

SOTTOSOLUZIONI E SOPRASOLUZIONI

Setting: $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

↑ equazioni e non sistemi

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua (almeno)

Def. Una funzione $u: [t_0, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$

di classe C^1 e tale che

↑ compreso o no

$$(t, u(t)) \in \Omega \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta)$$

si dice

- soprasoluzione stretta se $u'(t) > f(t, u(t)) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta)$
- soprasol. debole se $u'(t) \geq f(t, u(t)) \quad "$
- sottosoluzione stretta se $< \quad "$
- sottosoluzione debole $\leq \quad "$

Oss. Le soluzioni di $u' = f(t, u)$ sono sia sopra, sia sottosoluzioni deboli.

Oss Se $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $g(t, u) > f(t, u)$ per ogni $(t, u) \in \Omega$ allora le soluzioni di $u' = g(t, u)$ sono soprasoluzioni strette per $u' = f(t, u)$

[Dim. ovvia]

Teorema (caso di f continua)

Siano u e v due funzioni $[t_0, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

- u è soprasoluz. debole e v è sottosoluz. debole
- per ogni $t \in [t_0, t_0 + \delta)$ almeno una delle 2 è stretta
- $u(t_0) > v(t_0)$

Allora

$$u(t) > v(t) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta)$$

(una soprasoluz. che parte sopra resta sopra)

Dim. (Semplice ma non ovvia)

Sappiamo per ipotesi che

$$\begin{aligned} u'(t) &\geq f(t, u(t)) & \forall t \in [t_0, t_0 + \delta) \\ v'(t) &\leq f(t, v(t)) & \text{"} \end{aligned}$$

e in ogni p.to almeno una è stretta

[Questo NON vuol dire che $u'(t) \geq v'(t)$ per ogni $t \in \dots$]

Pongo $w(t) := u(t) - v(t)$

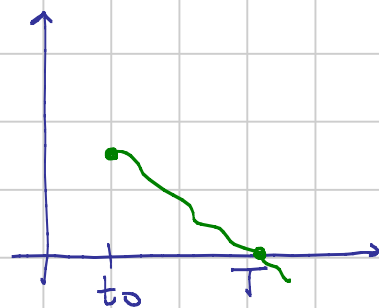
Voglio dim. che $w(t) > 0$ per ogni $t \in [t_0, t_0 + \delta)$.

Supponiamo per assurdo che non sia così. Allora posso porre

$$T := \underbrace{\sup \{ t \in [t_0, t_0 + \delta) : w(t) \leq 0 \}}_{\neq \emptyset}$$

Per definizione di cuf avremo che

- $w(t) > 0$ per $t \in [t_0, T)$
- $\exists t_n \rightarrow T^+$ t.c. $w(t_n) \leq 0$



Inoltre $T > t_0$ perché $w(t_0) > 0$ e quindi $w(t) > 0$ in un intorno destro di t_0 .

Dalla due proprietà sopra segue che $w(T) = 0$ (se faccio il limite da sx viene ≥ 0 , se lo faccio lungo la succ. t_n viene ≤ 0).

Inoltre $w'(T) \leq 0$ perché se fosse $w'(T) > 0$, allora in un intorno sx di T la w sarebbe < 0 .

D'altra parte

$$\begin{aligned} w'(T) &= u'(T) - v'(T) > 0 \\ &\geq f(T, u(T)) \geq -f(T, v(T)) \end{aligned}$$

↑
sono uguali perché $w(T) = 0$

perché almeno una delle z è stretta

Avevamo ottenuto che $w'(T) \leq 0$ e $w'(T) > 0$ abbiamo un assurdo.

— 0 — 0 —

Oss. Non serve davvero supporre che $u(t_0) > v(t_0)$, basta la $u(t_0) \geq v(t_0)$.

$$\begin{aligned} \text{[Se } u(t_0) = v(t_0), \text{ allora } w'(t_0) &= u'(t_0) - v'(t_0) \\ &\geq f(t, u(t_0)) - f(t, v(t_0)) \\ &> 0 \text{ perché una è stretta} \end{aligned}$$

Quindi ancora una volta

$w(t) > 0$ in un intorno dx di t_0].

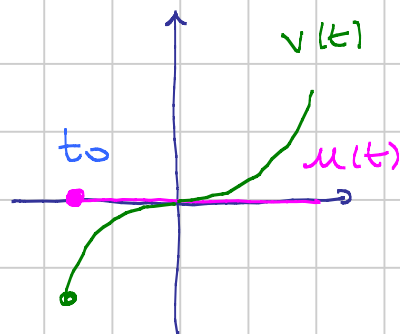
Oss. Se f è solo continua senza DAVVERO suppone che in ogni pto una delle 2 sia stretta, anche se $u(t_0) > v(t_0)$

Solito esempio con $\ddot{u} = 3|u|^{2/3}$

$u(t) \equiv 0$ parte sopra ed è
soprasoluz. debole

$v(t) = t^3$ parte sotto ed è
sottosoluz. debole

Dopo un po' si scambiano.



Teorema (Caso f lip. in u)

Sia u e v due funzioni $: [t_0, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$

Supponiamo che

(i) u è soprasoluz. debole e v è sottosoluz. debole

(ii) $u(t_0) \geq v(t_0)$

Allora

$$u(t) \geq v(t) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta)$$

Dim. Sia L la costante di Lip. di f , cioè

$$|f(t, u_2) - f(t, u_1)| \leq L |u_2 - u_1| \quad \forall t, u_1, u_2, \dots$$

Pongo $u_\varepsilon(t) := u(t) + \varepsilon e^{\Lambda t}$ dove $\Lambda > L$

Dico che $u_\varepsilon(t)$ è soprasoluz. stretta quando $\varepsilon > 0$ è abbastanza piccolo.

Se lo dimostro, poi osservo che $u_\varepsilon(t_0) > u(t_0) \geq v(t_0)$, applico il teo precedente perché tra u_ε e v sono verificate le ipotesi e deduco che

$$u_\varepsilon(t) > v(t)$$

$$\forall t \in [t_0, t_0 + \delta)$$

cioè

$$u(t) + \varepsilon e^{\lambda t} > v(t)$$

"

Passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ho la tesi.

Resta da verificare che $u_\varepsilon(t)$ è sopra solus., cioè

$$u'_\varepsilon(t) \stackrel{?}{>} f(t, u_\varepsilon(t))$$

$$u'(t) + \varepsilon \lambda e^{\lambda t} \stackrel{?}{>} f(t, u(t) + \varepsilon e^{\lambda t})$$

$$u'(t) + \varepsilon \lambda e^{\lambda t} \stackrel{?}{>} f(t, u(t)) + f(t, u(t) + \varepsilon e^{\lambda t}) - f(t, u(t))$$

Sappiamo che $u'(t) \geq f(t, u(t))$ per ipotesi, quindi ci basta

$$\varepsilon \lambda e^{\lambda t} \stackrel{?}{>} f(t, u(t) + \varepsilon e^{\lambda t}) - f(t, u(t))$$

e questa è mezza Lip.

$$f(t, u(t) + \varepsilon e^{\lambda t}) - f(t, u(t)) \leq L \varepsilon e^{\lambda t} < \lambda \varepsilon e^{\lambda t}$$

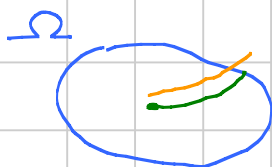
$\uparrow$
 $\lambda > L$ e
il resto è positivo.

— o — o —

Domanda: dove ho usato che ε è piccolo?

Serve che $(t, u_\varepsilon(t)) \in \Omega$ e questo lo posso assicurare solo per ε piccolo

(anzi dovei fare il ragionamento in sottointervallo di chiusi $[t_0, t_0 + \delta_1] \subset [t_0, t_0 + \delta)$)



— o — o —

Dim 3 della parte di unicità del teorema CLPL

Siano u e v due soluzioni (stesso a valori in $\mathbb{R}^k$)

$$\dot{u} = f(t, u) \quad \dot{v} = f(t, v) \quad (\text{stesso dato in } t_0)$$

Pongo $w(t) := \|u(t) - v(t)\|^2$ (norma al $\square$)

Allora

$$\begin{aligned} w'(t) &= 2 \langle u(t) - v(t), u'(t) - v'(t) \rangle \\ &= 2 \langle u(t) - v(t), f(t, u(t)) - f(t, v(t)) \rangle \\ &\stackrel{\substack{\leq \\ \text{C.S.}}}{\leq} 2 \|u(t) - v(t)\| \cdot \underbrace{\|f(t, u(t)) - f(t, v(t))\|}_{\leq L \|u(t) - v(t)\|} \\ &\leq 2L \|u(t) - v(t)\|^2 \\ &= 2L w(t) \end{aligned}$$

Quindi $w(t)$ è sottosoluzione dell'equazione $\dot{w} = 2Lw$.

D'altra parte $u(t) \equiv 0$ è una soluzione.

Dal momento che $w(0) = 0 \leq u(0)$ per il confronto possiamo concludere che

$$w(t) \leq 0 \quad \text{per ogni } t \in [t_0, t_0 + \delta)$$

e quindi $w(t) \equiv 0$.

— 0 — 0 —

Teorema di esistenza globale

Supponiamo che $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ sia continua e sublineare, cioè esistono due costanti A e B t.c.

$$|f(t, u)| \leq A + B \|u\| \quad \forall (t, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$$

Allora il pbm. di Cauchy $\dot{u} = f(t, u)$, $u(t_0) = u_0$ ha esistenza globale per ogni dato iniziale.

Dim. Prendo una sol. massimale. Non può avere break down, quindi basta escludere il blow up.

Considero $w(t) := \|u(t)\|^2$. Come prima

$$w'(t) = 2 \langle u(t), u'(t) \rangle$$

$$= 2 \langle u(t), f(t, u(t)) \rangle$$

$$\leq 2 \|u(t)\| \cdot \|f(t, u(t))\|$$

$$\leq 2 \|u(t)\| \cdot (A + B \|u(t)\|)$$

$$= 2B \|u(t)\|^2 + 2A \|u(t)\| \quad 2ab \leq a^2 + b^2$$

$$\leq 2B \|u(t)\|^2 + A^2 + \|u(t)\|^2$$

$$= A^2 + (2B+1) w(t)$$

$$\text{Quindi} \quad w'(t) \leq A^2 + (2B+1) w(t)$$

Ora le sol. di $\dot{u} = A^2 + (2B+1)u$ non scoppiano, quindi nemmeno w .