

Equazioni di ordine 2

→ Spazio delle fasi

→ Metodi energetici

$$\text{Setting: } \begin{cases} \ddot{u} = f(t, u, \dot{u}) \\ u(t_0) = u_0 \\ \dot{u}(t_0) = u_1 \end{cases}$$

Teoria: trasformo in sistema di 2 equ. di ordine 1

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v \\ \dot{v} &= f(t, u, v) \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = F(t, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix})$$

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

A questo p.to si applica la teoria generale, ad esempio

$$|f(t, u, v)| \leq A(t) + B(t)|u| + C(t)|v| \Rightarrow \text{esist. glob.}$$

Brutta notizia

$$\ddot{u} = -u$$

$$u_1(t) = \sin t \quad u_1(0) = 0, \quad \dot{u}_1(0) = 1$$

$$u_2(t) = \cos t + 2 \sin t \quad u_2(0) = 1, \quad \dot{u}_2(0) = 2$$

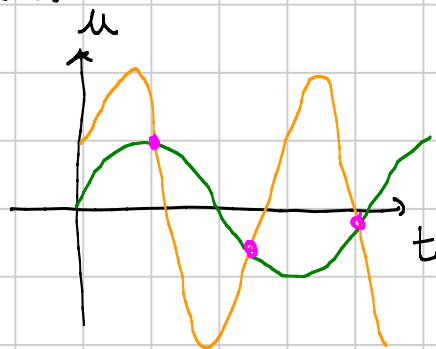
$$u_1(0) < u_2(0), \quad \dot{u}_1(0) < \dot{u}_2(0)$$

Ma non è vero che $u_1(t) < u_2(t)$ per ogni $t \geq 0$
 (la diff. è periodica a media _{nulla}, quindi è sia pos. sia neg.)

ADDIO TEOREMI DI CONFRONTO

Achtung! Il fatto che $u_1(t)$ e $u_2(t)$ si intersecano NON è una violazione di unicità

Basta che si intersechino con derivata diversa!



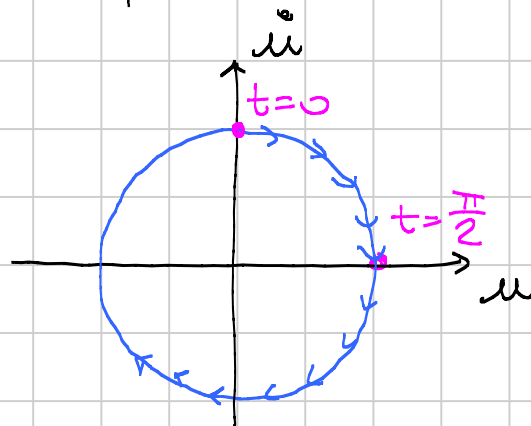
In un certo senso occorre considerare la coppia $(u(t), \dot{u}(t))$.

SPAZIO DELLE FASI

Disegno una soluzione come curva $(u(t), \dot{u}(t))$ nel piano

$$u(t) = \sin t$$

$$\leadsto \text{coppia } (u(t), \dot{u}(t)) = (\sin t, \cos t)$$



Fatto importante

Sotto le hp. che garantiscono unicità, due soluzioni diverse

→ o percorrono lo stesso supporto nello stesso verso

→ o percorrono supporti totalmente disgiunti

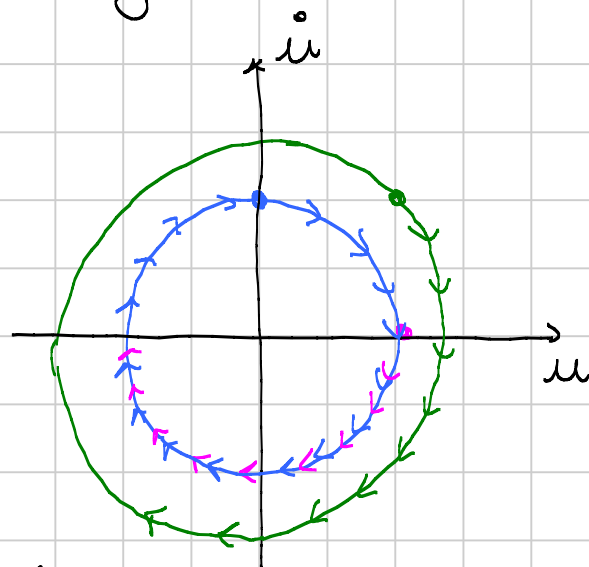
Esempio $\ddot{u} = -u$

$$u(0) = 0, \dot{u}(0) = 1 \leadsto u(t) = \sin t$$

$$u(0) = 1, \dot{u}(0) = 0 \leadsto u(t) = \cos t$$

$$\leadsto (u, \dot{u}) = (\cos t, -\sin t)$$

$$u(0) = 1, \dot{u}(0) = 1 \leadsto u(t) = \sin t + \cos t$$



METODO ENERGETICO

Funziona bene per equazioni del tipo

$$\ddot{u} = f(u)$$

Esempio $\ddot{u} = -u$

Moltiplico a dx e sx per $\dot{u}$:

$$\ddot{u} \dot{u} = -u \dot{u}$$

$$\left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 \right)' = \left(-\frac{1}{2} u^2 \right)'$$

$$\left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{2} u^2 \right)' = 0 \quad \leadsto \quad \underbrace{\frac{1}{2} \dot{u}(t)^2 + \frac{1}{2} u(t)^2}_{E(t) = \text{energia}} = \text{cost}$$

$$\leadsto \dot{u}(t)^2 + u(t)^2 = 2E(0)$$

Le traiettorie nello spazio delle fasi stanno su una circonferenza il cui raggio dipende dalle cond. iniziali

(A fisica questa energia si chiama Hamiltoniana, ed è somma di un termine cinetico ed un termine potenziale)

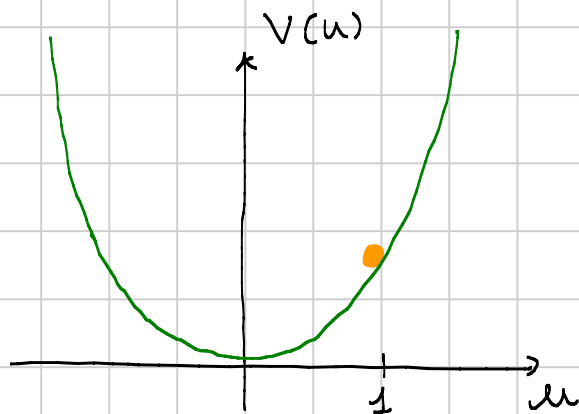
ENERGY LANDSCAPE

Energia potenziale $\frac{1}{2} u^2 = V(u)$

$$u(0) = 1$$

$$\dot{u}(0) = 0$$

Penso ad una pallina
con $u = 1$ e velocità nulla



La pallina oscilla tra le posizioni $u = \pm 1$ periodicamente
l'energia si conserva e si distribuisce tra potenziale e cinetica.

Esempio 2 $\ddot{u} = -u^3$

Niente sublinearità $\Rightarrow$ nessuna garanzia di esistenza globale (potenziale blowup)

Metodo energetico $\ddot{u} \dot{u} = -u^3 \dot{u}$

$$\left(\frac{1}{2} \dot{u}^2\right)' = \left(-\frac{1}{4} u^4\right)' \leadsto \left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{4} u^4\right)' = 0$$

$$\leadsto \underbrace{\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{4} u^4}_{E(t)} = E(0) \text{ costante}$$

$\Rightarrow u(t)$ e $\dot{u}(t)$ sono limitate (esponenti pari), quindi niente blowup $\leadsto$ esistenza globale

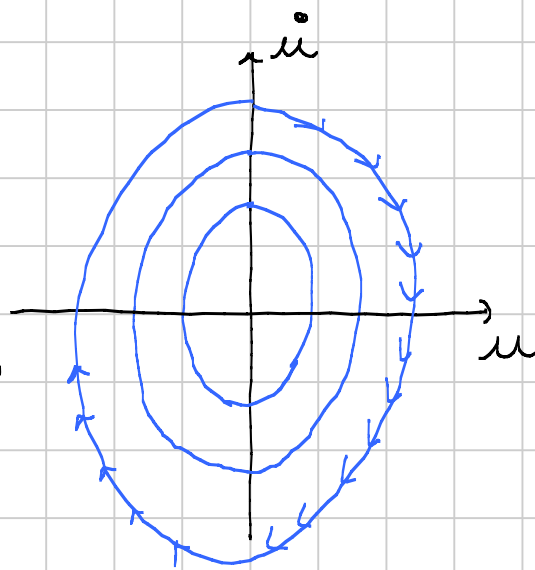
Nello spazio delle fasi le sol. vivono su curve del tipo

$$\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{4} u^4 = E(0)$$

Per determinare il verso:

$$\ddot{u} = -u^3 \leadsto \ddot{u} < 0 \text{ quando } u > 0$$

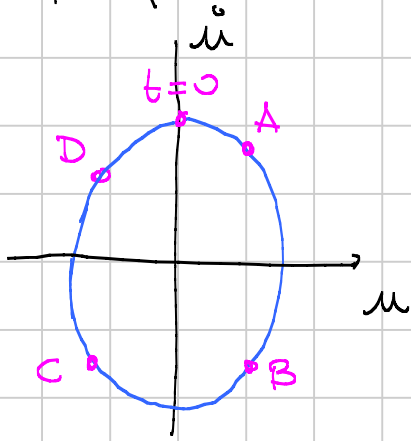
$\leadsto \dot{u}$ scende dove $u > 0$
(e sale dove $u < 0$).



Se la traiettoria ritorna al p.to di partenza, allora per forza è periodica.

Oss. Dal p.to di vista "energy landscape" è lo stesso disegno di prima, solo con $\frac{1}{4} u^4$ come potenziale.

Dimostriamo che la soluzione fa un giro in un tempo finito.

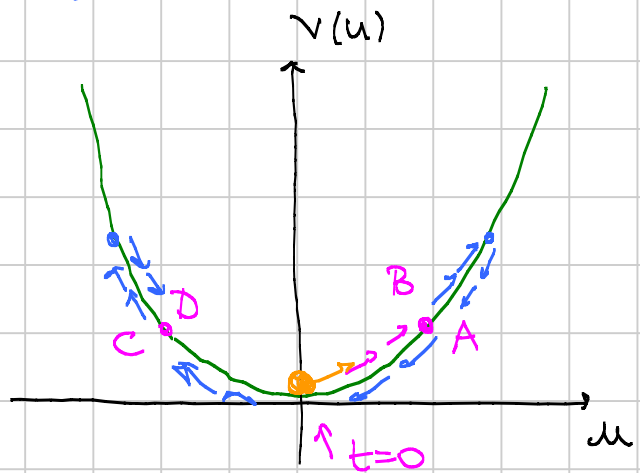
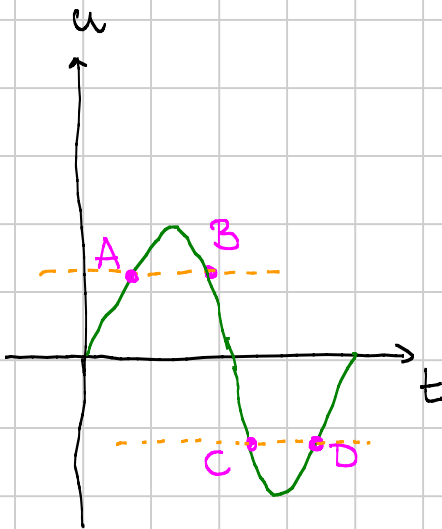


Per andare da A a B basta un tempo finito

(tra A e B abbiamo $u \geq \text{cost.}$, quindi $\ddot{u} = -u^3 \leq -\text{cost.}^3$, quindi $\dot{u}$ in un tempo finito percorre il tratto)

Per andare da B a C basta un tempo finito

(tra B e C abbiamo $\dot{u} \leq \text{cost. neg.}$, quindi u decresce velocemente, quindi in un tempo finito percorre il tratto)



— o — o —