

Sistemi lineari omogenei in dimensione qualunque

$$\dot{U} = AU$$

Sostanzialmente non cambia nulla: si passa in forma di Jordan, e lì si risolve.

Potenziali complicazioni tecniche:

- blocchi di Jordan di dimensione alta (questi producono soluzioni con $te^{\lambda t}$, $t^2 e^{\lambda t}$, ...)
- blocchi di Jordan corrispondenti a radici complesse coniugate (con un po' di pazienza si trattano)

Teorema (analogo alla dim. 2) L'origine è

- asint. stabile $\Leftrightarrow$ tutti gli autovalori hanno parte reale < 0
- stabile $\Leftrightarrow$ tutti gli autovalori hanno parte reale ≤ 0 e quelli che ce l'hanno $= 0$ hanno blocchi di Jordan "senza gli 1".

Stabilità e metodo energetico

Esempio $\begin{cases} \dot{u} = -\lambda u \\ \dot{v} = -\mu v \end{cases}$ con $\lambda > 0$ e $\mu > 0$

Pongo $E(t) := u^2 + v^2$. Allora $E'(t) = 2u\dot{u} + 2v\dot{v}$
 $= -2\lambda u^2 - 2\mu v^2$
 $(*) \leq -2 \min\{\lambda, \mu\} (u^2 + v^2)$
 $= -2 \min E(t)$

Abbiamo ottenuto che $E'(t) \leq -2m E(t)$, da cui

$$E(t) \leq E(0) e^{-2mt}$$

Questo dimostra che $E(t) \rightarrow 0$ esponenzialmente

Il passaggio (*) è equivalente a dire che

$$2\lambda u^2 + 2\mu v^2 \geq 2 \min\{\lambda, \mu\} (u^2 + v^2)$$

Esempio 2 $\begin{aligned} \dot{u} &= -\alpha u + \beta v \\ \dot{v} &= -\beta u - \alpha v \end{aligned} \quad \text{con } \alpha > 0$

$$E(t) = u^2 + v^2 ;$$

$$\begin{aligned} E'(t) &= 2u\dot{u} + 2v\dot{v} = 2u(-\alpha u + \beta v) + 2v(-\beta u - \alpha v) \\ &= -2\alpha u^2 - 2\alpha v^2 \\ &= -2\alpha E(t) \end{aligned}$$

$$E(t) = E(0) \cdot e^{-2\alpha t}$$

Se $\alpha > 0$ l'energia tende a 0 esponenzialmente

Se $\alpha < 0$ " " " " $+\infty$ "

Esempio 3 $\begin{aligned} \dot{u} &= -\lambda u + v \\ \dot{v} &= -\lambda v \end{aligned} \quad \lambda > 0$

Enistica: cerco una energia del tipo

$$E(t) = \alpha u^2 + v^2$$

↑ parametro da scegliere

Derivando:
$$\begin{aligned} E'(t) &= 2au\dot{u} + 2v\dot{v} \\ &= 2au(-\lambda u + v) + 2v(-\lambda v) \\ &= -2\lambda au^2 + 2auv - 2\lambda v^2 \\ &\leq -\varepsilon E(t) \end{aligned}$$

spero $\nearrow$

Se ci riesco, allora $E(t) \leq E(0)e^{-\varepsilon t}$ e questo basta per avere che $E(t) \rightarrow 0$ esponenzialmente.

Speranza ok $\Leftrightarrow 2\lambda au^2 - 2auv + 2\lambda v^2 \geq \varepsilon E(t)$
 $= \varepsilon au^2 + \varepsilon v^2$

$$\Leftrightarrow (2\lambda a - \varepsilon a)u^2 - 2auv + (2\lambda - \varepsilon)v^2 \geq 0$$

Quindi tutto va bene se la forma quadratica è definita positiva.

$$\begin{pmatrix} 2\lambda a - \varepsilon a & -a \\ -a & 2\lambda - \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$a(2\lambda - \varepsilon) > 0 \quad \leadsto \quad a > 0, \varepsilon \text{ piccolo}$$

$$2\lambda - \varepsilon > 0 \quad \leadsto \quad \varepsilon \text{ piccolo}$$

$$a(2\lambda - \varepsilon)^2 - a^2 > 0 \quad \leadsto \quad (2\lambda - \varepsilon)^2 > a$$

Una possibile scelta è $\varepsilon = \lambda$ e $a = \frac{\lambda^2}{2}$

Rigoroso: considero $E(t) := \frac{\lambda^2}{2}u^2 + v^2$. Verifico che

$$E'(t) \leq -\lambda E(t)$$

Deduco che $E(t) \leq E(0)e^{-\lambda t}$, quindi $E(t) \rightarrow 0$,
 quindi $u(t) \rightarrow 0$ e $v(t) \rightarrow 0$.

Dimostrazione in generale che, quando A ha tutti autovalori negativi ed è diagonalizzabile, allora l'origine è asintoticamente stabile

Ipotesi: $M A M^{-1} = D$
 $\uparrow$ matrice diagonale con autovalori negativi
 $-\lambda_1, \dots, -\lambda_n$

$$E(t) := \|M U(t)\|^2$$

$$E'(t) = 2 \langle M U(t), M \dot{U}(t) \rangle$$

$$= 2 \langle M U(t), M A U(t) \rangle \quad A = M^{-1} D M$$

$$= 2 \langle M U(t), D M U(t) \rangle$$

$$(*) \leq -2m \|M U(t)\|^2 \quad \text{dove } m = \min \{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \}$$

$$= -2m E(t)$$

$$\leadsto E(t) \leq E(0) e^{-2mt} \quad \leadsto E(t) \rightarrow 0 \text{ espon.}$$

$$\leadsto M U(t) \rightarrow 0 \quad \leadsto U(t) \rightarrow 0$$

$\uparrow$
applico M^{-1} a dx e sx

(*)

Se D è la matrice diagonale con $-\lambda_1, \dots, -\lambda_n$ sulla diag. allora

$$\langle v, D v \rangle \leq -m \|v\|^2 \quad \text{per ogni vettore } v$$

$$-\lambda_1 v_1^2 - \dots - \lambda_n v_n^2 \leq -m (v_1^2 + \dots + v_n^2)$$

Cambiando i segni è ovvio.

Se la matrice A ha tutti autov. con parte reale neg., ma senza blocchi di Jordan con gli 1, la dim. è la stessa. Occorre solo verificare come agisce sulla forma il blocco di Jordan reale $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, cosa vista nell'esempio 2.

Se ci sono i blocchi con gli uno, le cose si complicano, e bisogna pesare diversamente le varie componenti come nell'esempio 3.

— o — o —

Esempio
$$\begin{cases} \dot{u} = \arctan u - \sin v \\ \dot{v} = -\sin u (u+3v) + \sin(5v) \end{cases}$$

L'origine è un p.to stazionario, cioè $u(t) \equiv 0$ $v(t) \equiv 0$ è soluzione.

Cosa succede se punto vicino all'origine.

Sviluppo fatto

$$\dot{u} = u - v$$

$$\dot{v} = -u - 3v + 5v = -u + 2v$$

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\text{tr } A = 3$$

$$\det A = 1$$

Autovalori ++

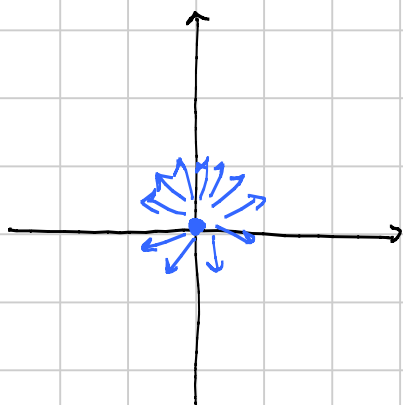
"Quindici" è come fosse

$$\dot{u} = \lambda u$$

$$\dot{v} = \mu v$$

con $\lambda, \mu > 0$

$\leadsto$ fuoco repulsivo



Chi autorizza questo: il teorema di linearizzazione !!