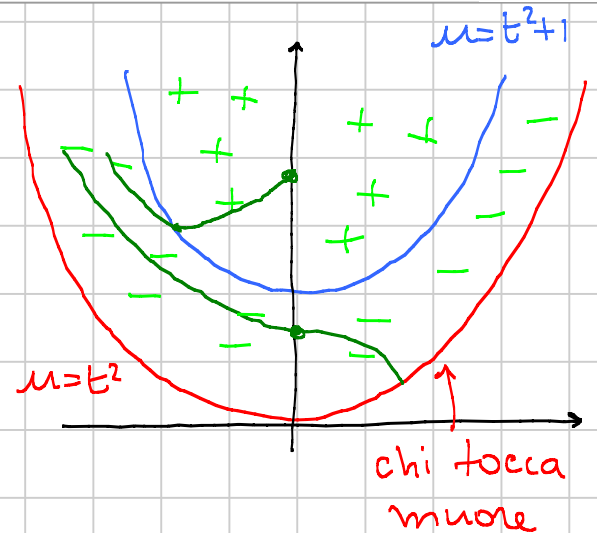


Esercizio 1 $\begin{cases} \dot{u} = \log(u - t^2) \\ u(0) = \alpha > 0 \end{cases}$

Condizioni iniziali saltati

$\alpha \in (0, 1), t \geq 0$ BD per forza

$\alpha \in (0, 1), t \leq 0$ Esistenza globale con



$$t^2 < u(t) < \frac{t^2 + 1}{v(t)} \quad \forall t \leq 0$$

Brutalmente è chiaro.

Rigorosamente

- $v(t) = t^2 + 1$ è sottosol. per $t \leq 0$, quindi sta sopra

$$\dot{v} \stackrel{?}{\leq} \log(v - t^2) \Leftrightarrow +2t \stackrel{?}{\leq} \log 1 = 0 \quad \text{ok per } t \leq 0$$

- $w(t) = t^2 + \varepsilon$ spero che sia soprasolus.

$$\dot{w} \geq \log(w - t^2) \Leftrightarrow 2t \geq \log \varepsilon \quad \text{vera se } t \geq \frac{1}{2} \log \varepsilon$$

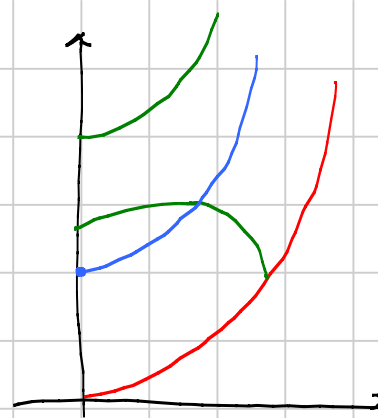
↑
numero molto negativo

Fissato $T < 0$ trovo ε per cui vale per $t \geq T$ e questo mostra che non può toccare il rosso fino a T .

$\alpha \geq 1, t \leq 0$ Tocca, ha un minimo, poi esistenza globale

$\alpha \geq 1, t \geq 0$ Varie opzioni

- blow up (no: $\nexists (t,u) \leq (u)$)
- crescente con esist. glob.
- tocca e BD (questo succede di sicuro: basta partire su $u = t^2 + 1$)



$$u' = \log(u - t^2) \leq \log u$$

Subesercizio Quanto crescono le soluzioni di $u' = \log u$?

Risposta: crescono come $t \log t$!! (per $t \rightarrow +\infty$)

Metodo delle stime iterate

- Crescono meno che esponenzialmente, cioè $\underbrace{Ae^t}_{\text{suprasoluz.}}$ è

$$v' \geq \log v \Leftrightarrow Ae^t \geq \log(Ae^t) = \log A + t$$

Questa è vera perché $Ae^t \geq A(1+t) \geq A + At \geq \log A + t$
se $A \geq 1$ e $A \geq \log A$

- Ora $u' = \log u \leq \log(Ae^t) = \log A + t$

$\Rightarrow u$ cresce meno di una parabola

$\Rightarrow u(t) \leq At^2 + Bt + C \leq Dt^2$ (almeno per t grandi)

- Ora $u' = \log u \leq \log(Dt^2) = 2\log t + \log D$

da cui $u(t) \leq A + \log t$ (ho fatto la primitiva)

• Ora $u' \leq \log (At \log t) = \log A + \log t + \log (\log t)$

Facendo la primitiva ottengo $u(t) \leq t \log t + \text{resto piccolo}$

Conclusione esercizio iniziale

$u(t)$ cresce meno di $t \log t$, quindi prima o poi tocca t^2 .

Esercizio 2
$$\begin{cases} u' = (u + t^{22}) e^{-u} \\ u(0) = 22 \end{cases}$$

Come cresce la soluzione?

Brutale: u non cresce troppo, quindi tra u e t^{22} comanda t^{22} , quindi è come fosse

$$u' = t^{22} e^{-u} \quad \text{che so integrare}$$

$$e^u du = t^{22} dt \quad e^u = \frac{1}{23} t^{23} + C$$

$$u(t) \sim 23 \log t$$

Rigoroso: da una parte è facile

$$u' \geq t^{22} e^{-u} \leadsto \text{risolvo e ho una sottosoluzione che cresce come } 23 \log t$$

Dall'alto dico che $u(t) \leq \frac{A+t}{v(t)}$

Spero sia soprasolus.

$$v \stackrel{?}{\geq} (v+t^{22}) e^{-v} \quad 1. \geq (A+t+t^{22}) e^{-A} \cdot e^{-t}$$

(conto di analisi 1 che dovrebbe essere vero per A grande)

Volevamo: la succ. $f_n(t) = (n+t+t^{22}) e^{-n} \cdot e^{-t} \rightarrow 0$
unif. in $[0, +\infty)$

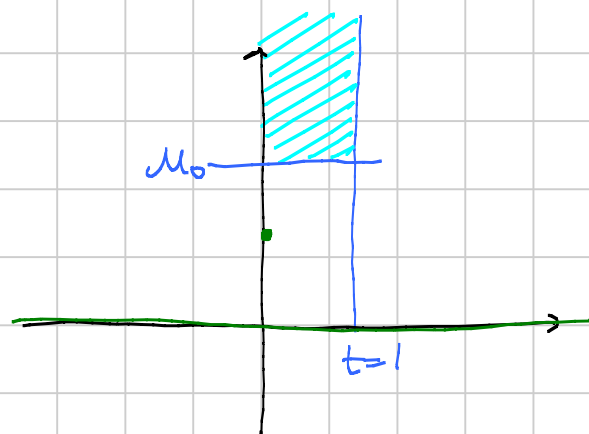
Una volta dimostrato che $u(t) \leq A+t$ ho che

$$u(t) = (u+t^{22}) e^{-u} \leq (A+t+t^{22}) e^{-u}$$

e integrando si ha soprasol. che va come $23 \log t$.

Conclusione: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u(t)}{\log t} = 23.$

Esempio 3
$$\begin{cases} u' = \frac{u^4}{1+t^2+u^2} \\ u(0) = \alpha > 0 \end{cases}$$



$\alpha > 0, t \geq 0$ Blow up?

Esistenza gl. con $u(t) \rightarrow +\infty$?

Esist. gl. con $u(t) \rightarrow l \in \mathbb{R}$?

Solita soggia: i dati per cui c'è BU sono una semi-retta aperta

$$\frac{u^4}{1+t^2+u^2} \geq \frac{u^4}{2+u^2} \geq \frac{1}{4} u^2$$

$\uparrow$ $t \leq 1$ $\uparrow$ $u \geq u_0$

Ora $\dot{v} = \frac{1}{4} v^2$ ha BU prima di $t=1$ se punto in alto,

quindi anche quella data ha BU.

Da qui è la solita storia.

Fatto Esiste $\alpha > 0$ (unico) per cui $u(t) \rightarrow 2018$.

Esistono α per cui il limite è maggiore di 2018.

Esistono α per cui è < 2018

$$\dot{u} = \frac{u^4}{1+t^2+u^2} \leq \frac{2018^4}{1+t^2} \quad \text{vera se } t \geq 0 \text{ e } u \leq 2018$$

Considero il pbm. con dato iniziale $u(T) = 2017$.

Per questo pbm. vale

$$u(t) = u(T) + \int_T^t \dot{u}(s) ds \leq \underset{2017}{u(T)} + 2018^4 \int_T^t \frac{1}{1+s^2} ds$$

$\uparrow$
 vale fino a
 quando $u(t) \leq 2018$

$$\leq 2017 + 2018^4 \int_T^{+\infty} \frac{ds}{1+s^2}$$

Scelgo T in modo che $2018^4 \int_T^{+\infty} \dots \leq 1$ e ho finito.

