

SISTEMI LINEARI OMOGENEI

$$\dot{U} = A U$$

$\uparrow$ matrice $n \times n$ di numeri

Osservazione L'origine è un p.to stazionario, cioè

$$U(t) \equiv 0$$

è una soluzione del sistema.

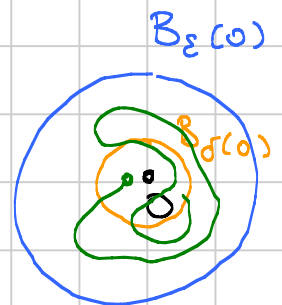
Problema della stabilità:

- se p.to vicino all'origine, resto $\forall t \geq 0$ SEMPRE vicino all'origine?
 $\uparrow$ se fosse solo per $t \in [0, T]$ la risp. sarebbe dip. cont. dal dato iniziale
- se p.to vicino all'origine, tende all'origine per $t \rightarrow +\infty$?

Def. L'origine si dice

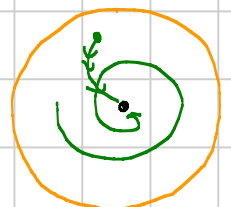
STABILE se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c.

$$\|U(0)\| \leq \delta \Rightarrow \|U(t)\| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq 0$$



ASINTOTICAMENTE STABILE se $\exists \delta > 0$ t.c.

$$\|U(0)\| \leq \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|U(t)\| = 0$$



Oss. Asintoticamente stabile $\Rightarrow$ stabile, ma non viceversa

Oss. Le stesse def. si possono dare per sistemi NON lineari, e per p.ti stazionari diversi dall'origine.

Rappresentazione nello spazio delle fasi: pensare la traiettoria $U(t)$ come curva a valori in $\mathbb{R}^n$

Caso di sistemi lin. omogenei 2×2 a coeff. costanti

$$\begin{cases} \dot{u} = au + bv \\ \dot{v} = cu + dv \end{cases}$$

$$\dot{U} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_A U$$

Idea: con un cambio di variabili lineare, si può portare A in forma canonica.

Per una matrice 2×2 , ci sono 3 possibili forme canoniche

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

λ, μ reali, anche coincidenti

①

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

autovalori $\alpha \pm i\beta$

②

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

λ reale

③

Caso 1 È come risolvere $\begin{cases} \dot{u} = \lambda u \\ \dot{v} = \mu v \end{cases}$ $u(t) = u_0 e^{\lambda t}$
 $v(t) = v_0 e^{\mu t}$

Come sono fatte le traiettorie?

- Se $\lambda < 0$ e $\mu < 0$, allora $u(t) \rightarrow 0$ e $v(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty \Rightarrow$ asintotica stabilità
- Se $\lambda > 0$ oppure $\mu > 0$, allora almeno una delle 2

tende a $\pm \infty$, a seconda del segno del coeff., dunque addio stabilità

- Se $\lambda \leq 0$ e $\mu \leq 0$, allora per lo meno c'è stabilità, ma magari non asintotica se almeno uno dei 2 è 0.

Volevo disegnare le traiettorie

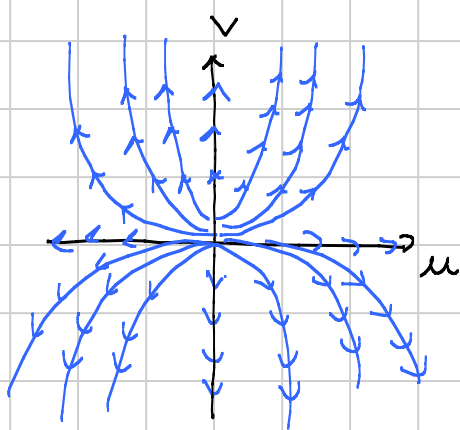
$$u(t) = u_0 e^{\lambda t}$$

$$v(t) = v_0 e^{\mu t}$$

Osservo che (wlog assumo $u_0 > 0$ e $v_0 > 0$) vale

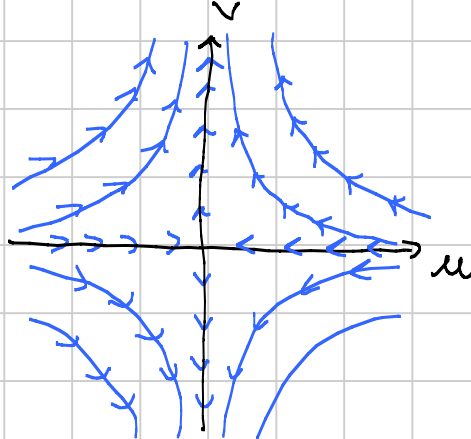
$$v(t) = \text{cost.} \cdot [u(t)]^{\frac{\mu}{\lambda}}$$

Il disegno dipende dal segno di $\frac{\mu}{\lambda}$.



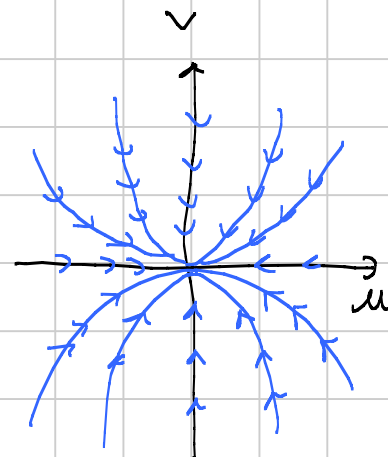
$\lambda > 0 \quad \mu > 0$

NODO INSTABILE
REPULSIVO



$\lambda < 0 \quad \mu > 0$

SELLA

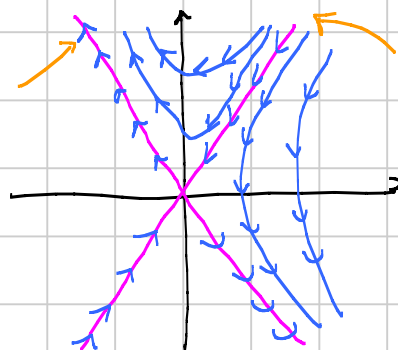


$\lambda < 0 \quad \mu < 0$

NODO STABILE
ATTRATTIVO

Nelle variabili originali, la figura è "storta"

Direzione autovett.
con autoval.
positivo



Direzione autovettore
con autovalore neg

Caso 2

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \alpha u + \beta v \\ \dot{v} &= -\beta u + \alpha v\end{aligned}$$

Potei trasformarlo in eq. di evolue 2, ma è più comodo passare in coord. polari

$$u(t) = \rho(t) \cos \theta(t)$$

$$v(t) = \rho(t) \sin \theta(t)$$

$$\dot{u} = \dot{\rho} \cos \theta - \rho \sin \theta \dot{\theta}$$

$$\dot{v} = \dot{\rho} \sin \theta + \rho \cos \theta \dot{\theta}$$

Sostituisco nell'equazione

$$\begin{cases} \dot{\rho} \cos \theta - \rho \sin \theta \dot{\theta} = \alpha \rho \cos \theta + \beta \rho \sin \theta \\ \dot{\rho} \sin \theta + \rho \cos \theta \dot{\theta} = -\beta \rho \cos \theta + \alpha \rho \sin \theta \end{cases}$$

$$1^a. \cos \theta + 2^a. \sin \theta$$

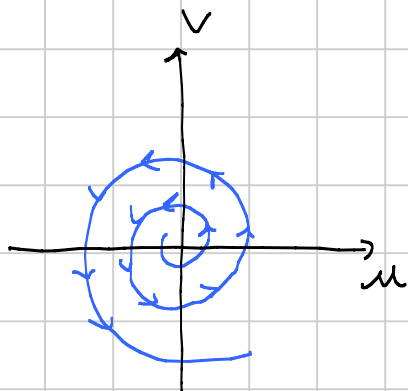
$$\dot{\rho} = \alpha \rho$$

$$\leadsto \rho(t) = \rho(0) e^{\alpha t}$$

$$1^a. (-\sin \theta) + 2^a. \cos \theta$$

$$\dot{\theta} = -\beta \leadsto \theta(t) = \theta(0) - \beta t$$

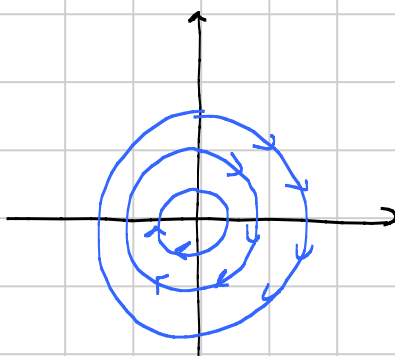
- Se $\alpha > 0$ le soluzioni spiraleggiano uscente
- Se $\alpha < 0$ " " " " entrante
- Se $\alpha = 0$ le traiettorie sono circonferenze



$$\alpha > 0, \beta < 0$$

FUOCO REPULSIVO

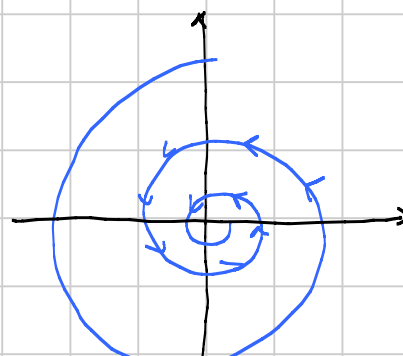
NO STABILE



$$\alpha = 0, \beta > 0$$

CENTRO

STABILE, NO A.S.



$$\alpha < 0, \beta < 0$$

FUOCO ATTRATTIVO

ASINT. STABILE

Caso 3

$$\dot{u} = \lambda u + v$$

$$\dot{v} = \lambda v$$

$$\leadsto v(t) = v_0 e^{\lambda t}$$

$$\leadsto \dot{u} = \lambda u + v_0 e^{\lambda t} \quad \leadsto u(t) = u_0 e^{\lambda t} + a t e^{\lambda t}$$

↑
si determina
esplicitamente in
funzione di v_0

• Se $\lambda > 0 \leadsto$ le soluzioni tendono a $\pm \infty$ a seconda dei coeff. $\leadsto$ addio stabilità

• Se $\lambda < 0 \leadsto$ le soluzioni tendono a 0
 $\leadsto$ asintotica stabilità

• Se $\lambda = 0 \leadsto \begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = 0 \end{cases} \leadsto v(t) \equiv v_0 \quad u(t) = u_0 + v_0 t$

$\leadsto u(t) \rightarrow \pm \infty \leadsto$ addio stabilità

Il disegno è simile a quello del fuoco.

Teorema Nel caso 2×2 l'origine è

• asintoticamente stabile $\Leftrightarrow$ tutti gli autovalori hanno parte reale < 0

• stabile $\Leftrightarrow$ tutti gli autovalori hanno parte reale ≤ 0 ,
ma se 0 è autovalore deve avere
mult. alg. = mult. geom
(non ci deve essere il blocco di jordan da 2)

— 0 — 0 —