

TEOREMA DI ASCOLI-ARZELÀ

↑ Qui solo in Italia

Versione diseducativa Sia $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, e sia $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una succ. di funzioni.
Supponiamo che la succ. sia

(i) **EQUILIMITATA** cioè

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [a, b] \quad |f_n(x)| \leq M$$

(ii) **EQUICONTINUA** cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad \exists \delta > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall y \in [a, b]$$

↑ dipende da x e ε , ma non da n

$$|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon$$

Allora esiste una sottosuccessione che converge unif., cioè esiste succ. $\{n_k\}$ strett. cresc. di interi positivi ed esiste $f_\infty : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$f_{n_k} \rightarrow f_\infty \quad \text{unif. in } [a, b] \text{ per } k \rightarrow +\infty$$

Inoltre f_∞ è continua con la stessa relazione ε/δ delle altre.

Dim.

Passo 0 Identifico un sottoinsieme $D \subseteq [a, b]$ che sia denso e numerabile.

Denso: $\forall x \in [a, b] \forall \varepsilon > 0 \exists d \in D \text{ t.c. } |d - x| \leq \varepsilon$

Numerabile: $D = \{d_1, d_2, d_3, \dots\}$

Basta prendere $D := [a, b] \cap \mathbb{Q}$.

Passo 1 Esiste $\{m_k\}$ succ. strett. cresc. di interi positivi tali che $\{f_{m_k}(d)\}$ è succ. conv. per ogni $d \in D$.

Qui si utilizza un procedimento diagonale

- Considero d_1 e prendo $\{f_m(d_1)\}$. Questa succ. è limitata per l'ipotesi (i), quindi ammette s. succ. convergente

$$f_{m_{1,k}}(d_1) \longrightarrow f_\infty(d_1)$$

$N_1 =$ indici di questa s. succ.

- Prendo d_2 e considero $\{f_{m_{1,k}}(d_2)\}$. Anche questa ammette s. succ. conv., quindi

$$f_{m_{2,k}}(d_2) \longrightarrow f_\infty(d_2)$$

$N_1 \supseteq N_2 =$ indici di questa s. succ.

- Faccio la stessa cosa con $d_3, d_4, \dots$ e così via. In questo modo, per ogni i trovo

$$f_{m_{i,k}}(d_i) \longrightarrow f_\infty(d_i) \quad \text{per } k \rightarrow +\infty$$

$$N = N_0 \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq N_3 \supseteq \dots$$

Dico che la sottosucc. $m_{k,k}$ soddisfa tutte le proprietà, essendo s. succ. di tutte le precedenti

①	2	3	4	5	6	7	8	8	10	11	12	13	14	
1		③	4		6	7	8			11		13	14	$\leadsto$ conv. in d_1
1			4			⑦	8					13	14	$\leadsto$ conv. in d_2
			4			7	8					⑬		$\leadsto$ conv. in d_3

Alla fine del passo 1 abbiamo una s. succ. $f_{n_k}(x)$ t. c.

$$f_{n_k}(d) \rightarrow f_\infty(d) \quad \forall d \in D$$

Passo 2 Facciamo vedere che $\{f_{n_k}(x)\}$ converge $\forall x \in [a,b]$
 $\uparrow$
 la stessa di prima

Basta dimostrare che è di Cauchy.

• Mi viene dato $\varepsilon > 0$

• Scelgo $\delta > 0$ che mi fa tornare $\frac{1}{4}\varepsilon$ nella equicontinuità in x

• Scelgo $d \in D$ tale che $|x - d| \leq \delta$

• Scelgo $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|f_{n_k}(d) - f_{n_l}(d)| \leq \frac{1}{4}\varepsilon \quad \forall k \geq k_0 \quad \forall l \geq k_0$$

(posso perché $f_{n_k}(d)$ è succ. di Cauchy essendo conv.)

Ora per la triangolare

$$\begin{aligned}
|f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x)| &\leq |f_{n_k}(x) - f_{n_k}(d)| \leq \frac{1}{4}\varepsilon \text{ per equicont.} \\
&+ |f_{n_k}(d) - f_{n_l}(d)| \leq \frac{1}{4}\varepsilon \text{ se } k \geq k_0 \text{ e } l \geq k_0 \\
&+ |f_{n_l}(d) - f_{n_l}(x)| \leq \frac{1}{4}\varepsilon \text{ per equicont.} \\
&\leq \varepsilon \text{ se } k \geq k_0 \text{ e } l \geq k_0
\end{aligned}$$

Alla fine dello step 2 abbiamo dimostrato che

$$f_{n_k}(x) \rightarrow f_\infty(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad \text{conv. puntuale}$$

Step 3 Mostriamo che $f_\infty(x)$ è continua con la stessa relazione ε/δ delle $f_n(x)$.

Fisso $\varepsilon > 0$ ed $x \in [a, b]$ e prendo il $\delta > 0$ dell'equicont. Allora in particolare

$$|f_{n_k}(x) - f_{n_k}(y)| \leq \varepsilon \quad \text{se } |x - y| \leq \delta$$

Passando al limite per $k \rightarrow +\infty$ trovo

$$|f_\infty(x) - f_\infty(y)| \leq \varepsilon \quad \text{se } |x - y| \leq \delta.$$

Step 4 Mostriamo che $f_{n_k}(x) \rightarrow f_\infty(x)$ unif. in $[a, b]$.

- Mi viene dato $\varepsilon > 0$

- Per ogni $x \in [a, b]$, prendo il $\delta > 0$ che mi produce $\frac{1}{4}\varepsilon$ nell'equicontinuità delle f_n , e anche nella continuità di $f_\infty(x)$.

Ora δ dipende da x e quindi lo chiamo $\delta(x)$.
Osservo che

$$\{B_{\delta(x)}(x) : x \in [a, b]\}$$

è un ricoprimento aperto di $[a, b]$, da cui posso estrarne un s. ricopr. finito

$$[a, b] = B_{\delta_1}(x_1) \cup \dots \cup B_{\delta_m}(x_m)$$

• Scelgo $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|f_\infty(x_i) - f_{n_k}(x_i)| \leq \frac{1}{4} \varepsilon \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

(qui è fondamentale essersi ridotti ad un numero finito di punti)

Dico che con questo k_0 ho concluso.

Dato un qualunque $x \in [a, b]$, scelgo i tale che $x \in B_{\delta_i}(x_i)$ (sono un ricoprimento) e per la triangolare

$$\begin{aligned} |f_{n_k}(x) - f_\infty(x)| &\leq |f_{n_k}(x) - f_{n_k}(x_i)| \leq \frac{1}{4} \varepsilon \quad \text{perché } |x - x_i| \leq \delta_i \\ &\quad + |f_{n_k}(x_i) - f_\infty(x_i)| \leq \frac{1}{4} \varepsilon \quad \text{per } k \geq k_0 \\ &\quad + |f_\infty(x_i) - f_\infty(x)| \leq \frac{1}{4} \varepsilon \quad \text{perché } |x - x_i| \leq \delta_i \end{aligned}$$

Ho quindi dimostrato che

$$|f_{n_k}(x) - f_\infty(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall k \geq k_0.$$

— o — o —

Oss. Se $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sono equicontinue ed equilibrate, NON è detto che esista s.succ. conv. unif. su $\mathbb{R}$

[Ad esempio: $f_n(x) = \arctan(\frac{x}{n})$. Stanno tutte tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ e sono tutte lip, con costante ≤ 1 .

Tuttavia convergono puntualmente ma non unif. a 0]

Teorema Se $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sono equicontinue ed equilibrate, allora esiste s.succ. $f_{n_k}(x)$ che converge unif. sui compatti.

Dim. Occorre fare un procedimento diagonale

- Fisso $[-1,1]$ e qui trovo s.succ. $f_{n_1,k}$ che conv. unif. in $[-1,1]$
- Fisso $[-2,2]$ e trovo s.succ. della prec. che conv. unif. in $[-2,2]$
- ... stessa cosa in $[-k,k]$

Con il procedimento diagonale ne trovo una che conv. unif. in $[-k,k]$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Esercizio Sia $f_n : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una succ. equicont.

Dimostrare che è equi-unif.-cont., cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in [a,b] \forall y \in [a,b] \forall n \in \mathbb{N}$$

$\uparrow$ dipende solo da ε

$$|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon$$

[specie di Heine-Cantor]