \frac{v_0}{v}\right) v (-c + du - \delta v)$$

$$= d (u - u_0) (\cancel{a} - b\cancel{v} - \cancel{b}v_0 + b v_0 - \varepsilon u - \cancel{\varepsilon}u_0 + \varepsilon u_0) \\ + b (v - v_0) (\cancel{-c} + d\cancel{u} + \cancel{d}u_0 - d u_0 - \delta \cancel{v} - \delta \cancel{v}_0 + \delta v_0)$$

$$= -db (u - u_0)(v - v_0) - \varepsilon d (u - u_0)^2 \\ + bd (v - v_0)(u - u_0) - \delta b (v - v_0)^2$$

$$= -\varepsilon d (u - u_0)^2 - \delta b (v - v_0)^2 \leq 0$$

Abbiamo dim. che $E(u(t), v(t)) \searrow$

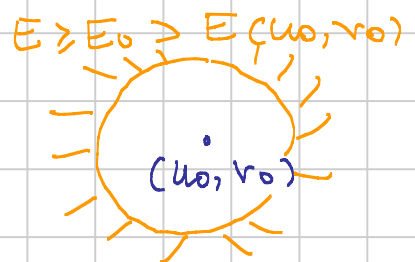
Questo dice per lo meno che $E(u, v) \rightarrow E_0$.

Se dimostro che $E_0 = E(u_0, v_0)$, ho dim. che tutte le soluzioni non nulle tendono a (u_0, v_0) .

Supponiamo per assurdo che $E_0 > E(u_0, v_0)$. Allora (u, v) si mantiene lontano da (u_0, v_0) per ogni $t \geq 0$

Ma allora

$$[E(u, v)]' \leq -m \quad \forall t \geq 0$$



per una opportuna costante $m > 0$. Questo dice che $E \rightarrow -\infty$, il che è assurdo perché è limitata dal basso.

Idea da conservare: per mostrare che $(u(t), v(t)) \rightarrow (u_0, v_0)$ mi invento una funzione $E(u, v)$ con unico min in (u_0, v_0) e faccio vedere che $E(u(t), v(t)) \rightarrow E(u_0, v_0)$.

Due specie in competizione

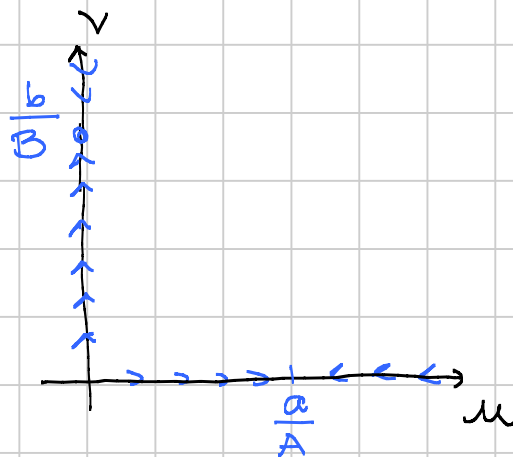
$$\dot{u} = u(a - Au - \alpha v)$$

$$\dot{v} = v(b - Bv - \beta u)$$

Ciascuna specie, da sola, risolve l'eq. Logistica.

I termini di competizione dicono che sono in competizione.

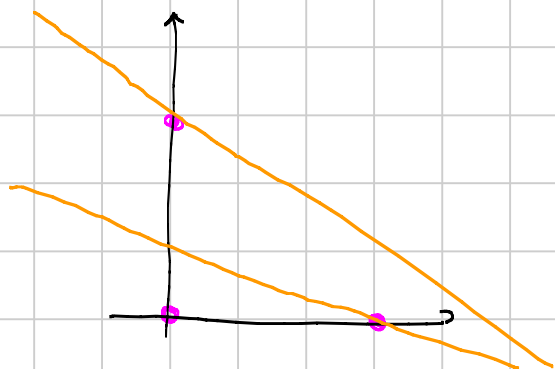
Fatto 1 Se (u_0, v_0) sono positivi, allora le soluz. restano positive nel futuro fino a quando esistono (scatto di orbite o osservare che le equ. sono del tipo $\dot{u} = u \cdot f(t)$ e per questa c'è una formula)



Fatto 2 Se (u_0, v_0) sono positivi, allora c'è esistenza globale nel futuro.

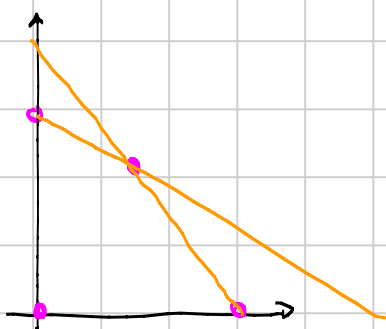
Conoscendo il segno sappiamo che $\dot{u} \leq au$, $\dot{v} \leq bv$
 $\Rightarrow$ No blow up.

Fatto 3 I p.ti stazionari sono 4, di cui 3 già trovati, ed il quarto (u_0, v_0) che viene dal sistema tra le 2 rette

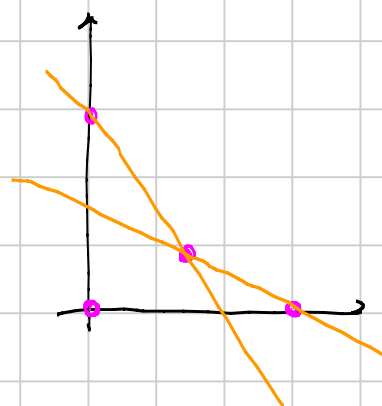


Caso 1

FUORI



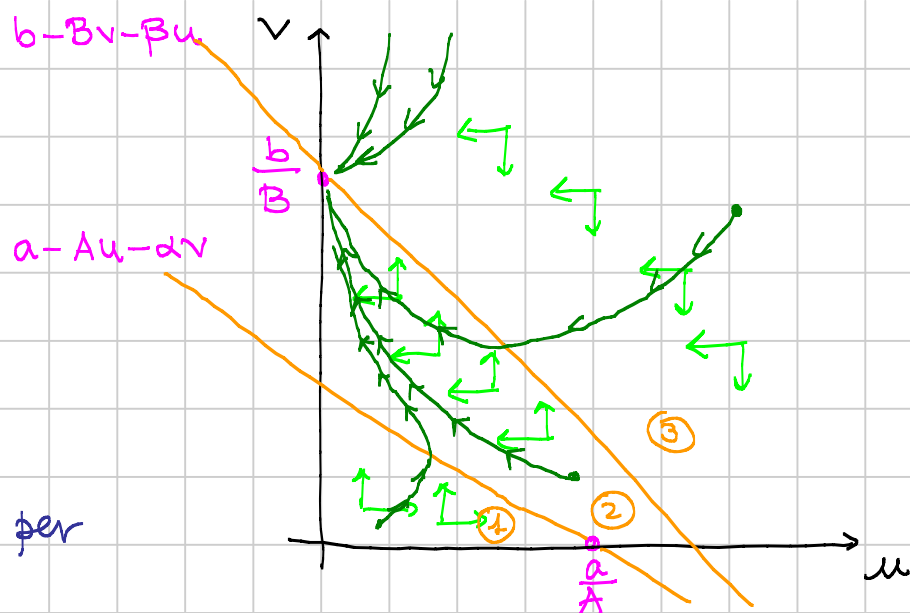
Caso 2



Caso 3

Caso 1

Disegnando le
traiettorie
→ u si estingue
→ resta solo v



Dalla zona ① si entra per
forza nella ②.

Dalla zona ③ posso rimanere o andare nella ②

→ Se resto nella ③, per monotonia $(u(t), v(t)) \rightarrow (u_\infty, v_\infty)$
ma allora $(\dot{u}, \dot{v}) \rightarrow \text{RHS}(u_\infty, v_\infty)$, ma per teo.
asintotico deve essere un pto stazionario e ce n'è
solo uno nella ③.

Quindi ci siamo ridotti alle soluzioni che almeno una
volta nella vita toccano la zona ②.

Dico che la zona ② è invariante: se lo faccio, allora
per lo stesso motivo di sopra le sol. vanno dove devono.

La zona ② è definita da

$$\underbrace{a - Au - \alpha v}_E \leq 0$$

$$b - Bv - \beta u \geq 0$$

Cosa risolve $E(u, v)$?

$$\begin{aligned} [E(u, v)]' &= -A\dot{u} - \alpha\dot{v} \\ &= \underbrace{-Au(a - Au - \alpha v)}_{\downarrow} - \underbrace{\alpha v(b - Bv - \beta u)}_{\leftarrow \text{dove } \gamma(t) \geq 0} \\ &= g(t)E - \gamma(t) \end{aligned}$$

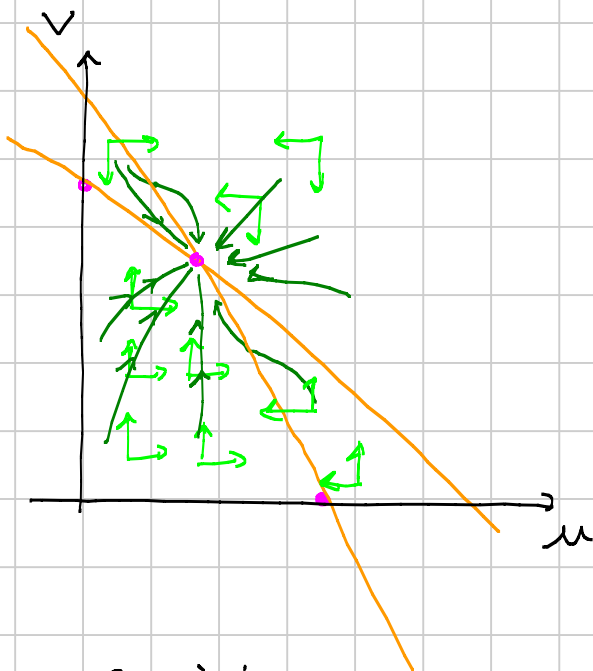
Conseguenza: $E(u(t), v(t))$ risolve

$$E' = g(t)E - \gamma(t)$$

$E \equiv 0$ è una soprasoluzione, quindi non appena $E(t_0) \leq 0$, allora per forza $E(t) \leq 0$ per ogni $t \geq t_0$.

In modo analogo si tratta la restante condizione
— o — o —

I casi 2 e 3 si trattano analogamente



Coesistenza



Estinzione variabile con
sella in mezzo

— o — o —