

VALORI SOGLIA

L'esempio $\begin{cases} u' = u^2 - \alpha \arctan t \\ u(0) = \alpha \end{cases}$

Cosa accade per $\alpha > 0$ e $t \geq 0$

A sono 3 possibilità

→ blow up in tempo finito

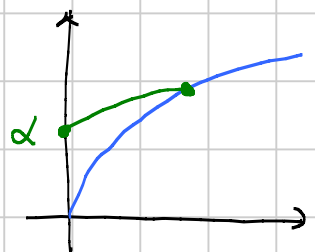
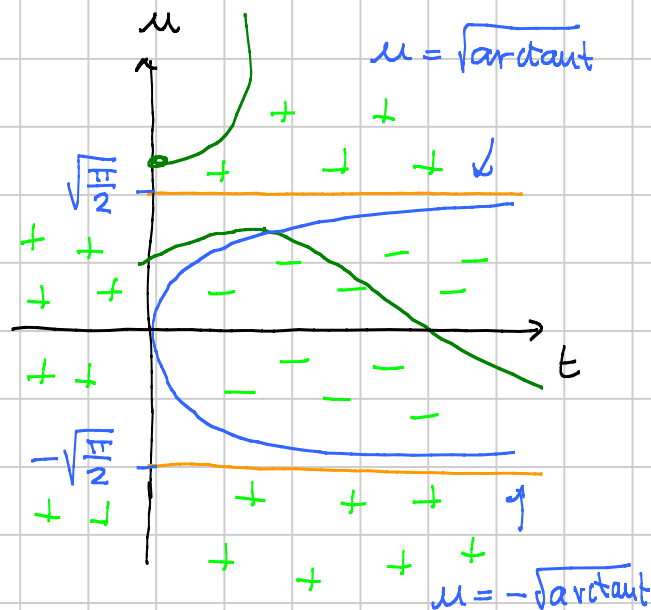
→ esistenza globale monotona cresc.

→ esistenza globale toccando $u = \sqrt{\arctan t}$

Effetto soglia: esiste $\alpha_0 > 0$ tale che

- per $\alpha > \alpha_0$ le sol. hanno blow up
- per $\alpha = \alpha_0$ la sol. esiste glob., è monotona crescente e tende a $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
- per $\alpha \in (0, \alpha_0)$ la sol. esiste glob., tocca e tende a $-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ per $t \rightarrow +\infty$

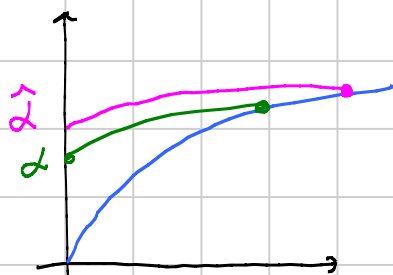
Fatto 1 Esistono sol. con $\alpha > 0$ che toccano
Basta partire sulla curva $u = \sqrt{\arctan t}$ e
"tornare indietro"



Fatto 2 L'insieme degli α per cui la solus tocca è un intervallo aperto.

Questo segue da 3 osservazioni

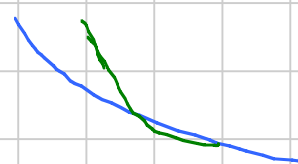
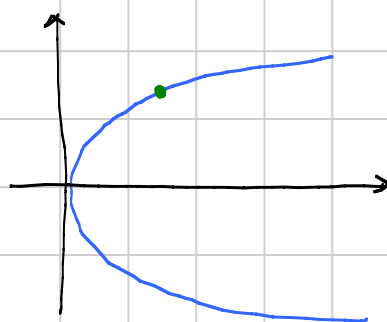
- esistono α per cui non tocca (basta partire sopra $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$)
- se per un certo α tocca, allora tocca per gli α precedenti
- se per un certo α tocca, allora tocca anche per un po' di α più grandi (basta partire da un p.to successivo SULLA CURVA)



FATTO 3 Dopo aver toccato le soluzioni restano tra le 2 curve e tendono decrescendo a $-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Brutalmente:

- non può toccare sopra perché decresce
- non può toccare sotto perché non si può fare con derivata nulla arrivando da sopra



Rigorosamente, basta verificare che

$$v(t) = \sqrt{\arctan t} \quad \text{è soprasolus.}$$

$$w(t) = -\sqrt{\arctan t} \quad \text{è sottosolus.}$$

ovvio perché cresc.
 $\dot{v} \geq 0$ $\uparrow$ RHS dell'eq.

$$\dot{v} \leq 0$$

$\uparrow$ è decrescente

Una volta che sta dentro applico il teo. asintoto.

FATTO 4 Per $\alpha = 10$ la soluzione ha blow up

Intanto resta nella zona $u \geq 10$. In quella zona vale

$$u^2 - \arctan u \geq u^2 - \frac{F}{2} \geq cu^2 \quad \forall u \geq 10$$

$\uparrow$ constante positiva

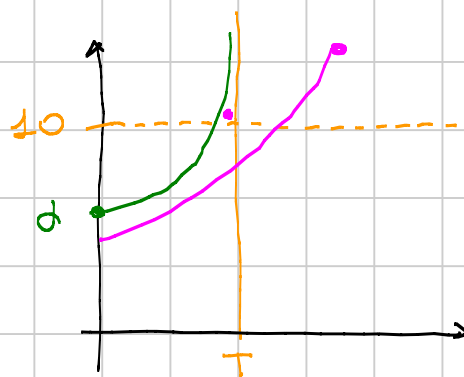
Quindi confronto con le soluz. di $\dot{v} = cv^2$ che hanno BU

FATTO 5 L'insieme degli α per cui la sol. è una semiretta aperta.

Segue da 2 osservazioni

- Se per un certo α ho BO, allora ce l'ho per i succ.
- " " " " " " " " , allora ce l'ho pure per qualche α più piccolo

Basta partire sopra s_0 e a dx della soluz. prec.



Al termine abbiamo

blow up

contacto

Fatto 6) Esiste almeno un do che non sta nelle 2 zone (sono aperte). Cosa può succedere per questo do? NO BU e NO contatto, quindi c'è esistenza globale e monotonia crescente. A quel pto $u(t) \rightarrow l$ e con teo. asint. si vede che $l = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Fatto 7 Supponiamo esistano $\alpha < \beta$ con il comportamento del fatto 6.

Chiamiamo $u_\alpha(t)$ e $u_\beta(t)$ le 2 soluzioni e osserveremo che $u_\beta(t) > u_\alpha(t)$ per ogni $t \geq 0$
Pongo

$$w(t) := u_\beta(t) - u_\alpha(t)$$

Allora

$$w'(t) = u_\beta(t)^2 - u_\alpha(t)^2 \geq 0$$

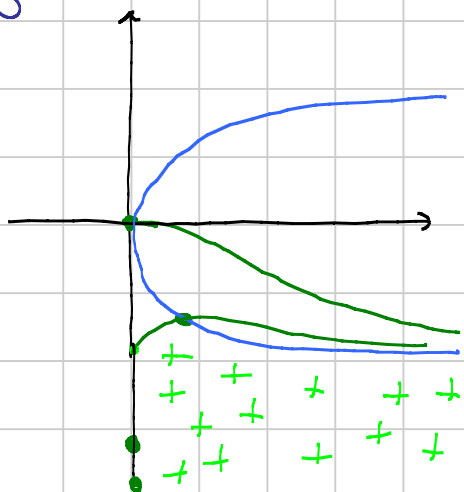
Quindi $w(t)$ è crescente, una parte $\beta - \alpha > 0$ e tende a 0 per $t \rightarrow +\infty$ perché u_α e u_β hanno lo stesso limite.

Fatto 8 Cosa succede per $\alpha < 0$ e $t \geq 0$

Ci sono due opzioni

→ tocca e tende a $-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

→ tende a $-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ da sotto
monotonamente



Dico che toccano tutte. Supponiamo che una certa $u(t)$ non tocchi. Allora

$$u(t) < -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \forall t \geq 0$$

quindi $u(t)^2 \geq \frac{\pi}{2}$, quindi

$$u'(t) = u(t)^2 - \arctan t \geq \frac{\pi}{2} - \arctan t$$

$$= \arctan \frac{1}{t} \sim \frac{1}{t}$$

$$\text{Ma allora} \quad u(t) = u(0) + \int_0^t u'(s) ds \geq u(0) + \int_0^t \arctan \frac{1}{s} ds$$

Facciamo il limite per $t \rightarrow \infty$ trovo che $u(t) \rightarrow \infty$
perché l'int. improprio diverge.

— 0 — 0 —

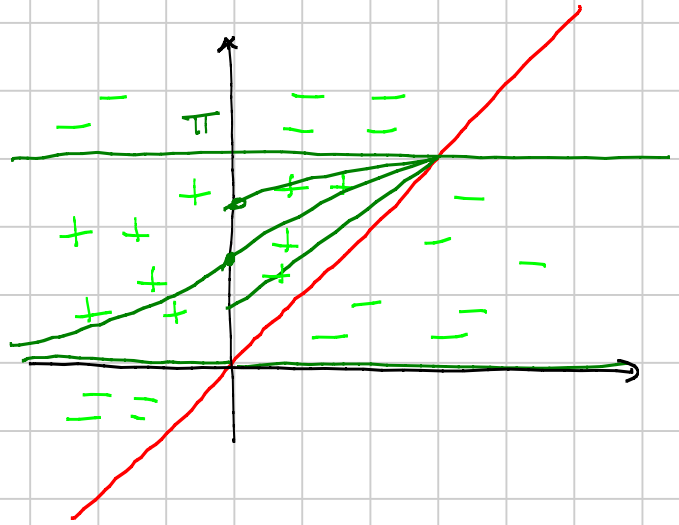
Esempio

(FOSSA COMUNE)

$$u' = \frac{\sin u}{u-t} \quad u(0) = \alpha \in (0, \pi)$$

Per $t \leq 0$ esiste globalmente
e tende a 0 (non ovvio)

Per $t \geq 0$ tutte le sol. con
 $\alpha \in (0, \pi)$ hanno BD per
 $t = \pi$



— 0 — 0 —