

$\ddot{u} = -u^3 \leadsto$ tutte le soluzioni sono periodiche

Esercizio $\ddot{u} = u^3$

Qui non ci sono discorsi che collegano le sol. di $\ddot{u} = -u^3$ a quelle di $\ddot{u} = u^3$ (al 1° ordine ci sono $\dot{u} = u^3$, $\dot{u} = -u^3$)

Metodo energetico: $\ddot{u}\dot{u} = u^3 \dot{u} \leadsto \left(\frac{1}{2}\dot{u}^2\right)' = \left(\frac{1}{4}u^4\right)'$

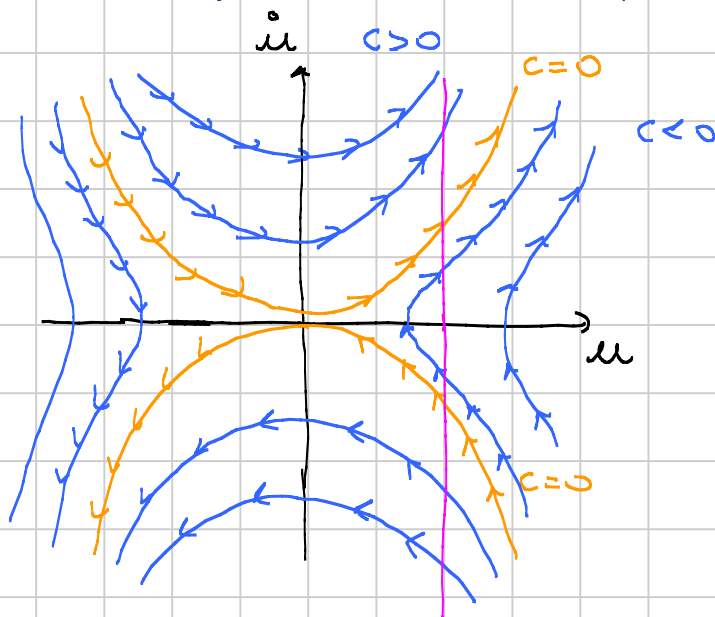
$$\leadsto \left(\frac{1}{2}\dot{u}^2 - \frac{1}{4}u^4\right)' = 0 \leadsto \boxed{\frac{1}{2}\dot{u}^2 = C + \frac{1}{4}u^4}$$

$\leadsto$ le traiettorie stanno sulle curve con questa equ. nello spazio delle fasi

Supponiamo di avere cond. iniziali

$$u(0) = 1, \quad \dot{u}(0) = \alpha$$

Il comportamento dipende da α



$$\text{Intanto } \frac{1}{2}\alpha^2 = C + \frac{1}{4} \leadsto C = \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{4}$$

$$C = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

• Per $\alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}$, dico che c'è blow up in tempo finito (nel futuro) $a \rightarrow \infty$

stanno "sotto"

$$\text{Infatti vale } \dot{u} = -\sqrt{C + \frac{1}{4}u^4} \cdot \sqrt{2}$$

e queste hanno blow up in tempo finito perché è come se fosse $\ddot{u} \sim -u^2$

- Per $\alpha > -\frac{1}{\sqrt{2}}$ le traiettorie hanno blow up in tempo finito nel futuro ($t \rightarrow \infty$)

Occorre distinguere 2 casi

– se $\alpha \geq 0$, allora $\ddot{u} \geq 0$ sempre e quindi

$$\ddot{u} = \sqrt{c + \frac{1}{4}u^4} \cdot \sqrt{2}$$

da cui la conclusione

– se $\alpha \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, basta dim. che in un tempo finito $\ddot{u}$ diventa > 0 .

Infatti sulla traiettoria abbiamo che

$$u(t) \geq \delta > 0$$

e quindi

$$\ddot{u}(t) \geq \delta^3$$

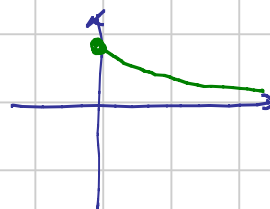
e quindi $\ddot{u}(t)$ deve diventare positiva in tempo finito.

A quel p.to si riparte.

- Nel caso $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ la soluzione esiste globalmente e nel futuro
↑

verifica $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{u}(t) = 0$

Basta fare il conto e viene $c=0$ da cui $\ddot{u} = -\frac{1}{\sqrt{2}}u^2$
e questa volendo si risolve
esplicitamente



Oss. Tutti i discorsi si possono rendere molto più formali

Mettiamoci con $\alpha < -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Da questa otteniamo $c > 0$ e

$$\frac{1}{2} \dot{u}(t)^2 = c + \frac{1}{4} u(t)^4$$

fino a quando la soluzione esiste.

Dico che $\dot{u}(t) < 0$ fino a quando la sol. esiste. Se così non fosse, ci sarebbe per continuità un tempo t_1 tale che $\dot{u}(t_1) = 0$, ma questo non va bene con l'energia.

Una volta che $\dot{u}(t) < 0$, posso ricavare $\ddot{u} = -\sqrt{\dots}$
e diventa di ordine 1.

— o — o —

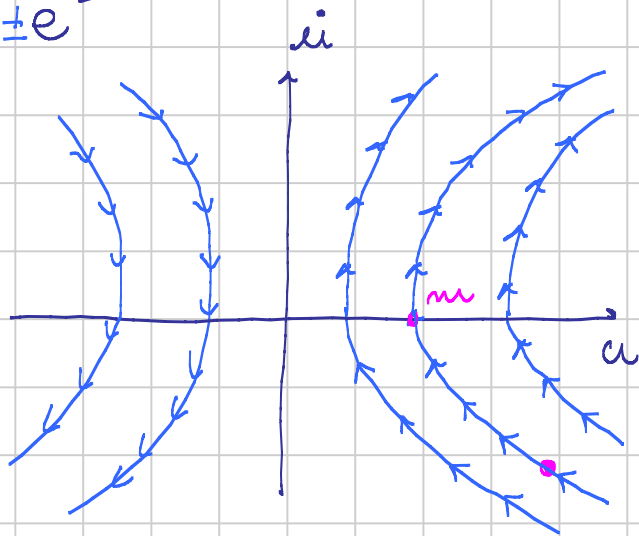
Esercizio 2 $\ddot{u} = \frac{1}{u}$ $u(0) = \alpha \neq 0$ $\dot{u}(0) = \beta$

$$\ddot{u} \dot{u} = \frac{1}{u} \dot{u} \quad \leadsto \quad \frac{1}{2} \dot{u}^2 = c + \log|u|$$

$$\leadsto \dot{u}^2 = c + 2 \log|u| \quad \leadsto \quad \log|u| = \frac{1}{2} \dot{u}^2 - c$$

$$\leadsto u = \pm e^{\frac{1}{2} \dot{u}^2 - c}$$

Sorpresa: se parto con $\alpha \neq 0$,
la soluzione resta sempre
ben lontana da 0, quindi
 niente BD !!!



Si può escludere il BU
osservando che $\frac{1}{u}$ è sublineare nelle zone $u \geq u_0 > 0$
e anche $u \leq -u_0 < 0$

Disegnare la soluzione con $u(0) = 2018$, $\dot{u}(0) = -5$

Questa soluzione è definita globalmente, convessa ($\ddot{u} > 0$) e tende a $+\infty$ per $t \rightarrow \pm\infty$.

Il valore minimo m è e^{-c}
dove c dipende dai dati iniziali

$$c = \frac{25}{2} - \log 2018$$



Ad essere rigorosi dovrei dimostrare che $u(t) \geq m$ fino a quando esiste (se per assurdo ... contraddizione nell'energia).

Quanto cresce u ? Una volta diventata crescente risolve

$$\dot{u} = \sqrt{2} \sqrt{c + \log u}$$

da cui crescita piuttosto lenta (a occhio $\sim t \sqrt{\log t}$:
metodo delle stime iterate)

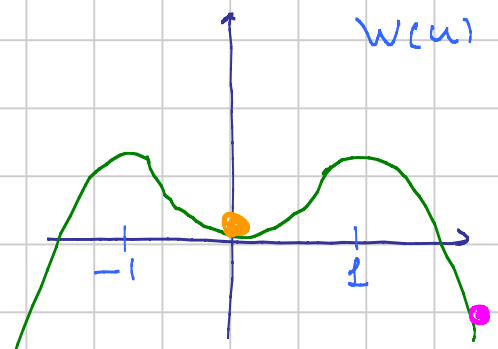
Esempio 3 (Bucca di potenziale)

$$\ddot{u} = -u + u^3$$

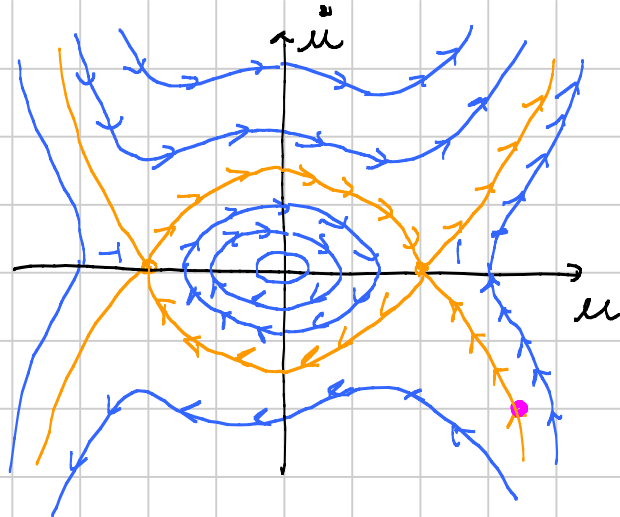
Per u piccoli $\leadsto \ddot{u} = -u \leadsto$ oscill. armonico $\leadsto$ sol. period.
per u grandi $\leadsto \ddot{u} = u^3 \leadsto$ blow up in tempo finito.

$$\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{4} u^4}_{W(u)} = \text{cost.}$$

$$u(0) = 0, \dot{u}(0) = \alpha$$



Disegnando le traiettorie
troviamo la figura a
lato



Esiste $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ calcolabile
esplicitamente tale che

- per $|a| < \alpha_0$ le soluzioni
sono periodiche (e posso anche calcolare
il periodo)
- per $|a| > \alpha_0$ le soluzioni hanno BU sia nel passato,
sia nel futuro, e si comportano come le sol di

$$\dot{u} = \pm \sqrt{c + \frac{1}{4}u^4 - \frac{1}{2}u^2}$$

- Per $a = \pm \alpha_0$ le soluzioni tendono a ± 1 per $t \rightarrow \pm \infty$,
quindi esistono globalmente.