

Teorema misterioso (di linearizzazione)

Consideriamo un sistema di n eq. diff. in n incognite

$$\dot{U} = F(U) \quad (\text{autonomo})$$

Supponiamo U_0 p.to stationario, cioè $F(U_0) = 0$ (quindi $U(t) \equiv U_0$ è sol. del sistema)

Supponiamo che $JF(U_0)$ (matrice jacobiana) abbia tutti autovalori con parte reale $\neq 0$.

Allora il comportamento delle soluzioni vicino ad U_0 è lo stesso delle soluzioni del sistema linearizzato.

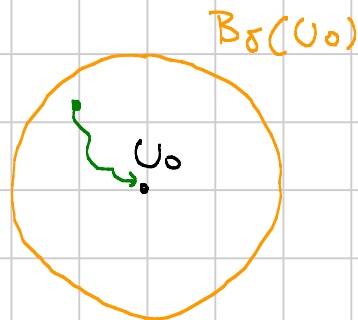
Caso speciale Supponiamo che $JF(U_0)$ sia diagonalizzabile con tutti autovalori negativi

Allora U_0 è asintoticamente stabile, cioè esiste $\delta > 0$ t.c. tutte le soluzioni con dato iniziale $U(0) \in B_\delta(U_0)$ esistono globalmente nel futuro e tendono ad U_0 per $t \rightarrow +\infty$ (e lo fanno pure esponenzialmente).

Dim. Supponiamo che $U_0 = 0$ (altrimenti basta traslare). Poniamo $A = JF(U_0)$. Possiamo riscrivere il sistema nella forma

$$\dot{U} = AU + R(U)$$

↑ dove $\|R(U)\| = o(\|U\|)$ per $U \rightarrow 0$



Siano $-\lambda_1, \dots, -\lambda_n$ gli autovalori di A e sia $m := \min\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} > 0$ (per ipotesi)

Scriviamo $A = M^{-1} D M$ ← cambio di base (invertibile)
↑ diagonale

Consideriamo $E(t) = \|MU(t)\|^2$. Allora

$$E'(t) = 2 \langle MU(t), M\dot{U}(t) \rangle$$

$$= 2 \langle MU(t), M(AU(t) + RU(t)) \rangle$$

$$= 2 \langle MU(t), DMU(t) \rangle + 2 \langle MU(t), MRU(t) \rangle$$

$$\leq -2m \|MU(t)\|^2 + m \|MU(t)\|^2$$

come nel
caso
lineare

↑
se $U(t)$ è abbastanza
piccolo

Nel termine non lineare abbiamo usato che

$$2 \langle MU(t), MR(U(t)) \rangle \leq 2 \|MU(t)\| \cdot \|MRU(t)\|$$

$$\leq 2 \|MU(t)\| \cdot \|M\| \cdot \|R(U(t))\|$$

$$\leq 2 \|MU(t)\| \cdot \|M\| \cdot \varepsilon \|U(t)\|$$

↑ se $U(t)$ è piccolo

$$\leq K \cdot \varepsilon \|MU(t)\|^2$$

↑ costante

✓ ho usato che $\|U(t)\| \leq C \|MU(t)\|$
cosa che posso dim. in 2 modi:

$$\rightarrow \text{Bovinnamente: } \|U(t)\| = \|M^{-1}MU(t)\| \leq \|M^{-1}\| \cdot \|MU(t)\|$$

→ Furbescaamente, osservando che $\|MU\|$ è una norma (☺)
(senza che M è invertibile)

Non mi resta che scegliere ε in modo che $k\varepsilon \leq m$ e prendere il δ di conseguenza.

Conclusione: $E'(t) \leq -m E(t)$,

quindi $E(t) = \|MU(t)\|^2 \rightarrow 0$ esponenzialmente, da cui $\|U(t)\| \rightarrow 0$ esponenzialmente (come equivalenti).

Oss. La dimostrazione mostra anche che le soluzioni che partono in B_δ sono globali. Infatti fino a quando esistono restano in B_δ perché la loro norma diminuisce, e questo esclude B_U e B_D .

Oss. La dim si ricicla nel caso di autovalori tutti positivi (ora la distanza da U_0 può solo aumentare, quindi nessuna soluzione non costante tende ad U_0). Si ricicla anche facilmente nel caso di blocchi di Jordan da 1 oppure da 2 corrispondenti a autov. complessi coniugati con parte reale negativa (il conto $\langle MU, DMU \rangle \leq -m \|U\|^2$ vale anche per queste matrici)

Per adattarla a blocchi qualunque (sempre con parti reali neg.) occorre cambiare i pesi sulle varie componenti.

Morale: il caso "hard" del teo. di linearizzazione è quando c'è una sella (un po' di parti reali + e un po' -).

Esempio 1 $\ddot{u} = -\sin u$

vediamola come sistema $\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -\sin u \end{cases}$

Il p.to $(0,0)$ è stazionario. Linearizzando trovo

$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -u \end{cases} \leadsto$ matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \leadsto$ autovalori $\pm i$

$\leadsto$ il teo. di linearizzazione NON si applica, né potevamo sperarlo, perché sappiamo che le traiettorie vicine all'origine sono periodiche

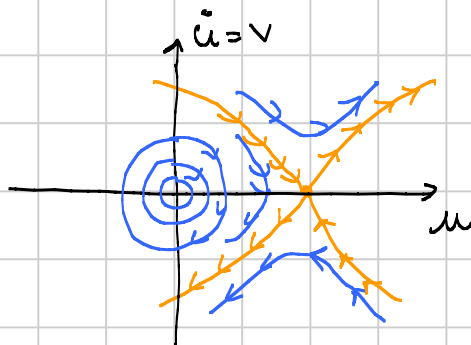
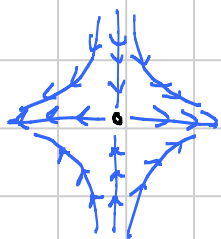


Anche il p.to $(\pi, 0)$ è stazionario. Il linearizzato diventa

$u = \pi + R$ $\dot{u} = v$ $R = k$
 $v = 0 + k$ $\dot{v} = -\sin u$ $\dot{k} = -\sin(\pi + R) = \sin R \sim R$

$\leadsto$ matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \leadsto$ autovalori ± 1

$\leadsto$ teo. Lin. si applica e dice che $(\pi, 0)$ è una sella



Esempio 2 (Pendolo con attrito)

$$\ddot{u} + \dot{u} = -\sin u$$

↑
si oppone al moto

Passando al sistema

$$\dot{u} = v$$

$$\dot{v} = -v - \sin u$$

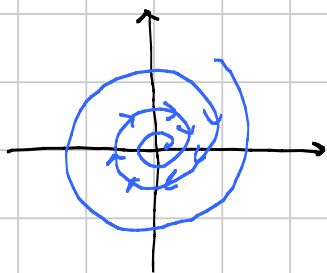
L'origine $(0,0)$ è ancora stazionaria e il linearizzato è

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -v - u \end{cases} \quad \text{matrice} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\leadsto \text{pol. car.} \quad x^2 + x + 1 = 0 \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$\leadsto$ autov. compl. coniugati con parte reale negativa

$\leadsto$ teo. di lin. si applica e le traiettorie tendono esponenzialmente all'origine (spiraleggiando)



Se esagero con il coeff

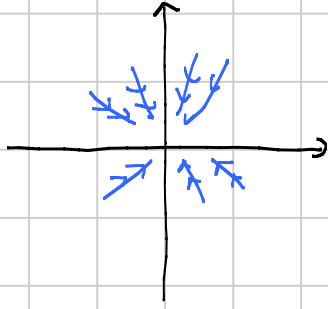
$$\ddot{u} + 10 \arctan u \dot{u} = -\sin u$$

$$\dot{u} = v$$

$$\dot{v} = -10 \arctan v - \sin u \approx -10v - u$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -10 \end{pmatrix} \leadsto x^2 + 10x + 1 \leadsto \text{autovalori reali negativi}$$

→ teo. Liu. si applica e otteniamo un nodo stabile
(senza spiraleggiamento)



↓
il pendolo "non torna
mai su"

Oss. In questo caso abbiamo dim. che le soluzioni che partono vicino a $(0,0)$ tendono all'origine. Quanto vicine purtroppo non lo sappiamo con questo metodo.

Esistono sol. che non tendono all'origine?

Certo! Quelle stazionarie $(k\pi, 0)$.

Ne esistono anche di non costanti che tendono a $(\pi, 0)$.

Basta dim. che il linearizzato in $(\pi, 0)$ continua a produrre una sella

— o — o —