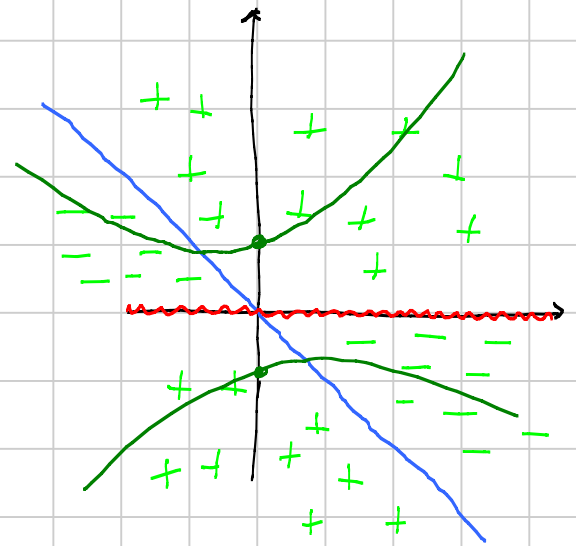


Esempio 1

$$\begin{cases} \ddot{u} = \frac{\arctan(u+t)}{u} \\ u(0) = \alpha \neq 0 \end{cases}$$

Simmetria Se $u(t)$ è sol., allora
 $v(t) := -u(-t)$ è sol.

$$\begin{aligned} \ddot{v}(t) &= \ddot{u}(-t) = \frac{\arctan(u(-t)+(-t))}{u(-t)} \\ &= \frac{\arctan(-v(t)-t)}{-v(t)} = \frac{\arctan(v(t)+t)}{v(t)} \end{aligned}$$



$\alpha > 0, t \geq 0$ Finché vive vale $u(t) \geq \alpha$, quindi

$$0 \leq \ddot{u}(t) \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\alpha} \leadsto \text{esistenza globale}$$

$$\alpha \leq u(t) \leq u(0) + \int_0^t \ddot{u}(s) ds = \alpha + \frac{\pi}{2} \frac{1}{\alpha} t$$

Inoltre $u(t) \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow +\infty$ (se fosse $u \in \mathbb{R} \dots$)

Come tende a $+\infty$? Brutale

$$\ddot{u} = \frac{\arctan(t+u)}{u} \sim \frac{\pi}{2u}$$

$$2u\ddot{u} \sim \pi \quad (u^2)' \sim \pi \quad u^2 \sim \pi t \quad u \sim \sqrt{\pi t}$$

Rigoroso

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u^2(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2u(t)\ddot{u}(t)}{1}$$

$$= 2 \lim_{t \rightarrow \infty} \arctan(u(t)+t) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

$\alpha < 0, t \geq 0$ Cresce fino a toccare la bisettrice.
Da quel punto T in poi vale

$$\underbrace{-t}_{\substack{\uparrow \\ \text{sottosol.}}} \leq u(t) \leq \underbrace{-T}_{\substack{\uparrow \\ \text{soprasol.}}}$$

Esistenza globale con $u(t) \rightarrow -\infty$ per $t \rightarrow +\infty$

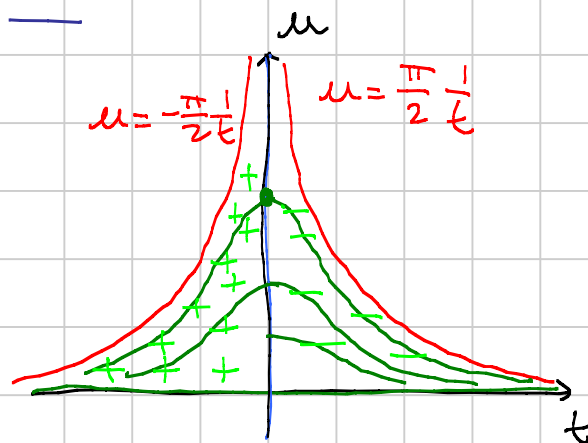
Come va a $-\infty$ è più delicato perché $u+t$ ora è $-\infty + \infty$.

[Hint: $u \rightarrow 0$ comunque, quindi $u(t)+t \rightarrow +\infty$, quindi $\arctan(u+t) \rightarrow \frac{\pi}{2}$, quindi è come sopra]

— o — o —

Esempio 2 $\begin{cases} u' = -\tan(tu) \\ u(0) = \alpha > 0 \end{cases}$

Le soluz. con $\alpha > 0$ e $t \geq 0$
non possono avere BD perché
dovrebbero toccare con "derivata ∞ ",
quindi hanno esistenza globale !!!
Tendono a 0 per $t \rightarrow +\infty$.



Detto meglio, basta trovare una soprasoluzione del tipo

$$v(t) = \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) \frac{1}{t}$$

$$\dot{v}(t) = - \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) \frac{1}{t^2} \stackrel{?}{\geq} -\tan \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right)$$

$$\underbrace{\frac{\pi}{2} - \varepsilon}_{\text{Numero}} \stackrel{?}{\leq} \underbrace{t^2 \tan \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right)}_{\text{Numero}} \quad t \geq t_\varepsilon \rightarrow 0$$

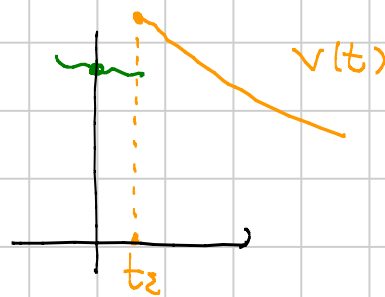
Questa è vera per $t \geq$ qualcosa, che diventa piccolo

a piacere se prendo ε piccolo. Questo mi salva.

Prendo la sol. con dato α . Questa esiste in un intervallo $[0, t_\alpha]$.

Scego $\varepsilon > 0$ abb. piccolo in modo che

$$t_\alpha > t_\varepsilon \quad \text{e} \quad u(t_\alpha) < v(t_\alpha)$$

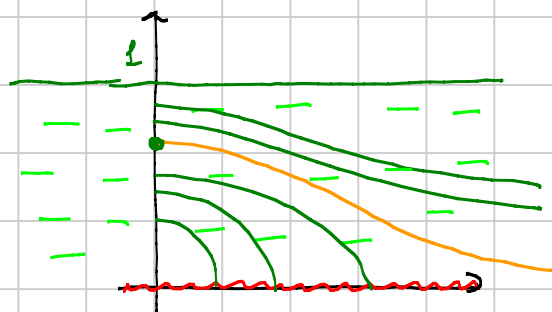


Per $\alpha > 0$ e $t \leq 0$ Discorso analogo (la sol. è pari)

[Se $u(t)$ è sol., anche $v(t) := u(-t)$ è sol. ed ha lo stesso dato iniziale].

Esempio 3
$$u' = \frac{\log u}{1+t^2}$$

$$u(0) = \alpha \in (0, 1)$$



$t \geq 0$ La sol. è monotona decr.
BD o esistenza globale?

Nota bene: tutti i limiti $\alpha \in [0, 1)$ sono compatibili con teo. asintoto.

• Ci sono dei casi di BD

Nel quadrato vale

$$u' = \frac{\log u}{1+t^2} \leq \frac{\log \frac{1}{10}}{2} \leq -1$$

Numero negativo: occhio ai segni



(Più qualitativo: se tende a $-\infty$, in un intorno è ≤ -1)

Questo assicura il BD di quelle che partono in basso.

Più comodamente: $v(t) = \varepsilon - t$ è soprasol. per ε piccolo

$$v \stackrel{?}{\leq} \frac{\log v}{1+t^2}$$

$$-1 \stackrel{?}{\leq} \frac{\log(\varepsilon - t)}{1+t^2}$$

$$\log(\varepsilon - t) \stackrel{?}{\geq} -1 - t^2$$

questa è falsa
quando $\varepsilon - t$ no

• Ci sono casi di esistenza globale con limite $l > 0$

Battezzo $\frac{1}{2}$ e dico che ci sono soluzioni che stanno sempre $\geq \frac{1}{2}$.

Risolvo
$$u' = \frac{\log u}{1+t^2}$$

$$u(T) = \frac{3}{4}$$

Fino a quando $u \geq \frac{1}{2}$ vale $u' \geq \frac{\log \frac{1}{2}}{1+t^2}$

quindi
$$u(t) \geq u(T) + \int_T^t \frac{\log \frac{1}{2}}{1+s^2} ds$$

$$= u(T) - \log 2 \int_T^t \frac{1}{1+s^2} ds$$

$$\geq u(T) - \log 2 \int_T^{+\infty} \frac{1}{1+s^2} ds$$

$$= \frac{3}{4} - \log 2 \int_T^{+\infty} \frac{1}{1+s^2} ds \geq \frac{1}{2}$$

se T è grande,
questo è $\leq \frac{1}{4}$

