

Studi qualitativi autonomi

Esempio 1
$$\begin{cases} \dot{u} = \log u \\ u(0) = \alpha > 0 \end{cases}$$

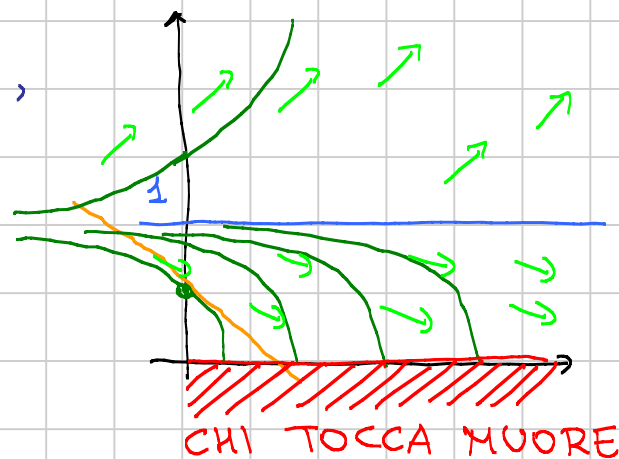
Fatto 1 Esistenza ed unicità locale: no problem

Fatto 2 $u(t) \equiv 1$ è soluzione dell'eq. (sistema $\alpha=1$)
(tutti gli zeri del RHS sono soluz. costanti)

Fatto 3 Per $\alpha \in (0,1)$ la soluzione, finché esiste, è decrescente e inoltre $u(t) \in (0,1)$

(non può superare 1 perché avrei violazione di unicità)

Quindi nel passato la sol. esiste globalmente e tende ad un limite l che è per forza $l=1$ per il teo. asintotico.



[se $u(t) \rightarrow l$, allora $u'(t) \rightarrow \log l$ per l'eq., quindi $u'(t)$ ha limite, quindi $u'(t) \rightarrow 0$, cioè $\log l = 0$, cioè $l=1$].

Fatto 4 Per $\alpha \in (0,1)$ la soluz. ha break down in tempo finito.

1° modo Se non avesse BD avrebbe esist. glob., ma allora tenderebbe ad $l \in [0, \alpha]$, ma come prima dovrebbe essere $\log l = 0$, che è impossibile.

2° modo u è concava in quanto

$$u''(t) = \frac{1}{u(t)} u'(t) = \frac{\log u(t)}{u(t)} < 0$$

ma allora $u(t)$ sta sotto la retta tang. in $t=0$ che ha coeff. angolare $\log \alpha < 0$

3° modo La funzione $v(t) = \alpha + t \log \alpha$ è soprasoluz. fino a quando resta > 0 .

$$v(t) = \log \alpha \geq \log (\underbrace{\alpha + t \log \alpha}_{< \alpha \text{ perché } \log \alpha < 0})$$

Fatto 5 Quando $\alpha \rightarrow 1^-$, il tempo di vita tende a $+\infty$ (basta osservare che le diverse soluzioni si ottengono per traslazione orizzz.)

Fatto 6 Per $\alpha \in (1, +\infty)$ la soluzione esiste glob. per $t \leq 0$ e tende a $\pm$ per $t \rightarrow -\infty$.

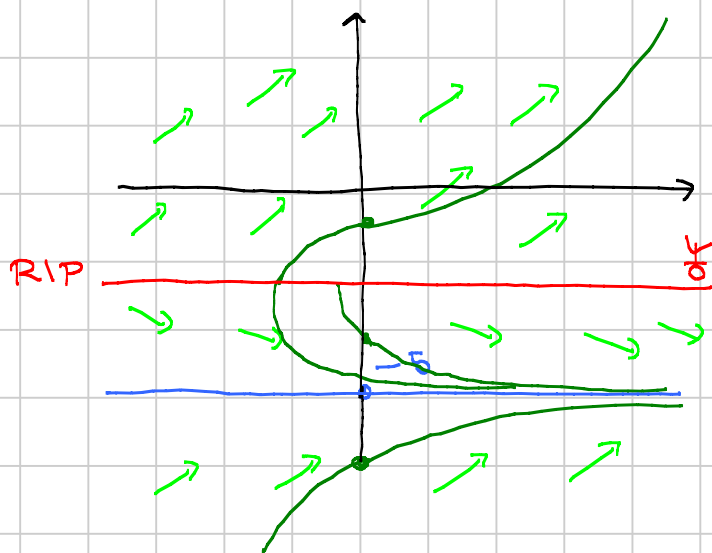
Per $t \geq 0$ c'è esistenza globale (il log è sublineare) e tende a $+\infty$ (se tendesse ad $l \in \mathbb{R}$ dovrebbe essere $\log l = 0$).

Formalmente: occorre modificare f per $u \leq 1$ in modo da averla definita globalmente e sublineare globale.

Semi-hard Come cresce a $+\infty$?

Esempio 2 $\dot{u} = \frac{u+5}{u+3}$

$u(0) = \alpha \neq -3$



Fatto 1 Esistenza e unicità locale: no problem

Fatto 2 Per $\alpha > -3$ abbiamo

- esistenza globale per $t \geq 0$ con limite $+\infty$
 nella zona $u \geq \alpha$ è $\neq$ limitata
 se fosse $l \in \mathbb{R}$ dovrebbe essere $f(l) = 0$
- break down in tempo finito per $t \leq 0$
 (altrimenti avrei esistenza globale con limite l t.c. $f(l) = 0$)

Fatto 3 Per $\alpha \in (-5, -3)$ si tratta come sopra

Fatto 4 Per $\alpha < -5$ abbiamo esistenza globale sia nel passato sia nel futuro, con

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = -\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = -5$$

Fatto 5 Quando $\alpha > -3$ abbiamo che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(t)}{t} = 1$$

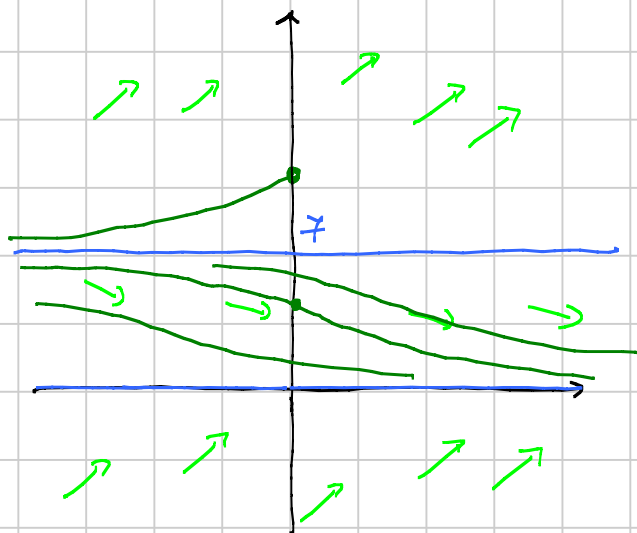
$$\stackrel{\text{H\ddot{o}p}}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} u'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(t)+5}{u(t)+3}$$

$$\stackrel{u(t)=y}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y+5}{y+3} = 1.$$

Esempio 3 $\begin{cases} u' = u(u-7) \\ u(0) = \alpha \end{cases}$

Semplice per $\alpha \in (0, 7)$

Per $\alpha > 7$ è semplice per $t \leq 0$,
dove abbiamo esistenza
globale con limite 7



Cosa succede per $t \geq 0$. Opzioni

→ esist. glob. con limite finito (NO: sarebbe $f(0)=0$)

→ " " " " $+\infty$

→ blow up in tempo finito

Brutal mode: $u' \sim u^2$ e questa ha blow up
già sappiamo che $u \rightarrow +\infty$

Per dimostrarlo formalmente, basta mettere sotto una
sottosoluzione che ha blow up in tempo finito

$$u' = u(u-7) \geq cu^2 \quad \text{per ogni } u \geq \alpha$$

Analisi 1: per ogni $\alpha > 7$ esiste $c > 0$ t.c.

$$u(u-7) \geq cu^2 \quad \forall u \geq \alpha$$

(divido per u^2 e studio la funzione)

Le soluzioni di $v' = cv^2$ sono sottosolus. dell'eq.
iniziale, quindi se partono con lo stesso dato stanno
sotto. Ma queste hanno tutte blow up (basta risolvere
esplicitamente).

Alternativa Tiro fuori dal cilindro

$$v(t) := \frac{\alpha}{1-\varepsilon t}$$

Dico che per ε piccolo è sottosoluto

$$v'(t) \stackrel{?}{\leq} v(v-\tau)$$

$$\frac{\alpha \varepsilon}{(1-\varepsilon t)^2} \stackrel{?}{\leq} \frac{\alpha}{(1-\varepsilon t)} \left(\frac{\alpha}{1-\varepsilon t} - \tau \right) \quad \text{se } 1-\varepsilon t > 0$$

$$\varepsilon \stackrel{?}{\leq} \alpha - \tau(1-\varepsilon t)$$

$$\varepsilon \stackrel{?}{\leq} \alpha - \tau + \tau \varepsilon t$$

Basta scegliere $0 < \varepsilon \leq \underbrace{\alpha - \tau}_{\text{positivo}}$

Quindi $v(t)$ è sottosoluto su $[0, \frac{1}{\varepsilon})$

v univoco, quindi u univoco 😊.
— o — o —