

SISTEMI DI EQ. DIFF. LINEARI

$$\begin{cases} \dot{u} = 2u + v \\ \dot{v} = 2u + 3v \end{cases}$$

Già visto: sistemi di equ. di ordine qualunque si trasformano in sistemi di equ. di ordine 1 (basta aggiungere variabili) $\leadsto$ tes. esistenza e unicità

In casi semplici è possibile trasformare i sistemi in singole equ. di ordine + alto

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{der. } 1^a}}{\ddot{u}} = 2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso } 2^a}}{\dot{u}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso } 1^a}}{\dot{v}} = 2\dot{u} + 2u + 3v = 2\dot{u} + 2u + 3\dot{u} - 6u$$

$$\ddot{u} - 5\dot{u} + 4u = 0 \leadsto \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Analisi 1}}}{u(t)} = c_1 e^{4t} + c_2 e^t$$

Nota $u(t)$ ricavo $v(t)$ dalla 1^a eq.

$$\begin{aligned} v(t) &= \dot{u}(t) - 2u(t) = 4c_1 e^{4t} + c_2 e^t - 2c_1 e^{4t} - 2c_2 e^t \\ &= 2c_1 e^{4t} - c_2 e^t \end{aligned}$$

In forma vettoriale posso scrivere

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$$

Il sistema si poteva scrivere come

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{U}} = A \vec{U}$$

↑ ↑ ↗
vettore matrice vettore
n dim. n × n n dim.

Gli autovalori della matrice sono

• $\lambda = 4$ con autovettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

• $\lambda = 1$ con autovettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$... verifica...

Fatto generale Dato un sistema di n equ. lin. a coeff. costanti

$$\dot{\vec{U}} = A \vec{U}$$

se la matrice è diagonalizzabile con autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ e rispettivi autovett. lin. ind. $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$, la soluzione generale si scrive come

$$\vec{U}(t) = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n \vec{v}_n e^{\lambda_n t}$$

↑ ↑
costanti libere dipendenti dai
dati iniziali

Dim. di Analisi 1

Prendere i singoli pezzi, derivare e vedere che sono soluzioni.

Poi si verifica che sono lin. indep.

Brutalmente : $\dot{u} = au \rightsquigarrow u(t) = e^{at} u_0$

$$\dot{\vec{U}} = A \vec{U} \rightsquigarrow \vec{U}(t) = e^{At} \vec{U}(0)$$

↑
esponenziale di una
matrice

Esponenziale di una matrice

Data una matrice M quadrata ($n \times n$), poniamo

$$e^M := \overset{\text{identità}}{\uparrow} I + M + \frac{1}{2} M^2 + \frac{1}{3!} M^3 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!}$$

Dim. Per avere una def., basta dimostrare che la serie converge.

L'insieme delle matrici ha una norma

$$\|M\| := \left(\sum_{i,j} M_{i,j}^2 \right)^{1/2}$$

e questa norma lo rende uno spazio completo.
Inoltre

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad (\text{esercizio su C.S.})$$

da cui $\|M^n\| \leq \|M\|^n$ e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{M^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|M\|^n}{n!} = e^{\|M\|}$$

Quindi la serie converge totalmente e quindi converge.

— o — o —

Domande: $\rightarrow$ come lo calcolo
 $\rightarrow$ proprietà

Come calcolo e^A ? Facile se posso diagonalizzare.

Supponiamo che

$$A = M^{-1} D M \quad \begin{array}{l} \text{invertibile} \\ \text{diagonale} \end{array} \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Allora $A^k = M^{-1} D^k M$ e quindi lo stesso vale per le somme parziali della serie che definisce e^A .

Quindi

$$e^A = M^{-1} \cdot e^D \cdot M \quad \begin{array}{l} \text{matrice diagonale} \end{array} \quad \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Procedura: $\rightarrow$ diagonalizzo
 $\rightarrow$ faccio l'esponenziale della diagonale
 $\rightarrow$ torno indietro.

Quando non ho la forma diagonale, almeno ho jordan.

Proprietà Quasi nessuna 😞

$$(1) (e^A)^t = e^{A^t} \quad (\text{trasposto commuta con le potenze})$$

$$(2) \det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$$

$$(3) e^A \cdot e^{-A} = Id \quad (\text{vera perché } A \text{ e } -A \text{ commutano})$$

FALSA $e^{A+B} \underset{\text{NO}}{=} e^A \cdot e^B$

 Vera se A e B commutano

Non è vero che $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
 $= A^2 + AB + BA + B^2$

FALSA Se $A(t)$ è una matrice dipendente da t

$$(e^{A(t)})' \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \uparrow \\ \text{No No}}}{=} e^{A(t)} A'(t)$$

Prop. Se A è una matrice costante, allora

$$(e^{At})' = A e^{At} = e^{At} \cdot A \quad (At \text{ e } A \text{ commutano})$$

Dam.

$$e^{A(t_0+R)} - e^{At_0} = e^{At_0} \cdot e^{AR} - e^{At_0}$$

$\uparrow$
 $At_0 \text{ e } AR \text{ commutano}$

$$= e^{At_0} (e^{AR} - Id)$$

Voglio dividere per R e passare al limite $R \rightarrow 0$

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{R} (e^{AR} - Id)$$

Scrivo gli sviluppi e uso i teoremi di scambio

$$\frac{1}{R} (e^{AR} - Id) = \left(\cancel{Id} + AR + \frac{A^2 R^2}{2!} + \frac{A^3 R^3}{3!} + \dots - \cancel{Id} \right) \frac{1}{R}$$

e questo tende ad A .

Verifichiamo che $e^{At} U_0$ risolve l'equazione $\dot{U} = AU$

$$U(t) = e^{At} U_0 \rightsquigarrow \dot{U}(t) = A e^{At} U_0 = A U(t)$$

Falso: $\dot{U} = A(t) U \Rightarrow U(t) = \exp\left(\int_0^t A(s) ds\right) U_0$

$\uparrow \uparrow$
 No No