

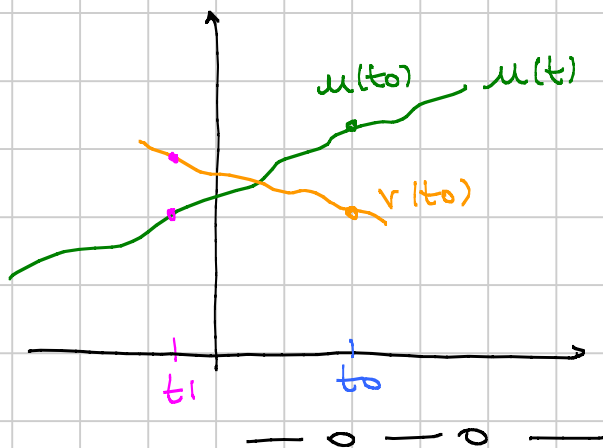
Achtung! Nel passato sopra e sottosoluzioni funzionavano al contrario. Classico esempio ($\neq$ lip.)

$$\left. \begin{array}{l} u(t_0) > v(t_0) \\ \dot{u} = f(t, u) \\ \dot{v} \geq f(t, v) \end{array} \right\} \forall t \in [t_0 - \delta, t_0] \Rightarrow u(t) \geq v(t) \quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0]$$

↑
soprasoluzioni
nel passato sta sotto

Dim. Supponiamo per assurdo che esista $t_1 \in [t_0 - \delta, t_0]$ tale che $u(t_1) < v(t_1)$. Pensò a t_1 come istante iniziale e guardo al futuro.

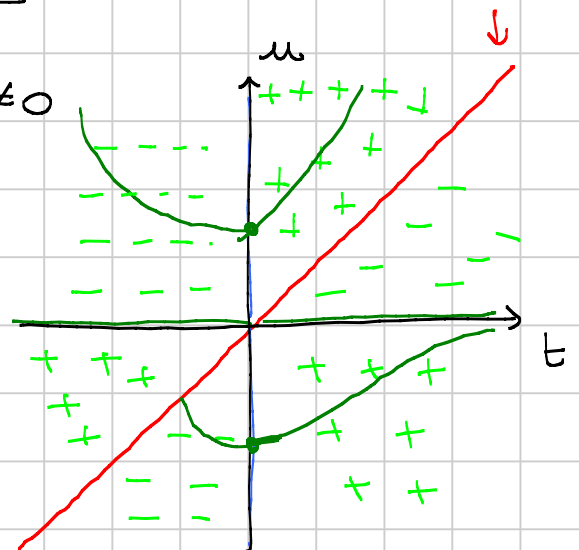
Per il teorema nel futuro avremo che $u(t) \leq v(t)$ in tutti i tempi successivi v_i , compreso t_0 .



chi tocca muore

Esempio 1 $\dot{u} = \frac{tu}{u-t}$ $u(0) = \alpha \neq 0$

Fatto 1 Esist. e unicità locali
 $\leadsto$ gratis



Fatto 2 Per $\alpha < 0$ la soluzione ha esistenza globale per $t \geq 0$ e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0^-$$

Sicuramente $u(t) < 0$ fino a quando esiste (altrimenti ho violazione di unicità)

Quindi sta nel IV quadrante, quindi monot. cresc. e non c'è blow up e nemmeno BD $\leadsto$ esist. glob.

Supponiamo per assurdo che $u(t) \rightarrow \ell < 0$. Allora

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u'(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t u(t)}{u(t) - t} = -\ell$$
$$\frac{t}{1 - \frac{t}{u(t)}} = \frac{1}{\frac{1}{t} - \frac{1}{u(t)}}$$

Quindi $\ell = 0$.

Fatto 3 Per $\alpha > 0$ e $t \leq 0$ è come prima. In generale vale la simmetria

$u(t)$ soluzione $\Rightarrow v(t) = -u(-t)$ soluzione

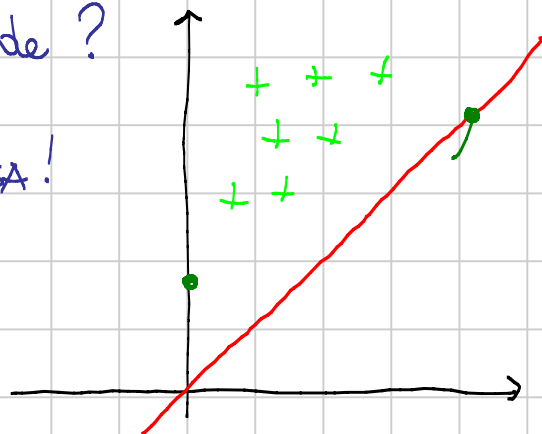
$$v'(t) = +u'(-t) = \frac{-t u(-t)}{u(-t) - (-t)} = \frac{t [-u(-t)]}{u(-t) + t} = \text{☹️}$$

Non viene perché è falso!!!

Fatto 4 Per $\alpha > 0$ e $t \geq 0$ cosa accade?

NON PUÒ TOCCARE LA ZONA ROSSA!

Brutalmente: restando sopra la retta non posso toccarla con derivata $+\infty$



Ci sono almeno due modi per sistemare rigorosamente

1° modo Poniamo $T := \sup \{ \tau > 0 : u(t) > t \quad \forall t \in [0, \tau] \}$

Se $T = +\infty$ siamo 😊

Altrimenti abbiamo che $T \in \mathbb{R}$ e $u(T) = T$ (se fosse $u(T) > T$, allora resterebbe vero ancora per un po').

• Quando il grafico Considero $T - \frac{1}{n}$ e applico Lagrange

$$u(T) - u\left(T - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} u'(c_n)$$

$$u\left(T - \frac{1}{n}\right) > T - \frac{1}{n}, \text{ quindi}$$

$$-u\left(T - \frac{1}{n}\right) < -\left(T - \frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n} u'(c_n) = \underbrace{u(T) - u\left(T - \frac{1}{n}\right)}_{\neq} < \cancel{T} - \cancel{T} + \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow u'(c_n) < 1 \text{ e quindi } \lim_{t \rightarrow T^-} u'(t) \leq 1 \text{ posto che esista}$$

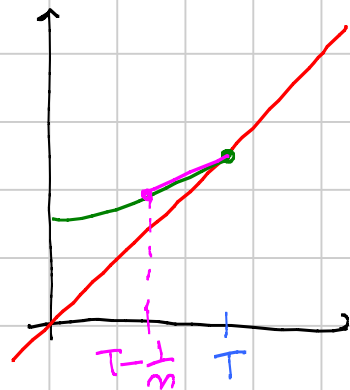
(altrimenti il limsup)

• Quando l'equazione e ottengo

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u'(t) = \lim_{t \rightarrow T^-} \frac{t u(t)}{u(t) - t} = +\infty$$

$\uparrow$
 $\left[\frac{T^2}{0^+} \right]$

Quindi ho un assurdo.



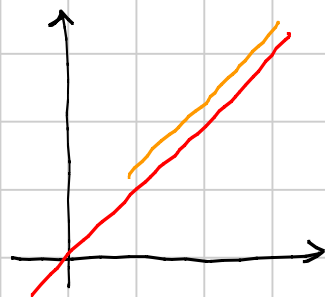
2° modo Dico che $v(t) = t + \varepsilon$ è una sottosoluzione, o almeno lo spero

$$v'(t) \stackrel{?}{\leq} \frac{t v(t)}{v(t) - t}$$

$$1 \stackrel{?}{\leq} \frac{t^2 + \varepsilon t}{\varepsilon}$$

$$\varepsilon \leq t^2 + \varepsilon t$$

Vera per $t \geq 1$, ma non vera per ogni $t \geq 0$



Questo dice una cosa più debole: se si sopravvive fino a $t=1$, allora non muore più.

FATTO 5 Per $\alpha < 0$ e $t \leq 0$ c'è break down per assenza di alternative

FATTO 6 Per $\alpha > 0$ e $t \geq 0$ non c'è blow up, quindi c'è esistenza globale

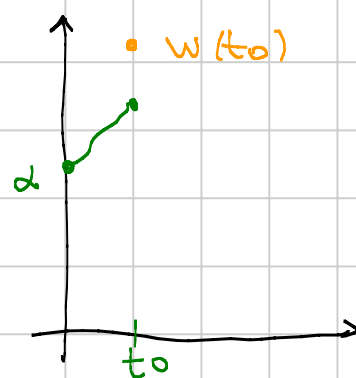
Spero che $w(t) = At^2 + t$ è soprasoluzione quando A è grande

$$w' \stackrel{?}{\geq} \frac{t w}{w - t}$$

$$2At + 1 \stackrel{?}{\geq} \frac{t(At^2 + t)}{At^2}$$

$$2At + 1 \stackrel{?}{\geq} \frac{At^2 + t}{At} = t + \frac{1}{A}$$

vera se A è grande e $t > 0$.



Per bene: prendo la soluzione con $u(0) = \alpha$.

Questa vive, per esistenza locale, fino ad un certo $t_0 > 0$.

Scelgo $A > 0$ in modo che

$$u(t_0) < w(t_0)$$

Ora $w(t_0)$ è soprasoluzione per ogni $t \geq t_0$ e quindi sta sopra $u(t)$ per ogni $t \geq t_0 \rightarrow$ viene BU.

Se volevo evitare t al denominatore, potevo prendere

$$w(t) = At^2 + t + 1$$

e sperare

[FATTO 7] Vediamo se c'è crescita quadratica

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u'(t)}{2t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{u(t)}{u(t) - t} = \frac{1}{2} \quad \leftarrow$$

Se io sapessi che $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(t)}{t} = +\infty$ avrei finito

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} u'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t u(t)}{u(t) - t} = +\infty$$

$$\frac{t u(t)}{u(t) - t} \geq \frac{t \cancel{u(t)}}{\cancel{u(t)}} = t$$

$$\frac{u(t)}{u(t) - t} = \frac{1}{1 - \frac{t}{u(t)}} \rightarrow 1$$