

Teorema di Ascoli - Arzelà (versione metrica)

Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici, e sia $f_n : X \rightarrow Y$ una succ. di funzioni.

Supponiamo che

(i) (X, d_X) compatto (viente Y completo)

(ii) (Compattezza ad x fissato)

per ogni $x \in X$ esiste $K_x \subseteq Y$ compatto tale che

$$f_n(x) \in K_x \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(occhio: K_x può dipendere da x)

(iii) (equicontinuità)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in X \quad \exists \delta > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall y \in X$$

$$d_X(x, y) \leq \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f_n(x), f_n(y)) \leq \varepsilon.$$

Allora esiste s.succ. conv. unif.

Dim.

Passo 0 Sene $D \subseteq X$ denso e numerabile. Come faccio?

Prendo, per ogni $k \in \mathbb{N}$, una $\frac{1}{k}$ -rete (o una $\frac{1}{k!}$ rete) e prendo i centri delle palle. La loro unione è un denso numerabile

Fatto generale: ogni metrico tot. limitato soddisfa il 1° assioma di numerabilità.

Passo 1 Esiste sottosucc. $f_{n_k}(x)$ t.c.

$$f_{n_k}(d) \rightarrow f_\infty(d) \quad \forall d \in D$$

Dim. come prima usando compattezza a d fisso + proced. diagonale

Passo 2 La stessa f_{n_k} di prima soddisfa

$$f_{n_k}(x) \rightarrow f_\infty(x) \quad \forall x \in X$$

Come prima dimostro che $\{f_{n_k}(x)\}$ è di Cauchy in Y .
Grazie alla compattezza ad x fisso so che ha una s.succ. convergente, quindi converge tutta (senza bisogno di completezza)

Passo 3 e 4 Stessa dimostrazione del caso classico.

— o — o —

Esercizio 1 Se (X, d) non è compatto, possiamo ottenere la conv. unif. sui cpt. di una sottosucc. a patto di sapere che X ammette un'esaustione di compatti, cioè che posso scrivere X come unione numerabile di compatti

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_n$$

↑ compatti

(wlog possiamo assumere $K_{n+1} \supseteq K_n$)

[Ad un certo punto serve che ogni K compatto è contenuto in qualche K_n]

[Controllare se serve che $K_n \subseteq \text{Int}(K_{n+1})$]

Esercizio 2 Sotto le ipotesi di A.A. metrico esiste $K \subseteq Y$ compatto tale che

$$f_n(x) \in K \quad \forall x \in X \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

— o — o —

Dimostrazioni del teorema di PEANO (sola esistenza per problema di Cauchy)

① Punto fisso di SCHAUDER (senza BROUWER, per i quali serve omologia o coomologia)

② Per approssimazione via A.A.

2.1 $\leadsto$ approx. Dip.

2.2 $\leadsto$ approx. con ritardo (alla TONELLI)

2.3 $\leadsto$ approx. discreta (alla EULERO esplicito)

Lemma misterioso Mettiamoci nel solito setting del problema di Cauchy

$$(t_0 \in \mathbb{R}, u_0 \in \mathbb{R}^k, R = [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \times \overline{B}_{r_0}(u_0), \\ f: R \rightarrow \mathbb{R}^k \text{ continua e} \\ |f(t, u)| \leq M \quad \forall (t, u) \in R)$$

Allora esiste una successione di funzioni $f_n: R \rightarrow \mathbb{R}^k$ t.c.

(1) $f_n \rightarrow f$ unif. su R

(2) $|f_n(t, u)| \leq M \quad \forall (t, u) \in R \quad \forall n \in \mathbb{N}$

dipende da u
 $\uparrow$

(3) le f_n sono lip. in u , cioè per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste L_n t.c.

$$|f_n(t, u_1) - f_n(t, u_2)| \leq L_n |u_1 - u_2| \quad \forall t, u_1, u_2 \\ \text{dove serve}$$

Dim. di Peano dato il Lemma

Prendo $\delta > 0$ tale che

$$\delta \leq \delta_0$$

$$\delta \leq \frac{r_0}{M}$$

Passo 1 Considero il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_m' = f_m(t, u_m) \\ u_m(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Le f_m sono Dip. della variabile u , quindi per il teo CLPL (parte di sola esistenza) sappiamo che esiste almeno una soluzione definita in $[t_0, t_0 + \delta]$.

[Qui è essenziale che il δ NON dipenda dalla costante di Lip. di f_m , cosa che abbiamo realizzato con le dm 2, 3, 4].

Passo 2 Le $u_m(t)$ verificano le ipotesi di Ascoli-Arzelà

- Compattezza a t fisso. Ovvio perché $u_m(t) \in \overline{B}_{r_0}(u_0)$.
- Equicontinuità. Segue dal fatto che le $u_m(t)$ sono tutte Lipschitziane con costante M . Infatti

$$|u'(t)| = |f_m(t, u(t))| \leq M$$

[Occhio che sto usando il Lagrange in versione disuguaglianza per funzioni vettoriali]

Passo 3

Per A.A. esiste s.succ. $u_{m_k}(t) \rightarrow u_\infty(t)$ unif. in $[t_0, t_0 + \delta]$.

Ora non ci resta che passare al limite nella formulazione integrale

$$\begin{array}{ccc} u_{m_k}(t) & = & u_0 + \int_{t_0}^t f_{m_k}(s, u_{m_k}(s)) ds \\ \downarrow & & \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ u_\infty(t) & = & u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_\infty(s)) ds \end{array}$$

Per fare questo serve un lemma e poi abbiamo finito
— o — o —

Lemma Se $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. in R e
 $u_n \rightarrow u_\infty$ unif. in $[t_0, t_0 + \delta]$

Allora $f_n(t, u_n(t)) \rightarrow f_\infty(t, u_\infty(t))$ unif. in $[t_0, t_0 + \delta]$

Dim $|f_\infty(t, u_\infty(t)) - f_n(t, u_n(t))| \leq$

$$\leq |f_\infty(t, u_\infty(t)) - f_\infty(t, u_n(t))| +$$

$$+ |f_\infty(t, u_n(t)) - f_n(t, u_n(t))| \leq \frac{1}{2}\varepsilon \text{ per } n \text{ grande poich\'e } f_n \rightarrow f_\infty \text{ unif.}$$

La prima riga è $\leq \frac{1}{2}\varepsilon$ per n grande per il risultato di qualche let. prec. (serve f unif. cont.)

— o — o —

Oss. Dove però è l'unicità nella dim? S.succ. diverse possono avere limiti u_∞ diversi.