

Soluzione massimale, alternativa, esistenza globale

Setting: $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ aperto

$$(t_0, u_0) \in \Omega$$

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ continua (talvolta loc. lip. in u)

Problema di Cauchy
$$\begin{cases} \ddot{u} = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Teorema (Esistenza di una soluzione massimale)

Nel setting descritto sopra, esiste $T > t_0$ ed esiste una soluzione
 $\uparrow$ può essere anche $+\infty$

$$u: [t_0, T) \rightarrow \mathbb{R}^k$$

che non si può prolungare oltre T (cioè non esiste $v: [t_0, T'] \rightarrow \mathbb{R}^k$ soluzione con $T' > T$ che coincide con u in $[t_0, T)$).

Oss. Discorso analogo vale nel passato.

Dim. Poniamo

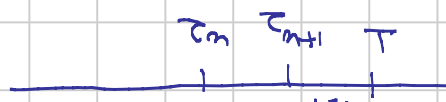
$$T := \sup \{ \tau > t_0 : \text{esiste una soluzione in } [t_0, \tau) \}$$

Per caratterizzazione di $\sup$, sappiamo che esiste $\tau_n \rightarrow T^-$ per cui esiste sol. $u_n: [t_0, \tau_n) \rightarrow \mathbb{R}^k$

Posso anche supporre $\tau_n \uparrow T$.

Vorrei tanto incollare le u_n .

Posso farlo solo se sono nelle ipotesi del teo. di unicità.



Caso 1 Se f è loc. lip. in u , per riincollamento trovo una sol. definita su $[t_0, T)$.

Caso 2 Se non posso contare sull'unicità, le cose si complicano e occorre usare ZORN.

Considero l'insieme delle coppie (intervallo, sol. def. sull'int.) e considero su questo insieme l'ordinamento "ovvio": una sol. è + lunga di un'altra se ha int. + grande e in quello comune coincidono.

Ogni catena tot. ordinata ammette elemento maggiorante. perché lì davvero posso riincollare.

A questo punto Zorn fa il lavoro sporco.

— o — o —

Oss. Non è detto che la sol. prodotta da Zorn sia la più lunga possibile. Sappiamo solo che non è prolungabile.

— o — o —

Teorema (ALTERNATIVA)

Solito setting. Sia $u : [t_0, T) \rightarrow \mathbb{R}^k$ una sol. massimale (sarebbe LA sol. sol. mass. nel caso loc. lip. in u).

Allora accade almeno una di queste 3 possibilità:

(i) $T = +\infty$ (esistenza globale)

(ii) $\limsup_{t \rightarrow T^-} |u(t)| = +\infty$ (blow up se $T < +\infty$)
↑ norma o val. assd. a seconda di k

(iii) $\liminf_{t \rightarrow T^-} \text{dist}((t, u(t)), \Omega^c) = 0$ (break down se $T = +\infty$ e non c'è blow up)
↑ complementare di Ω

Dim. Supponiamo per assurdo che non accada (i), (ii), (iii).
Allora $T < +\infty$ ed esistono $A > 0$ e $B > 0$ tali che

$$|u(t)| \leq A \quad \forall t \in [t_0, T)$$

$$\text{dist}((t, u(t)), \Omega^c) \geq B > 0 \quad \forall t \in [t_0, T).$$

In particolare questo ci dice che

$$(t, u(t)) \in \Omega_{A,B} := \{(t, u) \in \Omega : |u| \leq A, \text{dist}((t, u), \Omega^c) \geq B\}$$

Ora si può concludere in 2 modi

1° modo (Passo al limite e continuo)

Visto che $(t, u(t)) \in \Omega_{A,B}$ cpt.,
esiste una costante M tale che

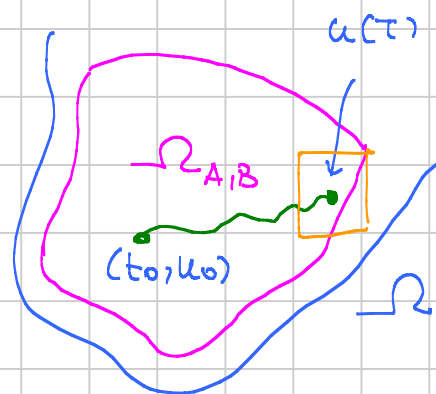
$$|\dot{u}(t)| = |f(t, u(t))| \leq M \quad \forall t \in [t_0, T)$$

Ma allora u è lip., quindi unif. cont., quindi estendibile
cioè esiste

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u(t) = u(T)$$

Ora in $(T, u(T))$ posso riapplicare il teo. di esistenza perché
ho una finestrella tutta contenuta in Ω .

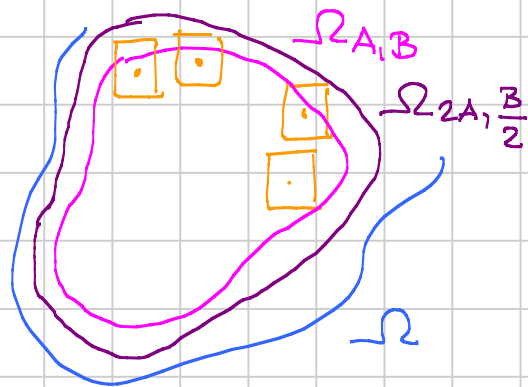
In questo modo definisco la soluzione in $[T, T+\delta]$ e
quindi ho prolungato. 😊



2° modo (Osservo che i tempi di vita sono maggiori di una costante strettamente positiva)

Osservo che $\Omega_{2A, \frac{B}{2}}$ è cpt.

Per ogni $(t_0, u_0) \in \Omega_{A, B}$ ho una finestrella di dimensioni fisse contenuta in $\Omega_{2A, \frac{B}{2}}$



Per ogni punto $(t_0, u_0) \in \Omega_{A, B}$ se applico il teo. di esistenza trovo una soluzione che esiste in un intervallo lungo $\delta > 0$ uniforme (che dipende dalle dim. della finestra e dal max di $|f(t, u)|$ nella finestra, il quale è controllato dal max di $|f(t, u)|$ in $\Omega_{2A, \frac{B}{2}}$).

Allora basta mettersi vicino a T e trovo un assurdo



la sol. sta in $\Omega_{A, B}$,
quindi vive ancora per
un certo $\delta > 0$ fisso
che cui porta oltre T

— o — o —

Esistenza globale Come dimostro che $T = +\infty$?

Per il teo. di alternativa, basta escludere le altre due opzioni.

Teorema (esistenza globale) Supponiamo che $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$,
cioè $f(t, u)$ è definita ovunque.

Supponiamo che $f(t, u)$ sia globalmente limitata, cioè

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |f(t, u)| \leq M \quad \forall (t, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k.$$

Allora la soluzione esiste globalmente.

Dim 1 (Usando l'alternativa)

Il break down di sicuro non c'è ☺

Devo escludere il blow up.

Sia $u: [t_0, T) \rightarrow \mathbb{R}^k$ una sol. massimale. Allora dalla formulazione integrale

$$\begin{aligned} |u(t) - u_0| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, u(s))| ds \leq M(t - t_0) \\ &\leq M(T - t_0) \end{aligned}$$

il che conclude.

Dim 2 Tornando al teorema di esistenza, avevamo una sol. su $[t_0, t_0 + \delta]$ con

$$\delta \leq \delta_0 \quad \delta \leq \frac{r_0}{M}$$

con δ_0 e r_0 dim. della finestra e $M = \max$ di $|f(t, u)|$ nella finestra.

Ora posso prendere δ_0 ed r_0 grandi quanto mi pare e M resta sempre lo stesso.

In questo modo ho dimostrato che posso avere una sol. def. su un intervallo grande a piacere. Se ho unicità le riunisco e ne ottengo una globale.

Altrimenti posso uscire ugualmente ripercorrendo le
dim. del teo. di sola esistenza lavorando in spazi di
funzioni continue su $[t_0, +\infty)$

(funzionano tutte: norme pesate, o Picard, o approx. con
cose Lip....).

Provare per credere.

— o — o —