

Unicità della soluzione

Setting: $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ aperto
 $(t_0, u_0) \in \Omega$
 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$

$$\dot{u} = f(t, u) \quad u(t_0) = u_0$$

Supponiamo che esista $L \in \mathbb{R}$ tale che

$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq L |u_1 - u_2| \quad \forall (t, u_1) \in \Omega$$
$$\forall (t, u_2) \in \Omega$$

(lip. nella 2^a variabile)

Allora la soluzione è unica. Detto meglio: se $u: [t_0, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^k$ e $v: [t_0, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^k$ sono due soluzioni definite sullo stesso intervallo, allora $u(t) \equiv v(t)$. Per questo basta pure la lip. locale (cioè per ogni punto di Ω esiste un intorno in cui vale con un certo L che può dipendere dall'intorno).

Ci sono almeno 3 dimostrazioni

→ classica via lemma di GRONWALL

→ riciclando l'unicità nelle contrazioni

→ via sopra e sottosoluzioni

Oss. Il δ nel teo. di unicità può essere più grande di quello fornito dal teo. di esistenza.

LEMMA DI GRONWALL

Siano $t_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, e sia $\varphi: [t_0, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua.

Supponiamo che esista $L \geq 0$ tale che

$$\varphi(t) \leq L \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta]$$

Allora $\varphi(t) \leq 0$ per ogni $t \in [t_0, t_0 + \delta]$.

Dim. (mimare il fattore integrante per le eq. di ordine 1)

Moltiplico a dx e sx per e^{-Lt} :

$$\varphi(t) e^{-Lt} \leq L e^{-Lt} \int_{t_0}^t \varphi(s) ds$$

Porto tutto a sx:

$$\varphi(t) e^{-Lt} - L e^{-Lt} \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \leq 0$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \left(e^{-Lt} \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \right)}_{F(t)} \leq 0$$

Abbiamo dim. che $F'(t) \leq 0$ per ogni $t \in [t_0, t_0 + \delta]$, quindi $F(t)$ è debolm. decr., quindi

$$F(t) \leq F(t_0) = 0 \quad \leadsto \quad F(t) \leq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta]$$

Ma allora $\int_{t_0}^t \varphi(s) ds \leq 0$, da cui osservando

l'ipotesi iniziale deduciamo che $\varphi(t) \leq 0$ per ogni $t \in \dots$

— 0 — 0 —

Dimostrazione dell'unicità dato Gronwall

Considero due soluz. $u(t)$ e $v(t)$ definite sullo stesso intervallo $[t_0, t_0 + \delta]$. Scrivo la form. int.

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

$$v(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds$$

Faccio la diff e metto i valori assoluti (o le norme)

$$|u(t) - v(t)| \leq \int_{t_0}^t |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| ds$$

$$\leq L \int_{t_0}^t |u(s) - v(s)| ds$$

Questa è proprio l'ipotesi di Gronwall con $\varphi(t) := |u(t) - v(t)|$

Ottengo che $\varphi(t) \leq 0$ sempre, il che vuol dire che $\varphi(t) \equiv 0$, cioè che $u(t) \equiv v(t)$.

↑ essendo ≥ 0 per forza essendo un valore assoluto.

— 0 — 0 —

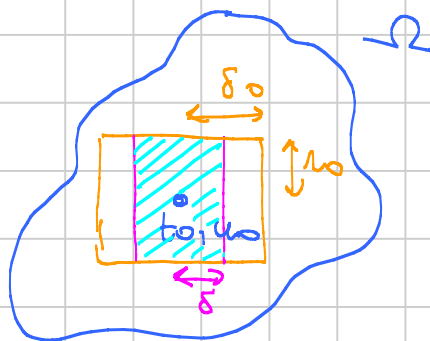
Dimostrazione via contrazioni

Le dimostrazioni del teorema CLPL che usano le contrazioni dimostrano una specie di "unicità locale" della soluzione.

$$\Omega \rightsquigarrow [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \times \bar{B}_{r_0}(u_0)$$

$$\rightsquigarrow [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \bar{B}_{r_0}(u_0)$$

↑
 δ ristretto con 2 o 3 condizioni



Prendiamo 2 soluzioni definite su un intervallo comune $[t_0, t_0 + \delta_1]$.

Per $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ queste soluzioni vivono in

$$[t_0, t_0 + \delta] \times \bar{B}_{r_0}(u_0)$$

e in questa zona sono pti fissi dell'oper. di Volterra (form. integrale), quindi in questo intervallo sono uniche

Che impedisce ad una sd. di uscire?

Mettiamo che sia $|v(t_1) - u_0| = r_0$
È impossibile perché

$$\begin{aligned} |v(t_1) - u_0| &\leq \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{|\varphi(s, v(s))|}_{\leq M} ds \\ &\leq \underbrace{(t_1 - t_0)}_{< \delta} M < \delta M \leq r_0 \end{aligned}$$



t_1 è definito come il + piccolo $t \geq t_0$ per cui si ha uscita.

Quindi se $t_1 - t_0 < \delta$, allora $|v(t_1) - u_0| < r_0$

Come globalizzare una dimostrazione locale?

Considero $u(t)$ e $v(t)$ definite in $[t_0, t_0 + \delta_1]$.

Suppongo per assurdo che non coincidano ovunque.

Pongo

$$t_2 := \inf \{ t \in [t_0, t_0 + \delta_1] : u(t) \neq v(t) \}$$

Oss. Questo vuol dire che prima di t_2 coincidono, ma non vuol dire che dopo t_2 sono sempre diverse. In t_2 coincidono per forza per continuità da sx



Dopo aver osservato che $u(t_2) = v(t_2)$, piazzo una finestrella intorno al p.to $(t_2, u(t_2))$.

La scelgo in modo di poter applicare il ragionamento locale vicino a quel p.to.

Ne segue che $u(t) \equiv v(t)$ anche un po' a dx di t_2 .

Questo va contro la definizione di t_2 (per def. di inf esiste una succ. $t_n \rightarrow t_2^+$ t.c. $u(t_n) \neq v(t_n)$).

Esercizio (variante di Gronwall). Cosa succede se assumo

$$\varphi(t) \leq \underbrace{L(t)}_{\substack{\uparrow \\ \text{funzione continua e } \geq 0}} \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta]$$

Non cambia nulla. Non posso sostituire L con il suo max perché non so il segno dell'integrale. Tuttavia si può riciclare la dimostrazione moltiplicando per $e^{-\Lambda(t)}$ dove $\Lambda(t)$ è una primitiva qualunque di $L(t)$.
Verificare i dettagli.